

**UNIVERSITA' DI CATANIA
FACOLTA' DI INGEGNERIA**

FISICA TECNICA INDUSTRIALE

VOLUME PRIMO: TERMODINAMICA APPLICATA

**COMPLEMENTI DI TERMODINAMICA
FLUIDI IDEALI E REALI – VAPORI SATURI
CICLI TERMODINAMICI – MACCHINE TERMICHE -
TERMOELETTRICITA' E SUE APPLICAZIONI
ALETTE - CONVEZIONE NATURALE E FORZATA
METODI NUMERICI PER LA CONVEZIONE
EBOLLIZIONE E CONDENSAZIONE**

PROF. ING. GIULIANO CAMMARATA

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E MECCANICA
SEZIONE DI ENERGETICA INDUSTRIALE ED AMBIENTALE**

AGGIORNAMENTO DEL 02/10/2010

**FILE: FISICA TECNICA VOL 1 - COMPLEMENTI DI TERMODINAMICA
APPLICATA.DOC**

AUTORE: GIULIANO CAMMARATA

DATA: 02/10/2010

www.gcammarata.net
gcamma@diim.unict.it
cammaratagiuliano@tin.it

Il presente volume può essere liberamente copiato e diffuso dagli Allievi per usi esclusivamente didattici a condizione che rimangano invariati i riferimenti dell'Autore sopra indicati.

INTRODUZIONE

Gli argomenti trattati in questo volume sono specialistici e finalizzati ad un corso di Termodinamica Applicata rivolto ai studenti di Ingegneria Meccanica, Nucleare ed Elettrica.

In particolare sono qui proposti argomenti relativi allo studio elasto-termometrico ed energetico calorimetrico dei fluidi, allo studio dell'exergia, dell'equazione di Stodola e al diagramma di Sunkey ed il Fattore di Qualità.

Segue lo studio dei Fluidi Reali con la proposizione delle equazioni di Van der Waals, Beattie – Bredemann, del Viriale e del Dietrich.

Per le macchine termiche sono esaminati i cicli rigenerativi per gli impianti a vapore, il ciclo Joule – Brayton e i cicli inversi con particolare riguardo ai cicli ad assorbimento.

Viene quindi presentato il capitolo per la termoelettricità e sue applicazioni. E' altresì ripreso lo studio delle alette piane e cilindriche.

Per la convezione forzata turbolenta e la convezione naturale sono proposte le equazioni costitutive e un capitolo è dedicato ai metodi numerici per la convezione con particolare riferimento al metodo k-ε. E' qui presentato un esempio applicativo di studio di uno swirler per un reattore.

Infine si presenta lo studio dell'ebullizione e della condensazione con applicazione al tubo di calore (Heat Pipe).

Catania 02/10/2010

Prof. Ing. Giuliano Cammarata

1 ENTROPIA PER I GAS IDEALI

Il calcolo dell'entropia per i gas ideali può immediatamente essere effettuato ricordando che si può scrivere:

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad [1]$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad [2]$$

Tenuto conto che $R = c_p - c_v$ e $k = c_p / c_v$ dalla [1] si ha:

$$s = c_v \ln T v^{k-1} + \text{cost}$$

Definendo la costante come il valore assunto a zero Celsius, cioè:

$$\text{cost} = -c_v \ln T_0 v_0^{k-1}$$

si ha, infine:

$$s = c_v \ln \frac{T}{T_0} \left(\frac{v}{v_0} \right)^{k-1} \quad [3]$$

Con analogo procedimento dalla [2] si ottiene:

$$s = c_p \ln \frac{T}{T_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1-k}{k}} \quad [4]$$

L'ipotesi di validità per i gas ideali comporta anche ritenere costanti i calori specifici.

La costante di integrazione assume un significato rilevante in base al Principio di Nerst secondo il quale allo zero assoluto l'entropia di qualunque sistema termodinamico è nulla. Si potrebbero riscrivere le precedenti relazioni assumendo come stato di riferimento lo zero assoluto anziché quella a zero Celsius.

1.1 ENTROPIA NEL CAMBIAMENTO DI FASE

Durante i passaggi di stato (cambiamento di fase) la temperatura e la pressione rimangono costanti (come si vedrà nel prosieguo più dettagliatamente). Ne segue, ad esempio per un fluido che passi dallo stato liquido allo stato gassoso, che l'entropia di un fluido in cambiamento di fase è data dall'equazione:

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{v dp}{T} = \frac{dh}{T} \quad dp=0$$

Integrando si ottiene l'espressione:

$$s_g - s_l = \frac{h_g - h_l}{T} = \frac{h_{lg}}{T}$$

Generalizzando l'espressione per il passaggio da un qualsiasi stato α ad uno stato β si ha:

$$s_\alpha - s_\beta = \frac{h_\alpha - h_\beta}{T} = \frac{h_{\alpha\beta}}{T}$$

1.2 PIANO TERMODINAMICO DI GIBBS

Per trasformazioni reversibili si ha $dQ = Tds$. In un piano aventi in ordinate la temperatura assoluta, T , e in ascisse l'entropia specifica, s , è allora possibile calcolare la quantità di calore scambiata in una trasformazione, vedi Figura 1, mediante l'integrale $Q = \int_{s_1}^{s_2} Tds$.

Il piano di *Gibbs*, detto piano *entropico* o *piano termodinamico*, rappresenta facilmente le isoterme (*parallele all'asse delle ascisse*) e le isoentropiche (*parallele all'asse delle ordinate*). Nella Figura 3 si ha la rappresentazione di un ciclo di *Carnot* costituito da due isoterme, a temperature T_1 e T_2 , e due isoentropiche, s_1 ed s_2 . L'area del ciclo rappresenta ancora, per quanto detto in precedenza, il lavoro netto del ciclo, così come nel piano di *Clapeyron* (pv). Le isocore e le isobare hanno andamenti esponenziali e sono rappresentate come in Figura 4. Le relazioni [3] e [4] dicono che le *isocore* e le *isobare* hanno andamenti dell'entropia di tipo esponenziale, come rappresentato nella figura seguente.

Per i fluidi reali lontani dal punto critico (quando, cioè, hanno comportamento vicino a quello ideale) si possono ritenere esponenziali le isobare e le isocore, come si vedrà nel prosieguo per i diagrammi di stato dei gas saturi.

1.2.1 SIGNIFICATO DELLA SOTTOTANGENTE NEL PIANO (T,S)

E' facile dimostrare che nel piano (Ts) la sottotangente assume il significato di *calore specifico* nel punto A lungo la trasformazione considerata. In Figura 5 si ha la rappresentazione grafica di quanto detto.

Dato il punto A si traccia la tangente geometrica alla curva della trasformazione in A fino ad incontrare l'asse delle ascisse in R .

La sottotangente RS è il calore specifico in A per la trasformazione considerata. Risulta, infatti:

$$RS = \frac{AS}{\tan \alpha} = \frac{T}{\left(\frac{dT}{ds}\right)_A} = \left(\frac{Tds}{dT}\right)_A = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_A = c_p|_A \quad [5]$$

che dimostra quanto affermato. Ciò spiega anche perché le curve isobare sono più rivolte verso l'asse delle ascisse, vedi Figura 4, rispetto alle isocore.

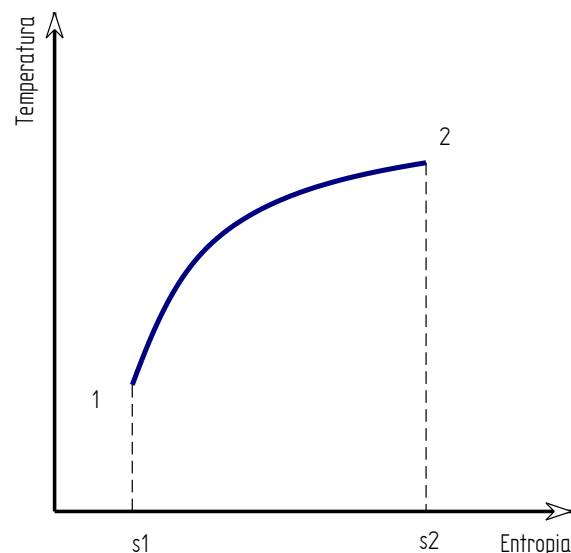


Figura 1: Piano di Gibbs

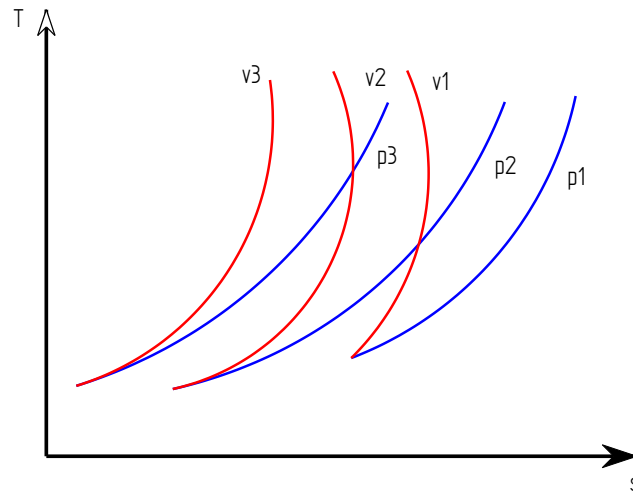


Figura 2: Andamento delle isocore e delle isobare nel piano (T,s)

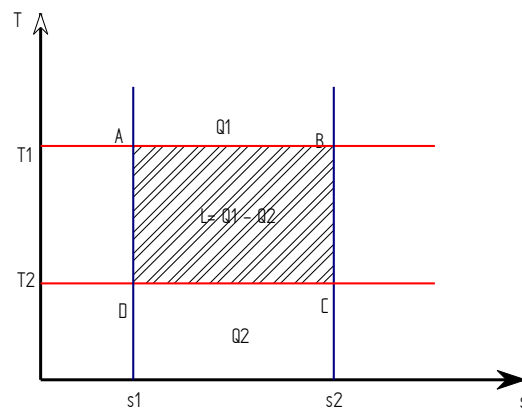


Figura 3: Rappresentazione di un ciclo di Carnot nel piano (T,s)

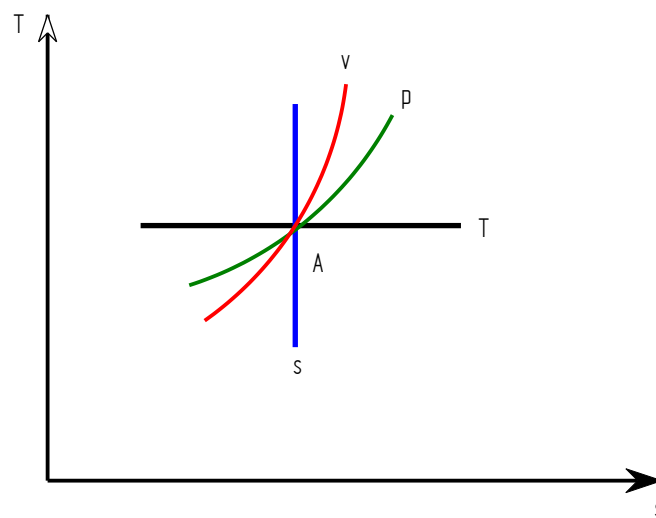


Figura 4: Andamento delle trasformazioni nel piano di Gibbs

Occorre ricordare, infatti, che per la legge di Mayer risulta essere:

$$c_p - c_v = R \quad [6]$$

per cui, essendo $R > 0$, deve essere $c_p > c_v$, ossia la sottotangente di c_p deve essere maggiore della sottotangente di c_v , come indicato in Figura 6.

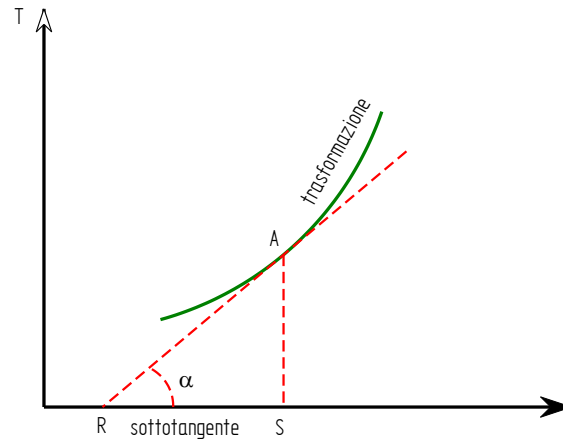


Figura 5: Significato della sottotangente nel piano (Ts)

Il segmento RS, corrispondente a c_p , è maggiore del segmento RU (corrispondente a c_v).

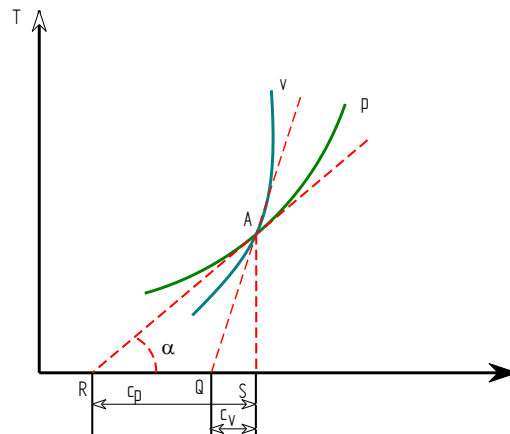


Figura 6: Rappresentazione della Legge di Mayer sul piano (Ts)

1.3 PIANO DI MOLLIER O ENTALPICO

Oltre al piano termodinamico di *Gibbs* è molto utilizzato nell'*Ingegneria Meccanica* il piano entalpico o di *Mollier*. In questo caso si ha in ascissa l'entropia specifica e in ordinata l'entalpia specifica, come indicato nella Figura 7. Questo piano termodinamico risulta molto comodo nelle applicazioni poiché consente di calcolare il *lavoro tecnico* facilmente mediante una semplice differenza dei valori di entalpia lette nell'asse delle ordinate.

La temperatura non è rappresentata direttamente, come nel piano di *Gibbs*, ma è possibile ottenerla mediante una semplice costruzione geometrica. Essa, infatti, è la tangente trigonometrica della tangente geometrica in un punto lungo una isobare. Infatti risulta:

$$Tds = dh - vdp$$

e quindi:

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p \quad [7]$$

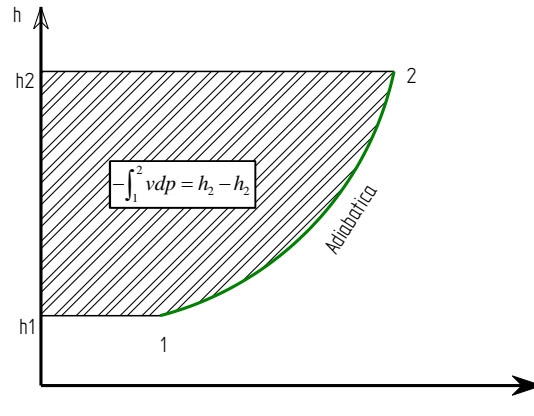


Figura 7: Piano entalpico di Mollier

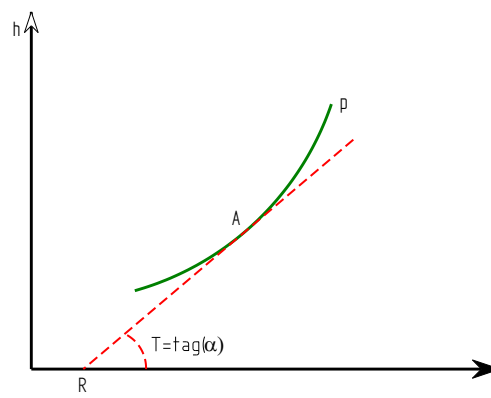


Figura 8: Calcolo della temperatura nel piano di Mollier

Nella Figura 8 si ha la rappresentazione grafica di quanto ottenuto analiticamente. In genere, però, le isoterme sono rappresentate mediante curve aventi andamenti tipici per il fluido esaminato e pertanto la lettura della temperatura può essere agevolmente effettuata interpolando fra le isoterme disponibili. Il piano di *Mollier* trova particolare applicazione nei cicli termodinamici (specialmente quello a vapore del quale di parlerà nel prosieguo) e nella progettazione delle macchine termiche.

1.4 PROCESSI ISOENTROPICI E ADIABATICI

I processi isoentropici sono ideali e reversibili, come dimostrato con l'equazione di Gibbs. Possiamo, allora, rappresentare le trasformazioni ideali con isoentropiche e le trasformazioni reali con politropiche ad entropia sempre crescente. Studiamo i casi importantissimi di espansione e di compressione isoentropiche e reali.

Espansione isoentropica e reale

Per espansione isoentropica si intende un'espansione che porti un fluido da una pressione maggiore ad una minore, come rappresentato in Figura 9.

Il lavoro tecnico ideale di espansione vale, essendo $Tds = dh - vdp$:

$$L_i = -\int_1^2 v dp = h_1 - h_2$$

Nella stessa Figura 9 rappresentiamo una espansione reale (*politropica di indice n*) ad entropia crescente dallo stato 1 allo stato 2' per la quale si ha il lavoro tecnico reale, ancora calcolabile mediante la relazione:

$$L_r = -\int_1^{2'} v dp = h_1 - h_{2'}$$

Possiamo definire rendimento isoentropico di espansione il rapporto:

$$\eta_{is} = \frac{L_r}{L_i} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2} \quad [8]$$

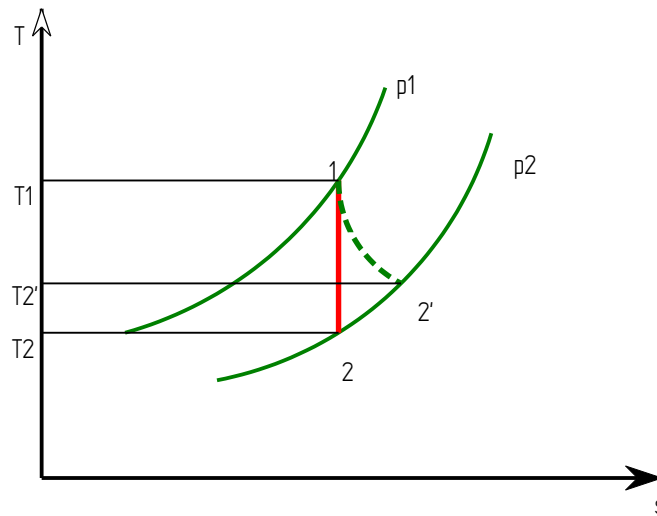


Figura 9: Espansione ideale e reale

Il rendimento isoentropico, quindi, fornisce direttamente una indicazione sull'irreversibilità della trasformazione considerata. Valori commerciali attuali delle turbine del rendimento isoentropico (a vapore e a gas) variano nell'intervallo 0.75-0.85 a seconda se sono di alta pressione (valori minori) o di bassa pressione (valori maggiori). Si osserva che le irreversibilità nell'espansione reale producono attriti fra fluido di lavoro e le palette delle turbine e pertanto si ha produzione di calore internamente al fluido che, a sua volta, ha più capacità di produrre lavoro tecnico. In definitiva allora, una parte del calore di attrito viene recuperato sotto forma di maggior lavoro rispetto a quello che il rendimento isoentropico ci propone. Questo risultato, invero dimostrato anche sperimentalmente, è perfettamente dimostrabile mediante l'utilizzo del *rendimento exergetico di espansione* definito come rapporto fra l'exergia ottenuta (vedi §3.4) nella trasformazione reale e l'exergia spesa.

Compressione isoentropica e reale

Si ha un'espansione quando il fluido di lavoro passa da pressione minore a pressione maggiore a spese di lavoro tecnico esterno di compressione.

Nella successiva Figura 10 si hanno le rappresentazioni delle compressioni ideali e reali nel piano (T,s). Il lavoro tecnico speso per la compressione ideale vale, per quanto già indicato per l'espansione:

$$L_i = \int_1^2 v dp = h_2 - h_1$$

mentre per la compressione reale da 1 a 2' si ha un lavoro di compressione dato da:

$$L_r = \int_1^{2'} v dp = h_{2'} - h_1$$

Possiamo anche in questo caso definire un *rendimento isoentropico di compressione* come rapporto fra il lavoro ideale di compressione e quello reale, cioè:

$$\eta_{is} = \frac{L_i}{L_r} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1} \quad [9]$$

Si osservi come una compressione reale porta il fluido a temperatura finale maggiore che nel caso ideale e sempre ad entropia crescente. Si vedrà nel prosieguo una conseguenza di questa osservazione sui cicli frigoriferi a compressione di vapori saturi. Anche per la compressione si può definire un *rendimento exergetico di compressione* come si vedrà nel prosieguo.

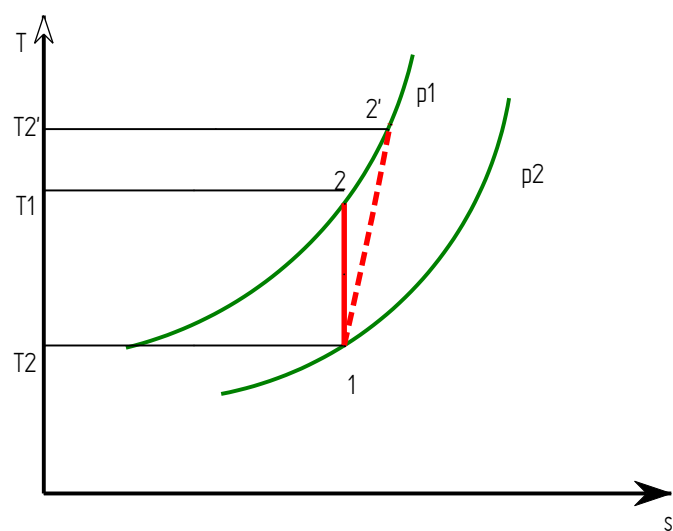


Figura 10: Compressione ideale e reale

2 STUDIO ELASTO-TERMOMETRICO E ENERGETICO-CALORIMETRICO DEI CORPI

Lo studio di un corpo passa attraverso la sperimentazione e la conoscenza delle sue proprietà termofisiche. La loro determinazione può impegnare notevoli risorse qualora non ben programmate a causa del grande numero di variabili da prendere in considerazione contemporaneamente.

La *Termodinamica* viene in aiuto in questo fornendo una metodologia corretta che non impegna notevolmente in sperimentazioni ripetitive e spesso superflue.

Lo studio di un corpo avviene in due fasi:

- **Lo studio elasto-termometrico** con il quale si determina il legame funzionale tra le variabili macroscopiche esterne e quindi la funzione caratteristica $f(p, v, T) = 0$.
- **Lo studio energetico-calorimetrico** con il quale si conosce l'andamento delle grandezze microscopiche interne del corpo (u, h, s, f, g). Quest'ultimo studio presenta maggiori difficoltà rispetto al precedente poiché le variabili interne non sono direttamente accessibili sperimentalmente ma debbono essere calcolate mediante relazioni matematiche che legano quest'ultime alle variabili macroscopiche esterne.

Vogliamo ora dimostrare che nota l'equazione caratteristica esterna $f(p, v, T) = 0$ e la conoscenza della funzione $c_p(T)$ per una data pressione allora si possono conoscere tutte le proprietà termofisiche.

Sappiamo che la funzione di *Gibbs* è $g = u + p v - T s$ che in forma differenziale diviene:

$$dg = -s dT + v dp \quad [10]$$

e pertanto si ha:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_T = v \quad [11]$$

e ancora

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_p = -s \quad [12]$$

Integrando la [11] si ottiene:

$$g(p, T) = \int_{p_0}^p v dp + \gamma(T) \quad [13]$$

ove $\gamma(T)$ è una funzione incognita, avendo integrato in p , della sola temperatura T .

In questa equazione $\int_{p_0}^p v dp$ si può calcolare una volta nota la funzione caratteristica elasto-termometrica $f(p, v, T) = 0$. La funzione $\gamma(T)$ può facilmente essere determinata osservando che ponendo $p = p_0$ la [13] fornisce:

$$\gamma(T) = g(p_0, T) \quad [14]$$

e quindi il significato di $\gamma(T)$ è perfettamente noto. Il calore specifico a pressione costante è definito come:

$$c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad [15]$$

e pertanto, tenendo conto della [12], si ha:

$$c_p = -T \left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \right)_p \quad [16]$$

Ponendo $p = p_0$ e tenendo conto della [14] si ottiene:

$$c_{p_0}(T) = -T \left(\frac{\partial^2 \gamma(T)}{\partial T^2} \right)_{p_0} \quad [17]$$

Se allora potessimo conoscere, mediante misure termometriche, l'andamento della funzione $c_{p_0}(T)$ allora la precedente relazione potrebbe essere integrata due volte ottenendo:

$$\gamma(T) = -\int dT \int \frac{c_{p_0}(T)}{T} dT + AT + B \quad [18]$$

ove A e B sono due costanti di integrazione arbitrarie.

Nota $\gamma(T)$ si può risolvere pienamente la [13] e quindi conoscere l'andamento di $g(p, T)$ a meno di un termine lineare $AT + B$, come ci aspettava data la definizione di g come combinazione lineare di due funzioni di stato u (o anche h) ed s . Una volta nota $g(p, T)$ applicando la [16] si può conoscere l'andamento di $c_p(p, T)$. Quindi, risolvendo la [15], si può conoscere $s(p, T)$ e da questa l'energia interna $u(p, T) = g(p, T) - pv - Ts$ e così via per tutti i potenziali termodinamici, mediante le equazioni di Maxwell.

Esempio di studio Energetico – Calorimetrico

Applichiamo quanto sopra sviluppato allo studio di un corpo di cui si conosca l'equazione caratteristica elasto-termometrica che è:

$$pv = RT \quad [19]$$

e si sappia, inoltre, che ad una data pressione p_0 il calore specifico sia costante con la temperatura:

$$c_{p_0}(T) = c_{p_0} \quad [20]$$

Applicando la [18] si ottiene:

$$\gamma(T) = -c_{p_0} \int dT \int \frac{dT}{T} + AT + B = -c_{p_0} \int \log T dT + AT + B$$

Pertanto risolvendo l'integrale si ha:

$$\gamma(T) = -c_{p_0} T (\log T - 1) + AT + B \quad [21]$$

Nota $\gamma(T)$ applicando la [13] si ottiene:

$$g(p, T) = \int_{p_0}^p v dp + \gamma(T) = RT \log \left(\frac{p}{p_0} \right) - c_{p_0} T (\log T - 1) + AT + B$$

ossia, riordinando i termini:

$$g(p, T) = RT \log p - c_{p_0} T \log T + A'T + B'$$

ove A' e B' sono sempre costanti arbitrarie di integrazione. Adesso possiamo conoscere l'andamento del calore specifico $c_p(p, T)$ applicando la [16]. Si ottiene:

$$c_p(p, T) = -T \left(\frac{\partial^2 g(p, T)}{\partial T^2} \right)_p = -T \left(\frac{\partial (RT \log p - c_{p_0} T \log T - c_{p_0} A')}{\partial T} \right)_p = c_{p_0}$$

Pertanto il corpo in esame ha calore specifico costante non solo alla pressione p_0 ma a tutte le pressioni. Applicando la [11] si ha:

$$\left(\frac{\partial g(p, T)}{\partial p} \right)_T = v = \left(\frac{\partial \left(RT \log \left(\frac{p}{p_0} \right) - c_{p_0} T (\log T - 1) + AT + B \right)}{\partial p} \right)_T = \frac{RT}{p}$$

e quindi si ritrova valida la relazione caratteristica $pv = RT$.

Se applichiamo la [12] si ottiene l'espressione dell'entropia:

$$s(p, T) = - \left(\frac{\partial g(p, T)}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial \left(RT \log \left(\frac{p}{p_0} \right) - c_{p_0} T (\log T - 1) + AT + B \right)}{\partial T} \right)_p$$

ossia:

$$s(p, T) = -R \log \left(\frac{p}{p_0} \right) + c_{p_0} (\log T - 1) + c_{p_0} = R \log \frac{p_0}{p} + c_{p_0} \log T + A$$

Nota la $s(p, T)$ si ha infine l'espressione dell'energia interna:

$$u = g(p, T) - pv - sT = RT \log p - c_{p_0} T \log T + A'T + B' - pv - \left(R \log \frac{p_0}{p} + c_{p_0} \log T \right) T$$

che, tenuto conto della relazione di Mayer generalizzata e dell'equazione caratteristica diviene:

$$u(p, T) = c_v T + B' \quad [22]$$

Pertanto la sostanza qui esaminata è il *gas perfetto* più volte studiato nei capitoli precedenti.

Questo esempio vuole confermare quanto già noto in precedenza e cioè che le ipotesi di conoscenza delle due equazioni caratteristiche [19] e [20] portano alla [22] e quindi alla piena definizione del comportamento termodinamico della sostanza.

Quanto sopra dimostrato ci dice anche che *un fluido ideale ha calore specifico costante a qualunque pressione* e che le due definizioni sono biunivoche: *fluido ideale* \Rightarrow *calore specifico a pressione costante invariante con la pressione e viceversa*.

3 EXERGIA

Si introduce ora il concetto di **exergia** di una trasformazione termodinamica: essa è **il lavoro massimo ottenibile nella trasformazione**. Nel caso di una macchina termica l'exergia è data dalla relazione del *lavoro massimo* già vista in quanto il lavoro massimo lo si può ottenere solo con la macchina di *Carnot*. Se consideriamo una massa termica a temperatura iniziale T_1 si dimostra che l'exergia è data dalla seguente relazione:

$$\Delta e = h_2 - h_1 - T_0 (s_2 - s_1) \quad [23]$$

ove con e si è indicata l'exergia specifica (misurata in J/kg), con s l'entropia specifica (misurata in $J/K \cdot kg$) e con T_0 si è indicata la temperatura dell'ambiente (detta anche *stato di riferimento*).

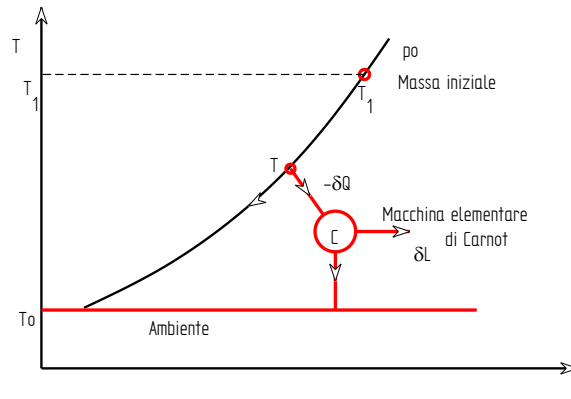


Figura 11: Exergia di una massa a temperatura T_1

Infatti supponendo che la massa abbia temperatura iniziale T_1 e che si trovi alla pressione p_0 dell'ambiente, il massimo lavoro che possiamo ottenere dall'energia termica posseduta da questa è dato da una macchina elementare di Carnot che, istante per istante e quindi a temperatura variabile da T_1 a T_0 , trasformi il calore ceduto dalla massa δQ , (negativo perché uscente) in lavoro δL . Abbiamo, allora, per una trasformazione che porti la massa da T_1 a T_0 il lavoro massimo:

$$L_{\max} = \Delta e = \int_{T_1}^{T_0} -\delta Q \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$$

Sviluppando l'integrale a secondo membro si ha:

$$\Delta e = \underbrace{\int_{T_1}^{T_0} -\delta Q}_{\text{Lungo l'isobara } p_0} + T_0 \int_{T_1}^{T_0} \frac{\delta Q}{T}$$

Poiché lungo l'isobara p_0 si ha $\delta Q = dh$ allora, ricordando la definizione di entropia¹ si ha:

$$\Delta e = h_1 - h_0 - T_0 (s_1 - s_0)$$

che è la [23]. Analogamente² si ottiene se la pressione iniziale è diversa da quella ambiente p_0 e pertanto se la variazione Δe non dipende dal percorso seguito essa è una *grandezza di stato*. L'exergia della massa viene detta *exergia di sistema*. Anche l'exergia, per quanto appena dimostrato, è un *potenziale termodinamico* e dipende solo dagli stati iniziali (1) e finali (2) della trasformazione. Si definisce *rendimento exergetico* il rapporto fra l'exergia ottenuta e l'exergia spesa in una trasformazione termodinamica. Lo studio in chiave *exergetica* delle trasformazioni termodinamiche è relativamente recente (*circa trenta anni*) e rappresenta il nuovo modo di vedere le cose non più legate ai rendimenti energetici. Un esempio può chiarire quanto sopra detto.

¹ Stiamo qui supponendo il processo reversibile.

² Si lascia all'Allievo la semplice dimostrazione di questa affermazione.

Si consideri il processo di combustione che avviene in una caldaia domestica per produrre acqua calda per il riscaldamento: viene bruciato gasolio ad una temperatura di circa 1600 °C per ottenere acqua calda a circa 80 °C. In termini energetici si definisce il rendimento di caldaia come il rapporto fra *il calore prodotto e quello trasferito all'acqua*.

In questo modo si ottengono valori assai elevati e oggi vicini al 94-96%, nel senso che il 94-96% dell'energia ottenuta dalla combustione viene ceduta all'acqua mentre il 6-4% viene perduta con i fumi. Ben diverso è il discorso dal punto di vista *exergetico*. Noi bruciamo gasolio ad una temperatura di circa 1600 °C per riscaldare acqua ad una temperatura di 80°C.

L'*exergia* della fiamma a 1600 °C è molto elevata perché la sua temperatura è elevata rispetto all'ambiente (*assunto a 20°C*) mentre quella dell'acqua a 80°C è bassa perché la sua temperatura è prossima a quella ambiente. Considerando la caldaia uno scambiatore di calore isolato adiabaticamente il rendimento exergetico, rapporto fra il rendimento exergetico per una macchina di *Carnot* che opera fra 80°C e 20°C ed una macchina di *Carnot* che opera fra le temperature di 1600°C e 20°C, vale:

$$\eta_{\text{exergetico}} = \frac{1 - \frac{20 + 273}{80 + 273}}{1 - \frac{20 + 273}{1600 + 273}} = 0.201$$

Pertanto produrre l'acqua a 80°C mediante fiamma a 1600 °C significa utilizzare solo 20% di quello che, invece, potrebbe essere ottenuto se utilizzassimo il calore direttamente alla temperatura di 1600 °C. Con temperatura di fiamma di 2000 °C si avrebbe un rapporto di circa il 19.5%.

Dunque quotidianamente noi commettiamo un *assurdo termodinamico* bruciando un combustibile *nobile* (*che potrebbe essere più convenientemente utilizzato per produrre lavoro nei motori delle auto o nelle centrali elettriche*) ad alta temperatura per utilizzare l'acqua riscaldata ad una temperatura di 80 °C, ridicola rispetto a quella di fiamma.

Questi sprechi energetici che oggi tutti egoisticamente ed ipocritamente tolleriamo saranno rimpianti dai nostri figli che troveranno sempre meno risorse pregiate per ottenere energia meccanica in futuro!

3.1 EXERGIA DI UN SISTEMA APERTO STAZIONARIO

Abbiamo già trovato che per un sistema aperto in regime stazionario vale la **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata..** Se osserviamo bene quanto essa vuole dirci ci accorgiamo subito che è possibile incorrere in errori gravi. Se annulliamo tutto il primo membro si ha:

$$q - l = 0 \quad [24]$$

ovvero che tutto il calore può trasformarsi in lavoro, cosa che contraddice l'enunciato di *Kelvin* e di *Carnot* del *Secondo Principio* della **Termodinamica**. In realtà la [24] pone in luce solamente quello che il *Primo Principio* ci ha sempre detto: l'*equivalenza metrologica* del calore e del lavoro. Essi sono entrambi forme di energia e quindi si equivalgono. Oggi con il S.I. utilizziamo la stessa unità di misura per l'energia termica e quella meccanica, il *Joule*.

Ben diversamente vanno le cose se teniamo conto non solo di un bilancio ma anche di una trasformazione (*mediante un ciclo termodinamico*) del calore in lavoro. Ciò può e deve essere fatto utilizzando il *Secondo Principio* della *Termodinamica*. Si consideri il generico sistema di Figura 12 che scambia con l'esterno *N* flussi di massa entranti ed *M* uscenti, scambia la potenza meccanica *L* (*Watt*) e i flussi termici (*Watt*) *Q*₀ con l'ambiente a temperatura *T*₀, *Q*₁ con il serbatoio a temperatura *T*₁, ..., *Q*_{*K*} con il serbatoio a temperatura *T*_{*K*}. Scriviamo l'equazione dell'energia **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** che ora diviene, indicando con il pedice 1 l'ingresso e con il pedice 2 l'uscita e supponendo (*per sola semplicità operativa poiché la sola condizione necessaria è la stazionarietà nel flusso di massa*) che il numero di flussi di massa in uscita sia pari a quello di ingresso:

$$\sum_1^N \dot{m}_i \left[\left(\frac{w_{i2}^2 - w_{i1}^2}{2} \right) + g(z_{i2} - z_{i1}) + (h_{i2} - h_{i1}) \right] = \dot{Q}_0 + \dot{Q}_1 + \dots + \dot{Q}_K - \dot{L} \quad [25]$$

Per il Secondo Principio possiamo scrivere, integrando l'equazione di Gibbs $ds = \frac{\delta q}{T} \Big|_{rev} + ds_{irr}$, la seguente equazione di bilancio dei flussi di entropia ($W/kg.K$):

$$\sum_1^N \dot{m}_i (s_{i2} - s_{i1}) = \frac{\dot{Q}_0}{T_0} + \frac{\dot{Q}_1}{T_1} + \dots + \frac{\dot{Q}_j}{T_j} + \dots + \frac{\dot{Q}_K}{T_K} + \Delta s_{irr}$$

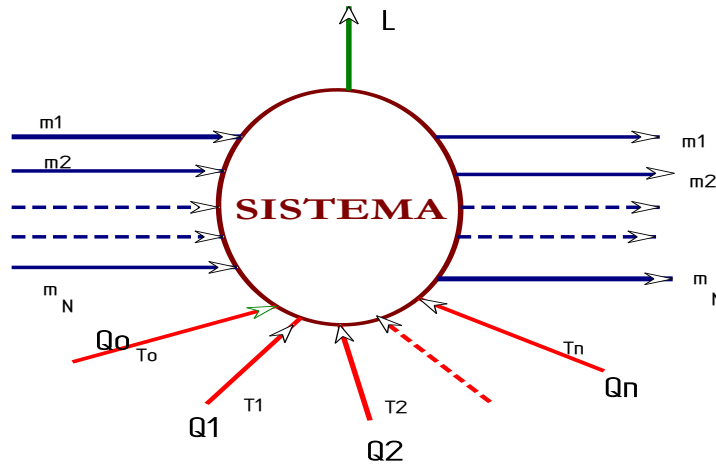


Figura 12: Sistema termodinamico stazionario

Se moltiplichiamo ambo i membri di quest'ultima equazione per T_0 si ottiene:

$$\sum_1^N \dot{m}_i (s_{i2} - s_{i1}) = \frac{\dot{Q}_0}{T_1} + \frac{\dot{Q}_1}{T_1} T_0 + \dots + \frac{\dot{Q}_j}{T_j} T_0 + \dots + \frac{\dot{Q}_K}{T_K} T_0 + T_0 \Delta s_{irr} \quad [26]$$

Sottraendo membro a membro la [25] e la [26] si ottiene l'equazione (*combinazione lineare delle due precedenti*) nella quale, esplicitando la potenza L ottenuta dal sistema, si ha:

$$\dot{L} = \sum_1^N \left[\left(\frac{w_{i1}^2 - w_{i2}^2}{2} \right) + g(z_{i1} - z_{i2}) \right] + \sum_1^N [\dot{m}_i (h_{i1} - h_{i2}) - T_0 (s_{i1} - s_{i2})] + \dot{Q}_1 \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + \dots + \dot{Q}_K \left(1 - \frac{T_0}{T_K} \right) - T_0 \Delta s_{irr} \quad [27]$$

Questa equazione contempla sia il *Primo* che il *Secondo Principio* della *Termodinamica* e quindi non porta agli errori discussi all'inizio del paragrafo. Si osserva, infatti, che la potenza ottenuta si compone (*vedi il secondo membro*) di tutti i termini meccanici (*variazioni energia cinetica e potenziale fra ingresso e uscita del fluido di lavoro*), dei termini entalpici modificati secondo la [23] (*exergia di sistema*) e delle potenze ottenute dalla trasformazione delle quantità di calore, Q_j , (*trasformate mediante macchine di Carnot operanti fra le temperature dei rispettivi serbatoi, T_j , e l'ambiente esterno a temperatura T_0*) e diminuito della quantità $T_0 \Delta s_{irr}$, cioè dal flusso di *anergia* prodotta dalle irreversibilità del sistema.

Qualora volessimo la massima potenza dovremmo annullare proprio l'anergia per irreversibilità e quindi dovremmo utilizzare trasformazioni *reversibili*. Si vede ancora dalla [27] che il flussi di calore Q_j *pesano* secondo i fattori $(1 - T_0/T_j)$ detti anche *fattori di Carnot*. Quindi si è stabilita una scala di pesatura (*o di valore*) dell'energia termica tramite il fattore di *Carnot*: l'energia termica vale tanto di più quanto maggiore è la sua temperatura di utilizzo, come già accennato in precedenza. La [27] è ricca di applicazioni pratiche e consente di calcolare facilmente il *rendimento exergetico* o di *secondo ordine* di una qualunque trasformazione.

Caso dei sistemi chiusi

Se il sistema termodinamico considerato è chiuso e quindi non si hanno portate di massa entranti ed uscenti allora la [27] si riduce alla:

$$L = Q_1 \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + \dots + Q_K \left(1 - \frac{T_0}{T_K} \right) - T_0 \Delta s_{irr}$$

che fornisce il lavoro utile nel caso di sorgenti multiple di energia termica. Se le sorgenti divengono solo due, T_1 e T_0 , allora si ha:

$$L = Q_1 \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) - T_0 \Delta s_{irr} \quad [28]$$

Questo risultato era facilmente prevedibile: una macchina reale che opera fra le stesse temperature di una macchina di *Carnot* produce un lavoro utile L minore di quest'ultima. La differenza sta proprio nella produzione di anergia per irreversibilità, $T_0 \Delta s_{irr}$. Ciò significa che abbiamo due tipi di problemi con i cicli reali:

- non utilizzando le trasformazioni di *Carnot* (*due isoterme e due isoentropiche*) esse hanno sempre rendimenti termodinamici inferiori a quello del *Carnot* corrispondente;
- essendo i cicli reali attuati mediante trasformazioni *non reversibili* si hanno sempre produzioni di *irreversibilità* che producono anergia e quindi perdita del lavoro utile.

Caso di sistemi senza scambi di energia con l'esterno

Se annulliamo nella [27] gli scambi di calore con i serbatoi esterni e ci riferiamo all'unità di massa (*dividendo per la portata totale di massa*) si ottiene la relazione:

$$L = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) + h_1 - h_2 - T_0(s_1 - s_2) - T_0 \Delta s_{irr} \quad [29]$$

Se trascuriamo i termini meccanici (*solitamente piccoli rispetto a quelli termici tranne nei casi in cui si abbiano forti variazioni di quota o di velocità del fluido*) si ottiene la relazione:

$$L = h_1 - h_2 - T_0(s_1 - s_2) - T_0 \Delta s_{irr} \quad [30]$$

Questa equazione ci dice una massa di fluido che si evolve, lungo **qualunque trasformazione termodinamica**, dallo stato 1 allo stato 2 produce un lavoro utile pari alla variazione di entalpia diminuita del prodotto $T_0(s_1 - s_2)$ e dell'anergia di irreversibilità $T_0 \Delta s_{irr}$. Qualora la trasformazione sia reversibile si ha:

$$L = h_1 - h_2 - T_0(s_1 - s_2)$$

che coincide formalmente con la [23]. Si sottolinea il fatto che l'*exergia di sistema* Δe è indipendente dal tipo di trasformazione seguita per passare dallo stato 1 allo stato 2. Essendo la [23] una combinazione lineare di grandezze di stato è anch'essa una *grandezza di stato*.

Possiamo sempre calcolare la variazione di *exergia di sistema* mediante la [23] anche se la trasformazione è realmente irreversibile nel qual caso è, ovviamente:

$$L = \Delta e - T_0 \Delta s_{irr}$$

3.2 TEOREMA DI GOUY STODOLA

Per un sistema irreversibile l'equazione dell'*exergia* prima ricavata vale:

$$\dot{L} = \sum_1^N \left[\left(\frac{w_{i1}^2 - w_{i2}^2}{2} \right) + g(z_{i1} - z_{i2}) \right] + \sum_1^N [\dot{m}_i (h_{i1} - h_{i2}) - T_0(s_{i1} - s_{i2})] + \dot{Q}_1 \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + \dots + \dot{Q}_K \left(1 - \frac{T_0}{T_K} \right) - T_0 \Delta \dot{s}_{irr}$$

Per un sistema reversibile questa si trasforma, eliminando le irreversibilità, nella seguente:

$$\dot{L}_{rev} = \sum_1^N \left[\left(\frac{w_{i1}^2 - w_{i2}^2}{2} \right) + g(z_{i1} - z_{i2}) \right] + \sum_1^N [\dot{m}_i(h_{i1} - h_{i2}) - T_0(s_{i1} - s_{i2})] + \dot{Q}_1 \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + \dots + \dot{Q}_K \left(1 - \frac{T_0}{T_K} \right)$$

Sottraendo membro a membro queste due equazioni si trova l'importante relazione:

$$\dot{L}_{perso} = \dot{L}_{rev} - \dot{L} = T_0 \Delta \dot{s}_{irr} \geq 0 \quad [31]$$

Che costituisce l'espressione del Teorema di Gouy Stodola.

Si osservi subito che:

- Il Teorema di Gouy – Stodola è totalmente generale; non sono state fatte ipotesi di stazionarietà del processo.
- Tutte le equazioni scritte finora valgono sia per processi diretti (con produzione di lavoro), sia per processi inversi (con assorbimento di lavoro).
- I termini che compaiono nella [31] hanno il seguente significato:
 - L lavoro scambiato dal sistema con l'esterno nel corso del processo;
 - L_{rev} lavoro scambiabile dal sistema con l'esterno in assenza di irreversibilità;
 - L_{perso} exergia distrutta nel corso del processo.
- Le equazioni scritte fino ad ora valgono per un determinato volume di controllo: tutte le equazioni fin qui illustrate sono pertanto utilizzabili per valutare l'irreversibilità che si determina in una qualsivoglia porzione del sistema.
- Le equazioni di conservazione riguardano grandezze termodinamiche di tipo estensivo: consentono cioè di calcolare quantità additive; in altre parole, è possibile sommare le energie, le exergie, le entropie di sottovolumi di un volume di controllo per ottenere le corrispondenti grandezze riferite al volume complessivo. Questa proprietà risulta molto interessante, in quanto consente di suddividere, ad esempio, un impianto nei suoi componenti, per andare a valutare i singoli contributi alla perdita di lavoro complessiva del sistema.

Il lavoro perso (in termini di energia, in Joule) nel corso di un processo tra l'istante iniziale 0 e l'istante generico τ :

$$L_{perso} = \int_0^\tau \dot{L}_{perso} \cdot d\tau = L_{rev} - L = T_0 \Delta s_{irr}$$

3.3 COSTRUZIONE DI BOSNIAKOVIC PER L'EXERGIA

Data l'importanza pratica della [23] si fa qui cenno ad una costruzione grafica detta di *Bosniakovic*. Si ricordi che in base alla **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** si ha:

$$\delta q = dh - vdp \quad \text{Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.}$$

Potendo sostituire $\delta q = Tds$ si ottiene la relazione:

$$Tds = dh - vdp \quad [32]$$

valida sempre poiché lega valori di stato e quindi indipendenti dal tipo di trasformazione. Dalla [32] si deduce anche:

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p \quad [33]$$

Quindi il calcolo della temperatura nel piano entalpico di *Mollier* si effettua calcolando la tangente trigonometrica della tangente geometrica nel punto desiderato lungo l'isobara che passa per esso. Con riferimento alla Figura 13 si tracci la isobara ambiente, p_0 , e su di essa si determini il punto ambiente 0 (indicato con la lettera *A* in figura). Si voglia adesso calcolare l'exergia del punto 1: dimostriamo facilmente che il segmento $\overline{12}$ è proprio l'exergia $\Delta e = h_1 - h_0 - T_0(s_1 - s_0)$.

Si vede, infatti, che valgono le seguenti relazioni geometriche (punto A coincidente con il punto 0 di riferimento):

$$\overline{12} = \overline{13} - \overline{23} = (h_1 - h_0) - (h_2 - h_3) = (h_1 - h_0) - \overline{03} \cdot \tan \alpha = (h_1 - h_0) - T_0 (s_1 - s_0)$$

Quindi il segmento $\overline{12}$ è l'*energia utilizzabile* di una massa di fluido nelle condizioni 1. Si intuisce come i punti al di sopra della retta ambiente hanno *exergia positiva* mentre quelli al di sotto di essa hanno *exergia negativa*. Gli anglosassoni, sempre caratteristici nella scelta delle definizioni, chiamano l'ambiente *dead state* cioè letteralmente *stato morto* proprio perché tanto più ci si avvicina ad esso tanto minore è il lavoro utile ottenibile da una massa di fluido.

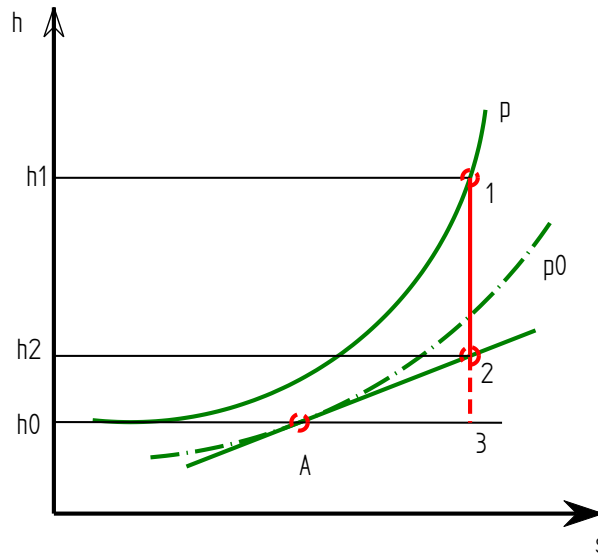


Figura 13: Costruzione di Bosniakovic

3.4 RENDIMENTO EXERGETICO DI ESPANSIONE

Nella Figura 14 si ha la rappresentazione di una espansione ideale e reale nel piano di *Mollier*. Abbiamo già definito, nel §1.4, il *rendimento isoentropico di espansione* e si è detto che nella realtà si ha un maggior lavoro utile per effetto di un recupero parziale di calore generato internamente per attrito.

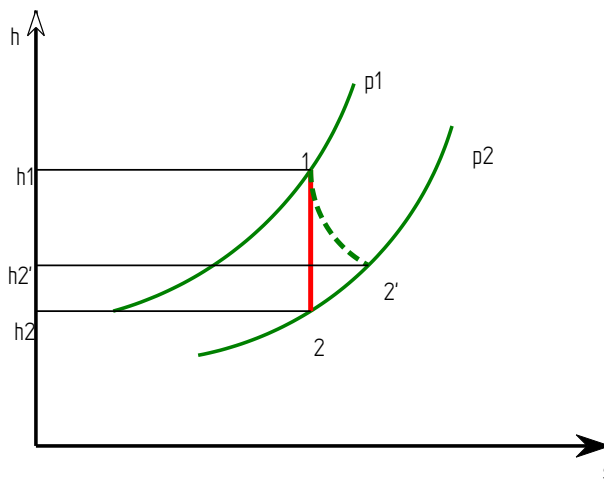


Figura 14: Espansione ideale e reale nel piano (h,s)

Possiamo adesso dimostrare facilmente quanto affermato mediante la definizione del *rendimento exergetico di espansione* definito dalla relazione:

$$\eta_{ex} = \frac{\text{Exergia_Ottenuta}}{\text{Exergia_Spesa}} = \frac{h_1 - h_{2'}}{e_1 - e_{2'}} \quad [34]$$

Ricordando la definizione [23] si può scrivere che la perdita di exergia vale (exergia spesa meno exergia ottenuta):

$$\Delta e = e_1 - e_2 - (h_1 - h_2) = T_o (s_2 - s_1) \quad [35]$$

e pertanto la perdita di exergia è pari alla produzione di anergia, essendo T_o la temperatura ambiente. Se utilizziamo la costruzione di *Bosniakovic* si può meglio vedere in quale rapporto è il rendimento exergetico rispetto al rendimento isoentropico dato dalla [8].

In Figura 15 si ha la rappresentazione della costruzione di *Bosniakovic* per il calcolo del rendimento exergetico di espansione. Il lavoro tecnico reale è pari al segmento AC, il lavoro ideale al segmento AB mentre la differenza di exergia spesa è pari al segmento AD. Pertanto si ha:

$$\eta_{ex} = \frac{AC}{AD} > \frac{AC}{AB}$$

e quindi il rendimento exergetico è maggiore del rendimento isoentropico. AC/AB .

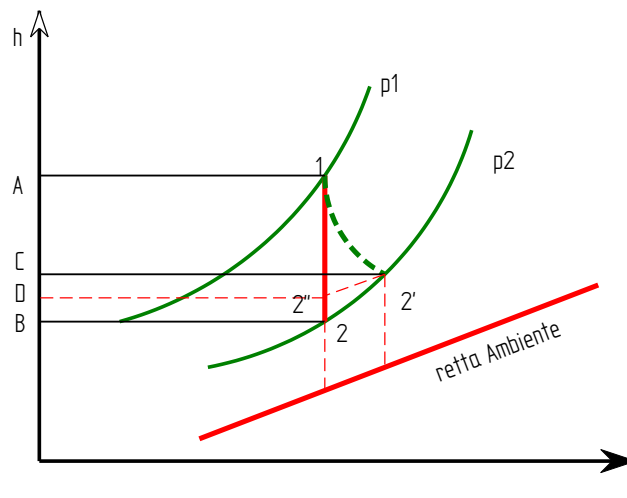


Figura 15: Costruzione di Bosniakovic per il rendimento exergetico

3.5 RENDIMENTO EXERGETICO DI COMPRESSIONE

Analogamente a quanto abbiamo fatto per l'espansione possiamo definire il *rendimento exergetico di compressione* dato dal rapporto:

$$\eta_{ex} = \frac{\text{Exergia _ Ottenuta}}{\text{Exergia _ Spesa}} = \frac{e_2 - e_1}{h_2 - h_1} \quad [36]$$

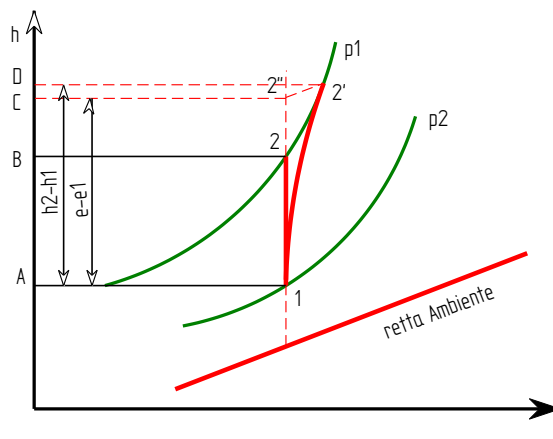


Figura 16: Costruzione di Bosniakovic per il rendimento exergetico di compressione

In Figura 16 si ha la rappresentazione sul piano di Mollier dell'espansione reale e della costruzione di *Bosniakovic* ad essa relativa. Con il simbolismo di figura si ha:

$$\eta_{ex} = \frac{e_{2'} - e_1}{h_{2'} - h_1} = \frac{AC}{AD} > \frac{AB}{AD}$$

Utilizzeremo i concetti sopra esposti parlando dei cicli termodinamici reali.

3.6 IL FATTORE DI QUALITÀ, FQ

Per caratterizzare una fonte di energia si utilizza il *fattore di qualità*, FQ , che misura la parte di exergia contenuta nella quantità totale di energia. Per l'energia elettrica e meccanica $FQ=1$ mentre per l'energia termica vale il *fattore di Carnot* $(1-T_0/T)$ che esprime il grado di conversione ideale di una sorgente di calore in lavoro utile (*cioè la sua exergia*).

In Figura 17 si ha l'andamento del *Fattore di Carnot* in funzione della temperatura della sorgente calda rispetto ad un ambiente a 300 K. Si comprende bene, dall'osservazione di questa figura, come FQ tenda a zero quando ci si avvicina all'ambiente (*dead state*) mentre cresce molto quanto più alta è la temperatura della sorgente.

Noto il fattore di qualità FQ si può calcolare l'exergia ottenibile dalla semplice relazione:

$$e = FQ \cdot h \quad (37)$$

ove con h si è indicata l'entalpia specifica (kJ/kg) della fonte considerata.

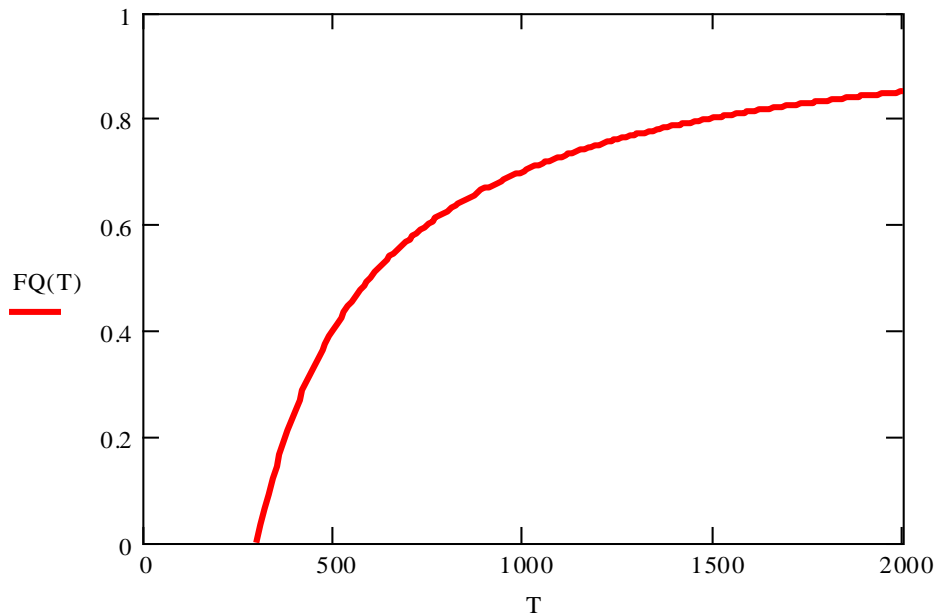


Figura 17: Andamento del Fattore di Carnot

3.7 ESPRESSIONI DEI RENDIMENTI ENERGETICI ED EXERGETICI

Se consideriamo una macchina che produrre una potenza elettrica E ed una termica Q utilizzando una fonte di energia primaria $C=m \cdot (p.c.i.)$, con m quantità di combustibile avente potere calorifico inferiore $p.c.i.$, si definisce rendimento *energetico* della cogenerazione:

$$\eta = \frac{E+Q}{m \cdot pci} = \frac{E+Q}{C} = \eta_E + \eta_T \quad (38)$$

ove η_E ed η_T sono i rendimenti elettrici e termici ciascuno riferito alla stessa quantità di energia primaria C .

L'exergia del combustibile è definita come *il lavoro massimo ottenibile in un sistema termodinamico aperto in regime permanente con possibilità di scambio termico solo con l'ambiente esterno, sede di una reazione di ossidazione completa (mediante operazioni reversibili) dell'unità di massa del combustibile con aria comburente, i reagenti entrando nel sistema a temperatura e pressione ambiente ed i prodotti della combustione uscendo dal sistema ancora a temperatura e pressione ambiente, ed in equilibrio chimico con l'ambiente esterno.*

Ai fini pratici l'exergia del combustibile è quasi coincidente con il suo *p.c.i.*

Nella seguente tabella si ha il rapporto e/pci di alcuni combustibili.

Combustibile	e/pci
Monossido di Carbonio, CO	0,97
Idrogeno, H ₂	0.985
Metano, CH ₄	1.035
Etano, C ₂ H ₆	1.046
Etilene, C ₂ H ₄	1.028
Acetilene, C ₂ H ₂	1.007
Gas Naturale	1.04
Coke	1.05
Carbone	1.06
Torba	1.16
Oli combustibili	1.04

Tabella 1: Rapporto exergia-potere calorifico inferiore per alcuni combustibili

L'exergia totale di una massa m di combustibile può, in prima approssimazione, essere posta pari :

$$e_{\text{combustibile}} = m_{\text{combustibile}} \cdot pci \quad (39)$$

Il rendimento *exergetico* può essere posto nella forma:

$$\eta_{\text{exergetico}} = \frac{E \cdot FQ(E) + Q \cdot FQ(T)}{m_{\text{combustibile}} pci} = \eta_E + \eta_T FQ(T) \quad (40)$$

ove si è posto, come già osservato, $FQ(E)=1$. Si osservi che in questa espressione si suppone che l'exergia del vapore o dell'acqua calda sia riferita a quella ambiente (*che è nulla*).

Se ci si riferisce ad un circuito chiuso con acqua di ritorno a temperatura diversa da quella ambiente allora occorre valutare correttamente l'exergia del flusso di calore come differenza fra il flusso entrante e quello uscente dal sistema e cioè:

$$\eta_{\text{exergetico}} = \frac{E + m_{H_2O} [(h_{\text{entrante}} - h_{\text{uscente}}) - T_0 (s_{\text{uscente}} - s_{\text{entrante}})]}{m_{\text{combustibile}} pci} \quad (41)$$

Si vedrà nel prosieguo una applicazione di quanto sopra detto con lo studio del *Diagramma di Sankey* per le centrali a vapore.

4 I FLUIDI REALI

Il fluido *ideale* studiato nei paragrafi precedenti fornisce uno strumento di analisi termodinamica facile perché consente di scrivere come *equazioni* le relazioni matematiche sin qui viste. Nella realtà i fluidi reali si comportano diversamente dai *fluidi reali* per effetto dell'attrito interno. Gli atomi (o le molecole) hanno dimensioni piccole ma finite e non più nulle come si ipotizza per il fluido ideale. Per sapere di quanto i fluidi reali si discostano da quelli ideali si possono esaminare le curve di *Amagat* realizzate a metà dell'ottocento e che sono state alla base di tutti gli sviluppi della *Termodinamica*. Se si esaminano le isoterme per un fluido reale si osserva che esse hanno un andamento regolare al diminuire della temperatura fino a quando viene raggiunto un valore, detta *temperatura critica*, per il quale l'isoterma presenta un flesso a tangente verticale. I valori delle grandezze di stato in corrispondenza del flesso sono detti *critici* e quindi si ha una *pressione critica* ed un *volume critico* per ciascun gas reale. Il rapporto fra i valori di p, v, T e i corrispondenti P_c, v_c, T_c sono detti *valori ridotti* e sono utilizzati per tracciare le curve di *Amagat* in modo indipendente dal fluido, come rappresentato in Figura 18.

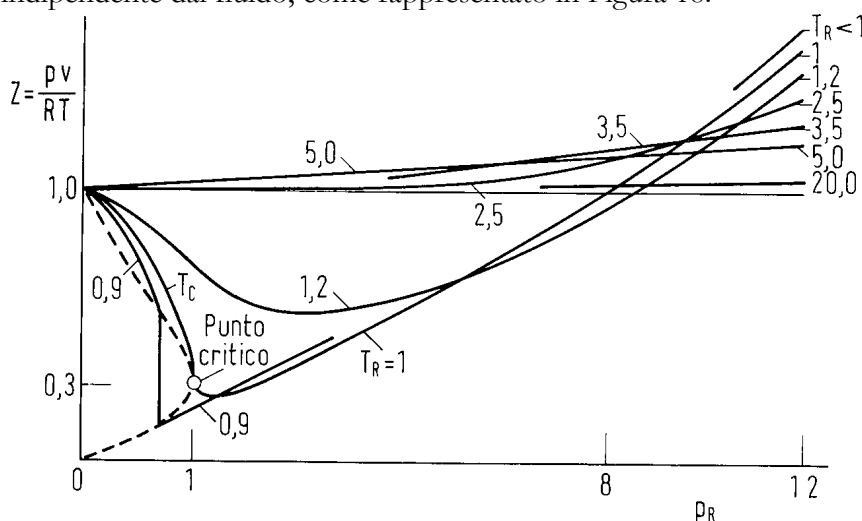


Figura 18: Curve di Amagat per i gas reali

In ordinate si ha il *fattore di comprimibilità* del gas ($z = \frac{pv}{RT}$) mentre in ascissa si ha la *pressione ridotta*.

Le curve sono parametrizzate in funzione della temperatura ridotta T/T_c . Si possono fare le seguenti osservazioni:

- Al tendere a zero della pressione ridotta ($p_r = p/p_c$) tutte le curve tendono ad 1 che è il valore del fattore di comprimibilità del gas ideale. Pertanto a *bassa pressione i gas reali si comportano spesso in modo assai vicino ai gas ideali* e quindi l'uso dell'equazione caratteristica $pv = RT$ può essere fatto con buona approssimazione;
- Si definisce *isoterma di Boyle* l'isoterma avente pendenza nulla per $p_r = 0$. Si può osservare dalla Figura 18 che questa si ha per $T_r = 2,5$. Al di sopra di questa isoterma si hanno fattori di comprimibilità sempre maggiori di 1;
- Per $p_r > 1$ si hanno ancora fattori di comprimibilità maggiori di 1 mentre per valori inferiori si hanno valori di $z < 1$. Oltre $p_r = 12$ si hanno valori di z ordinati, cioè tanto meno discosti dal valore $z = 1$ quanto più è alta la temperatura ridotta. Pertanto per valori di $p_r > 12$ il comportamento di un gas reale si avvicina a quello dei gas ideali quanto maggiore è la loro temperatura ridotta
- Nella zona ove $z < 1$ il gas reale ha volume specifico minore di quello ideale e ciò a causa delle attrazioni molecolari o comunque delle azioni interne al gas;
- Nella zona ove $z > 1$ predominano le forze di repulsione e quindi il volume specifico dei gas reali è maggiore di quello dei gas ideali.

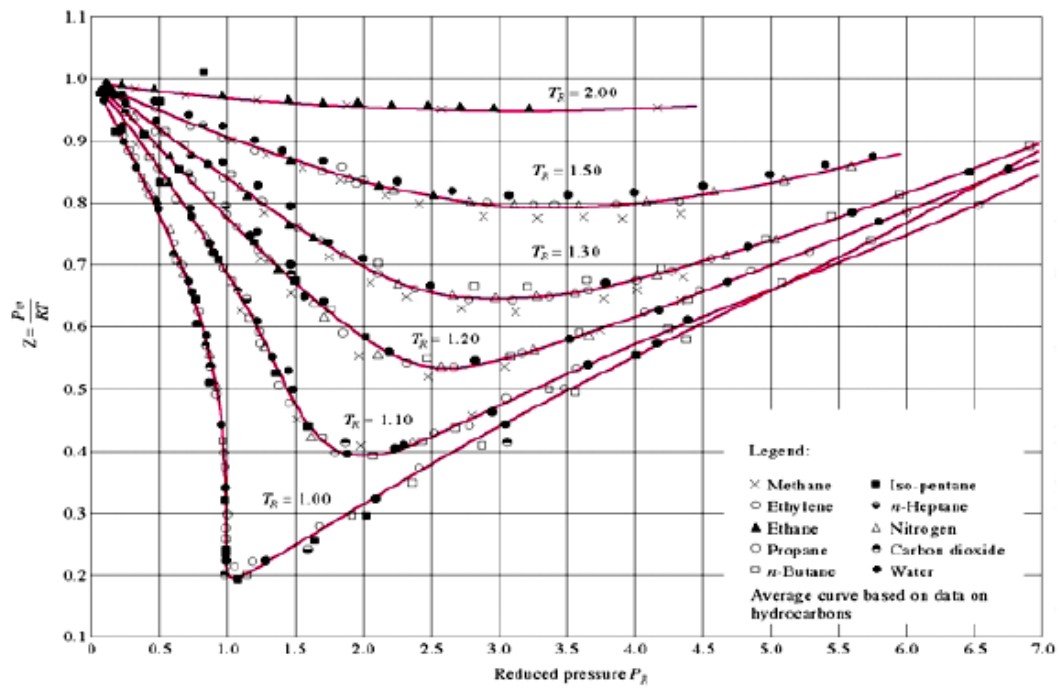


Figura 19: Curve di Amagat per alcuni gas reali

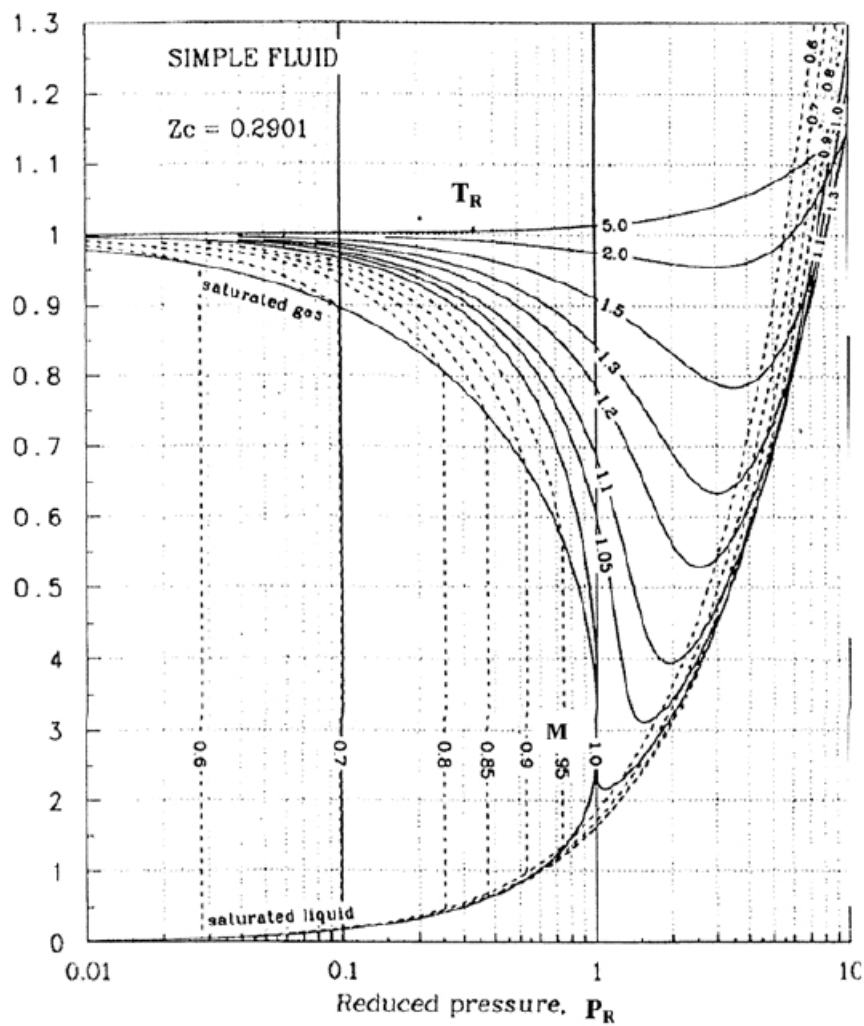


Figura 20: Curve di Amagat per valori delle grandezze ridotte

Per descrivere il comportamento esterno (*elasto-termometrico*) di un gas reale si può pensare di utilizzare un'equazione caratteristica così come si è fatto per gas ideale. Fin dall'inizio degli studi termodinamici ci si è sforzati di trovare un'equazione che potesse descrivere il gas reale su tutto il campo della sua esistenza.

Nella realtà questo sforzo contrasta con il comportamento dei fluidi reali. Essi, infatti, cambiano di fase e nessuna equazione di stato ne prevede il comportamento. I gas al di sotto della temperatura critica possono essere condensati per semplice compressione, come si vedrà nel capitolo dedicato ai vapori, e in vicinanza dei punti di cambiamento di stato nessuna equazione con pretese di validità generale risulta valida. Si indicheranno nel prosieguo alcune equazioni di stato più frequentemente utilizzate. Si osservi, però, che nella pratica si utilizzano equazioni di validità più ridotta, dette *equazioni a zone*, e capaci di descrivere il comportamento reale dei fluidi con una precisione maggiore. I manuali specializzati riportano queste equazioni a zone o i diagrammi di stato dei vari fluidi che sostituiscono in tutto le equazioni di stato.

Equazione di Van der Waals

Le particelle elementari esercitano una forza di attrazione reciproca o verso le particelle dei contenitori. In conseguenza di esse (*si trascurano in questa sede altre considerazioni fisiche, quali l'incremento dei gradi di libertà per oscillazioni sugli assi di collegamento per le molecole poliatomiche, per non complicare il quadro di riferimento*) il volume disponibile per il fluido non è più quello del recipiente ma occorre detrarre il *volume proprio* delle particelle elementari (detto anche *covolume*). Del resto anche se il volume proprio di ciascuna molecola è piccolo il prodotto di una quantità piccola per un numero molto grande quale è il numero di Avogadro ($N = 6.03 \cdot 10^{26}$) fornisce valori non più trascurabili.

Oltre al *covolume* occorre tenere presente che alla pressione del fluido va aggiunta anche la *pressione interna* derivante dall'attrazione molecolare fra le particelle. L'equazione di stato del gas ideale si modifica nella seguente, detta *equazione di Van der Waals*:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad [42]$$

La pressione interna $\frac{a}{v^2}$ (detta anche *pressione interna di Amagat*, è proporzionale sia al numero di particelle attrattive che attratte e ciascuno di questi è proporzionale alla densità, ovvero all'inverso del volume specifico.

Il coefficiente a dipende dal gas reale considerato ed è riportato nei manuali specializzati. Allo stesso modo il *covolume* b dipende dal tipo di gas. La determinazione delle costanti a e b oltre che di R (*costante del gas e non più costante universale*) viene solitamente effettuata osservando che l'isoterma critica presenta un flesso a tangente orizzontale nel punto critico (vedi Figura 21) e pertanto in questo punto si debbono annullare sia la derivata prima che la derivata seconda: Le condizioni matematiche sono quindi:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T=T_{critica}} = 0$$

e ancora:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{T=T_{critica}} = 0$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$a = \frac{27 \cdot R^2 T_{cr}}{64 p_{cr}} \quad ; \quad b = \frac{RT_c}{8 p_{cr}}$$

Note le proprietà termodinamiche del fluido in corrispondenza del punto critico si possono così determinare i valori delle costanti a e b . Si dimostra che è possibile anche scrivere una equazione universale di *Van der Waals* nella forma:

$$\left(p + \frac{3}{v_R^2}\right)(3v_R - 1) = 8T_R$$

ove con v_R , t_R , p_R si intendono i valori ridotti delle tre grandezze ossia i rapporti di p , v , T con i rispettivi valori critici v_C , p_C , T_C .

La rappresentazione dell'equazione di *Van der Waals* è riportata in Figura 21 per un campo di esistenza in vicinanza del punto critico.

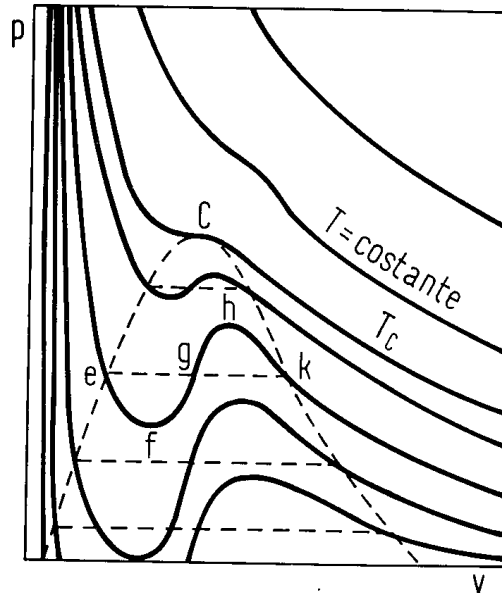


Figura 21: Isotherme di *Van der Waals*

La generica isoterma al di sotto dell'isoterma critica presenta un andamento oscillante (tratto *efghk*) che non ha riscontro con il comportamento reale dei fluidi. Essi, infatti, presentano lungo il segmento *ek* un cambiamento di stato ebollizione da *e* verso *k* e condensazione da *k* verso *e*). Il fluido di *Van der Waals*, pertanto, non cambia di stato ma presenta solamente delle oscillazioni di pressione e volume che non possono essere accettate termodinamicamente.

Infatti, mentre possiamo ancora riprodurre sperimentalmente i tratti *metastabili ef* (fluido *sottoraffreddato*) ed *hk* (fluido *sovrassaturo*), il tratto *fgh* non risulta in alcun modo possibile ed anzi si dimostra che *non può esistere*. Quanto detto dimostra l'impossibilità di considerare in modo affidabile la [42] come *equazione di stato*. Essa può essere utilizzata in modo concreto solo per zone di esistenza lontane dal punto critico. Pertanto l'equazione [42] viene utilizzata solo nella zona di esistenza dei gas e non dei liquidi o dei vapori. Esistono altre equazioni per i fluidi reali. Vale la pena osservare che l'utilizzo della [42] per il calcolo delle grandezze di scambio (*lavoro e calore*) nelle trasformazioni reali porta ad avere complicazioni solo di tipo matematico. Il lavoro termodinamico, ad esempio, è sempre dato da $L = \int_1^2 p dv$ ma adesso esplicitare $p(v)$ con l'equazione di *Van der Waals* per la trasformazione termodinamica desiderata è più complesso.

Equazione di Beattie - Bridgeman

Più recentemente (1928) è stata proposta da *Beattie - Bridgeman* una equazione per i fluidi reali con ben cinque costanti sperimentali:

$$p = \frac{R^*T}{\bar{v}^2} \left(1 - \frac{c}{\bar{v}T^3} \right) (\bar{v} - B) - \frac{A}{\bar{v}^2} \quad [43]$$

con R^* costante universale dei gas ($R^* = 8.314 \text{ kPa}/(\text{kmol.K})$). I valori di queste costanti sperimentali sono riportate nei manuali specializzati.

L'equazione [43] può essere utilizzata per fluidi reali non vicini al valore critico e quindi con densità inferiore all'80% di quella corrispondente al punto critico.

Equazione di Benedict – Webb - Rubin

Nel 1940 è stata proposta una nuova equazione con ben otto costanti sperimentali detta equazione di *Benedict – Webb - Rubin*:

$$p = \frac{R^*T}{\bar{v}} + \left(B_0 R^*T - A_0 - \frac{C_0}{T^2} \right) \frac{1}{\bar{v}^2} + \frac{bR^*T - a}{\bar{v}^3} + \frac{a\alpha}{\bar{v}^6} + \frac{c}{\bar{v}^3 T^2} \left(1 + \frac{\gamma}{\bar{v}^2} \right) e^{-\gamma/\bar{v}^2}$$

Quest'equazione può validamente essere utilizzata per fluidi reali con densità fino a 2.5 volte quella del punto critico ($\rho_c = 1/\bar{v}$).

I valori delle costanti sono riportati in letteratura nei manuali specializzati.

Equazione del Viriale

L'equazione del viriale è la seguente:

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{a(T)}{v^2} + \frac{b(T)}{v^3} + \frac{c(T)}{v^4} + \dots [44]$$

ove i coefficienti $a(T)$, $b(T)$, $c(T)$,

Sono funzioni della sola temperatura e sono detti *coefficienti del viriale*. Essi sono determinati sperimentalmente o mediante calcoli teorici basati sulla meccanica statistica. Al tendere a zero della pressione i coefficienti del viriale si annullano e la [44] si riduce all'equazione di stato dei gas ideali. La precisione della [44] dipende dal numero di coefficienti determinati.

Equazione di Dietirici

L'equazione è nella forma:

$$p = \frac{RT}{v-b} e^{-\frac{a}{RTv}}$$

con a e b variabili per i fluidi. In forma ridotta questa equazione diviene:

$$p_R = \frac{RT_R}{v_R - \frac{1}{e^2}} e^{-\frac{4}{T_R v_R e^2}}$$

con:

$$v_R = \frac{3}{8} \frac{RT_c}{p_c}$$

4.1 ESPERIENZA DI JOULE - THOMPSON

Si consideri il caso di due serbatoi contenenti un fluido (gas o liquido) e mantenuti a due pressioni diverse, p_1 e p_2 , come indicato in Figura 22.

I serbatoi e il condotto che li unisce siano coibentati in modo tale da non fare scambiare con l'esterno né lavoro né calore.

Si supponga che la sezione del condotto sia costante (e quindi anche la velocità del fluido si mantiene costante, essendo $m' = \rho w S$ ove ρ è la densità del fluido, w la velocità e S la sezione di passaggio) e che anche la quota del condotto sia costante ($z_2 = z_1$). Per effetto della differenza di pressione fra i due serbatoi il fluido passa verso il serbatoio a pressione inferiore.

Supponendo che il sistema non scambi calore o lavoro con l'esterno, indicato il sistema termodinamico e i punti di ingresso e di uscita, applicando l'equazione [7] si ha:

$$h_2 - h_1 = 0 \quad [45]$$

ovvero che l'entalpia iniziale e finale sono eguali. Si è supposto che le velocità e le quote siano eguali prima e dopo il setto poroso. Questo risultato è di grande importanza tecnica in quanto consente di calcolare le condizioni del punto 2 note che siano quelle del punto 1.

Se al posto di un setto poroso si utilizza un condotto con una strozzatura (presenza di una valvola semichiusa o un restringimento di sezione) si ha un fenomeno noto con il nome di **laminazione** che viene molto utilizzato nell'impiantistica tecnica, negli impianti frigoriferi,... Lo studio dell'effetto *Joule-Thompson* è più complesso di quanto sopra esposto.

Se si effettuano una serie di espansioni (passaggi da pressione maggiore a pressione minore) partendo con gas ad una data temperatura³ si ha l'andamento di una curva punteggiata⁴, come rappresentato in Figura 23.

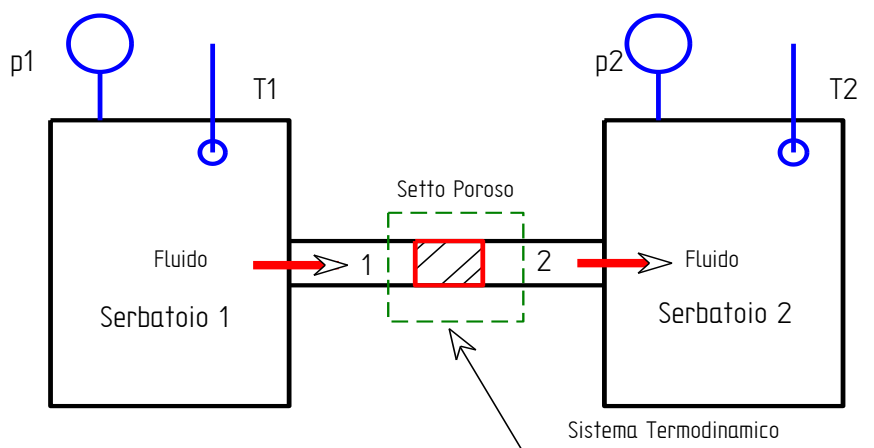


Figura 22: Esperienza di Joule - Thompson

Ripetendo lo stesso esperimento per varie entalpie iniziali (e quindi per varie temperature iniziali) si ha una famiglia di punteggiate che in figura sono state raccordate con linee per meglio coglierne la tendenza.

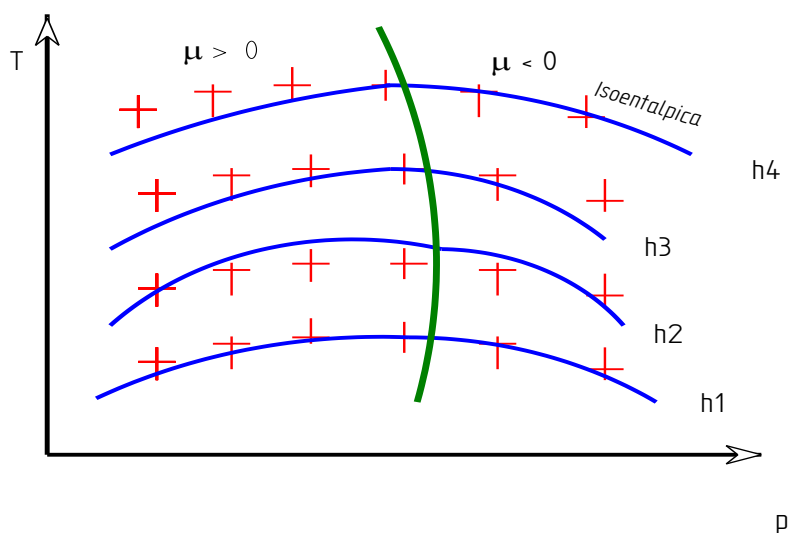


Figura 23: Andamento delle curve isoentalpiche

³ Se c_p è costante e si assume il comportamento del gas prossimo a quello ideale allora l'isoterma ha lo stesso andamento dell'isoentalpica.

⁴ Si tratta di trasformazioni *irreversibili* per definizione e quindi non rappresentabili con linee continue che, invece, indicano trasformazioni reversibili.

Congiungendo i valori di massimo di ogni curva si ha una linea trasversale che divide il piano in due zone: nella prima, a sinistra, un decremento di pressione comporta un decremento di temperatura e quindi il rapporto $\mu = \Delta T / \Delta p$ è positivo (differenze di eguale segno), nella seconda, a destra della curva, ad un decremento di pressione corrisponde un incremento di temperatura e pertanto $\mu = \Delta T / \Delta p$ risulta < 0 (differenze di segno discorde).

Poiché ogni differenza è calcolata su una curva isoentalpica, si definisce *Coefficiente di Joule-Thompson* il rapporto:

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_h \quad [46]$$

E pertanto tale coefficiente può assumere valori positivi (a sinistra della curva), nulli (in corrispondenza della curva) e negativi (a destra della curva). La curva di separazione delle due zone è detta *curva limite*. Un gas reale, quindi, può avere comportamenti diversi a seconda della zona in cui l'espansione avviene. L'essere $\mu=0$ porta ad avere $\Delta T=0$ e quindi ad apparire esternamente (ma non lo è nella realtà) un gas *ideale*.

Utilizzando l'espressione dell'entalpia si dimostra che il *coefficiente di Joule-Thompson* è dato dalla seguente relazione⁵:

$$\mu = \frac{T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v}{c_p} = v \frac{\beta T - 1}{c_p} \quad [47]$$

avendo indicato con:

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

il *coefficiente di dilatazione cubica* (o anche isobaro) ed è caratteristico di ogni corpo. I gas ideali hanno $\beta = 1/T$ e quindi $\mu=0$. I gas reali hanno α che può assumere valori maggiori o minori di $1/T$ e pertanto possono avere coefficiente μ positivo o negativo.

I liquidi hanno β molto piccolo e in ogni caso inferiore a quello dei gas: ne consegue che i liquidi hanno sempre $\mu < 0$ e pertanto una espansione (laminazione nella pratica) isoentalpica porta ad avere un riscaldamento. Questo fenomeno viene molto utilizzato nelle applicazioni tecniche, ad esempio nell'industria frigorifera, nell'impiantistica, ...

Con riferimento al gas di *Van der Waals* [42] si può calcolare il coefficiente di *Joule Thompson* applicando la [47]. Infatti esplicitando il volume specifico dalla [42] si ottiene:

$$v = \frac{RT}{p} \frac{1}{1 + \frac{a}{pv^2}} + b$$

Moltiplicando e dividendo il primo termine a secondo membro per $1 - \frac{a}{pv^2}$ si ottiene:

⁵ Si è dimostrato che vale la relazione $dh = c_p dT - \left(T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right) dp$. Ponendo $dh=0$, per avere $h=cost$, e risolvendo per $\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_h$ si ha la relazione cercata.

$$v = \frac{RT}{p} \frac{1 - \frac{a}{pv^2}}{1 - \frac{a^2}{p^2v^4}} + b$$

Poiché è lecito porre:

$$1 - \frac{a^2}{p^2v^4} \cong 1$$

si deduce che:

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{aRT}{p^2v^2} + b$$

Possiamo ancora porre, con buona approssimazione, $p^2v^2 = R^2T^2$ e quindi si ottiene:

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{a}{RT} + b$$

Applicando la [47] si ha:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p} + \frac{a}{RT^2}$$

e quindi:

$$\mu = \frac{1}{c_p} \left(\frac{2a}{RT} - b \right)$$

Il valore di μ è diverso da zero per i gas reali. Ad esempio per l'ossigeno è pari a $2.97 \cdot 10^{-6}$ per $T=300$ K.

5 MACCHINE TERMICHE

Vediamo brevemente, anche come applicazione immediata dei concetti appena visti sui vapori saturi, alcuni fondamenti di *macchine termiche* che risultano importanti per il prosieguo. Le ipotesi di base che qui sono considerate sono: **trasformazioni reversibili, comportamento ideale dei fluidi**. I cicli così ottenuti si chiamano *cicli ideali* o *cicli limiti*.

I *cicli reali* sono sempre composti da trasformazioni *irreversibili* e per la **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** comportano perdite per irreversibilità che debbono essere esplicitate di volta in volta.

Inoltre, sempre per la stessa **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, la loro rappresentazione grafica non può più essere fatta con linee ideali e *il calcolo delle aree non corrisponde più al calore scambiato o al lavoro netto ottenuto* poiché così facendo non si tiene conto delle irreversibilità.

I cicli studiati limiti⁶ nell'ambito del corso di *Termodinamica Applicata* sono di riferimento per i cicli reali (affrontati di solito nel corso di *Macchine*). Pertanto gli aspetti che qui si desidera evidenziare sono solo termodinamici e non impiantistici e costruttivi.

5.1 RENDIMENTI IDEALI E REALI

Prima di procedere nell'esame di alcuni cicli termodinamici è opportuno fare alcune definizioni.

Definiamo L_i^+ il lavoro ideale positivo compiuto in una trasformazione e, analogamente con L_i^- il lavoro ideale negativo. Il *lavoro netto* è dato dalla somma algebrica:

$$L_{n,i} = L_i^+ + L_i^-$$

Indichiamo con Q_i^+ il calore ricevuto da una sorgente esterne dalla macchina (*calore positivo di ciclo*) e con Q_i^- quello negativo di ciclo (*cioè ceduto ad una sorgente esterna*). Il rendimento termodinamico ideale vale:

$$\eta_{t,i} = \frac{L_{n,i}}{Q_i^+} \quad [48]$$

Definiamo adesso le analoghe grandezze per trasformazioni reali per cui si ha che il lavoro positivo reale è L_r^+ ed è dato da:

$$L_r^+ = \eta L_i^+$$

Il lavoro negativo reale vale:

$$L_r^- = \frac{L_i^-}{\eta}$$

Il lavoro netto reale è dato dalla somma algebrica dei lavori reali positivi e negativi e pertanto:

$$L_{n,r} = L_r^+ + L_r^- = \eta L_i^+ + \frac{L_i^-}{\eta} \quad [49]$$

ove, si osservi, non è necessario avere lo stesso rendimento adiabatico di trasformazione per il lavoro positivo e per il lavoro negativo.

Il rendimento termodinamico reale, a pari calore positivo fornito alla macchina, è dato dalla relazione:

⁶ Supporremo che le trasformazioni siano, nella quasi totalità dei casi, internamente reversibili e che quindi si possano applicare ad esse le considerazioni già viste per le trasformazioni ideali. In qualche caso si introdurranno le trasformazioni reali delle quali si terrà conto mediante i rendimenti isoentropici. I cicli formati da trasformazioni interamente reversibili sono detti *cicli limite* o anche *cicli ideali*. La loro importanza è fondamentale sia dal punto di vista concettuale che applicativo.

$$\eta_{t,r} = \frac{L_{n,r}}{Q_i^+} = \frac{L_r^+ + L_r^-}{Q_i^+} = \frac{\eta L_i^+ + \frac{L_i^-}{\eta}}{Q_i^+} \quad [50]$$

5.1.1 RAPPORTO DEI LAVORI

Definiamo adesso **rapporto dei lavori** il rapporto fra il lavoro netto ideale ed il lavoro positivo ideale di ciclo:

$$RL = \frac{L_{n,i}}{L_i^+} = \frac{L_i^+ + L_i^-}{L_i^+} \quad [51]$$

Possiamo ora calcolare il rapporto fra rendimento termodinamico reale e rendimento termodinamico ideale in funzione di RL:

$$\frac{\eta_{t,r}}{\eta_{t,i}} = \frac{\eta L_i^+ + \frac{L_i^-}{\eta}}{L_i^+ + L_i^-} = \frac{\eta + \frac{1}{\eta}(RL-1)}{RL} \quad [52]$$

Questo rapporto ci dice di *quanto il ciclo reale si allontana da ciclo ideale* e poiché questa divergenza è data dalle irreversibilità proprie dei cicli reali questo rapporto è anche indice della dipendenza del ciclo reale dalle irreversibilità stesse.

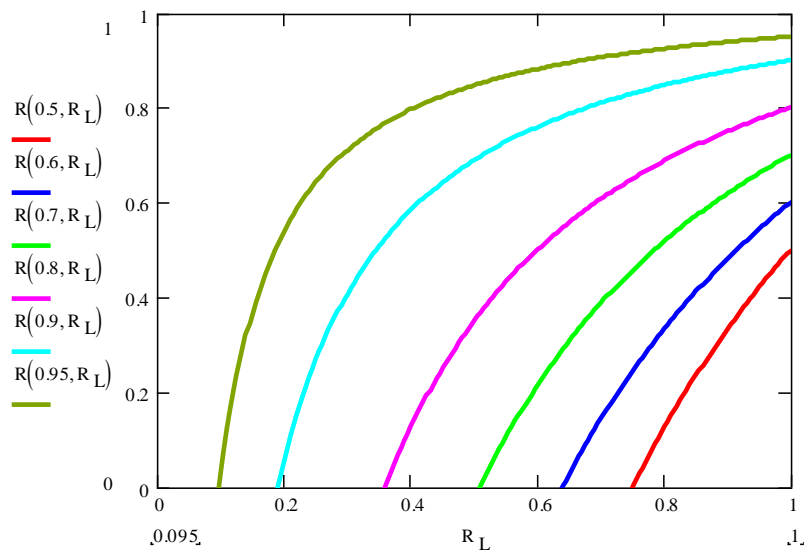


Figura 24: Rapporto dei rendimenti in funzione del Rapporto Lavori

In Figura 24 si ha l'andamento del rapporto dei rendimenti in funzione del rapporto dei lavori, RL, e del rendimento di trasformazione η . Si osservi come per RL elevato ($RL > 0.9$) il rapporto $\eta_{t,r}/\eta_{t,i}$ sia poco discosto dal valore dello stesso η . Per $\eta > 0.95$ si ha un rapporto > 0.95 e quindi poco sensibile alle irreversibilità.

Per contro, per RL bassi, ad esempio $RL = 0.5$, allora anche con $\eta = 0.95$ si ha un rapporto dei rendimenti pari a 0.85 e quindi le irreversibilità hanno peso. Per $\eta = 0.8$, valore ricorrente nelle trasformazioni reali, si ha che il rapporto vale 0.8 per $RL = 1$ mentre vale 0.4 per $RL = 0.5$.

Vedremo più avanti che il ciclo a vapore (cicli *Rankine* e *Hirn*) ha $RL > 0.92$ mentre il ciclo a gas (*Joule-Bryton*) ha RL variabile fra 0.4 e 0.6 e pertanto il primo ciclo è meno sensibile alle irreversibilità del secondo.

Ciò significa che, in alcuni casi, può essere preferibile un ciclo con minor rendimento termodinamico ma con alto RL rispetto ad un altro con rendimento termodinamico più elevato ma basso RL.

5.2 LA MACCHINA A VAPORE (CICLO RANKINE)

La macchina a vapore utilizza il vapore come fluido di lavoro poiché esso gode della caratteristica di operare trasformazioni isoterme ed isobariche all'interno della curva di *Andrews*, come indicato in Figura 25.

Si osservi, infatti, che per una generica isobara all'interno della curva si ha un andamento orizzontale (*coincidente con l'isoterma, anche se non di eguale valore, s'intende*). Questo è giustificato dalla varianza ridotta ad 1 quando il vapore è saturo⁷.

La caratteristica appena evidenziata risulta interessante per la realizzazione di un ciclo che si avvicini al ciclo ideale di *Carnot*. Si osservi, infatti, la Figura 26: in essa si ha all'interno della curva di *Andrews* un ciclo di *Carnot* a tratto intero. Non vi è dubbio che le trasformazioni BC di vaporizzazione e DA di condensazione sono contemporaneamente isoterme ed isobare. Nella realtà si ha sempre un perdita di pressione nel movimento del vapore saturo nelle tubazioni della caldaia ma si può per il momento pensare che queste perdite siano piccole e trascurabili.

Le trasformazioni CD e AB sono isoentropiche ma non realizzabili nella realtà. L'espansione CD può essere politropica e quindi con una perdita di lavoro utile a causa della non isoentropicità. La trasformazione AB rappresenta una compressione di un vapore saturo (in A) che viene compresso fino al punto B in cui è liquido saturo secco.

Una tale trasformazione non è in alcun modo realizzabile nella pratica, neanche con produzione di irreversibilità, a causa della grande variazione del volume specifico del fluido (*grande quando c'è vapore e piccolo quando c'è liquido*) e del pericolo di impuntamento del pistone di compressione. Pertanto la trasformazione AB viene sostituita, per il momento con riferimento al ciclo ideale reversibile, con la trasformazione di piena condensazione DA' e poi segue una compressione in fase liquida (*mediante una normale pompa*) da A' alla pressione in caldaia, punto A". Dal punto A" occorre ora riscaldare l'acqua fino al punto B di inizio vaporizzazione per poi proseguire con le fasi normali del ciclo di Carnot.

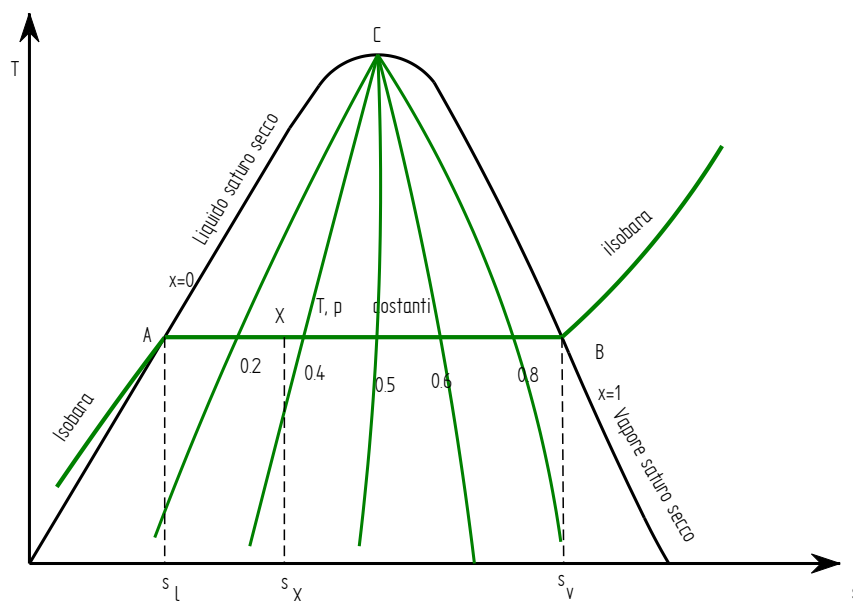


Figura 25: Curva di Andrews per il vapore d'acqua

Purtroppo la fase di riscaldamento A"B è **esternamente irreversibile** nel senso che in questa trasformazione si fornisce calore alla macchina ma a temperatura variabile e pertanto si ha una **irreversibilità termodinamica** che porta ad avere un ciclo ideale (cioè internamente reversibile) ma con un rendimento inferiore rispetto al ciclo di *Carnot*. Il ciclo di *Carnot* così modificato è il ciclo *Rankine* che è il ciclo noto fin dalla fine del settecento come ciclo delle macchine a vapore.

⁷ Si ricordi che un vapore si dice *saturo* quando è in presenza del proprio liquido.

Le prime macchine a vapore furono costruite in Gran Bretagna per azionare i montacarichi nelle miniere del Galles. Esse avevano rendimenti bassissimi (2-4%) ma segnarono l'inizio della cosiddetta *era industriale*. Pian piano vennero perfezionate e divennero sempre più affidabili e potenti tanto da potere essere utilizzate anche per le locomotive a vapore e per i motori marini dei piroscafi.

Le macchine a vapore del secolo scorso (*ma che sono utilizzate anche oggi in alcune applicazioni*) utilizzavano quale organo motore il *cassonetto con stantuffo*. L'esempio tipico è quello delle locomotive a vapore o dei motori marini vecchio tipo. Oggi tali organi motori sono stati soppiantati quasi del tutto dalle turbine a vapore.

5.2.1 IL CICLO TERMODINAMICO IDEALE

Il ciclo di *Rankine* o delle **macchine a vapore** è rappresentato in Figura 28 nel piano (T,s). Il calore viene ceduto in caldaia all'acqua che vaporizza (trasformazione ABC) e poi si invia il vapore in una turbina dove viene fatto espandere (trasformazione CD).

In uscita dalla turbina il vapore viene condensato (*cioè passa dallo stato di vapore a quello di liquido*) nel condensatore (trasformazione DA') e da questo mediante una pompa (*non è rappresentata in figura la corrispondente trasformazione perché troppo piccola alla scala considerata*) viene rimandato in caldaia e si ripete il ciclo.

Il rendimento termodinamico dipende dalle quantità di calore cedute nella vaporizzazione in caldaia e nella condensazione nel condensatore secondo la relazione

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad [53]$$

Ricordando che per trasformazioni isobare si può calcolare il calore scambiato mediante differenza di entalpia così come per trasformazioni adiabatiche il lavoro è ancora dato dalla differenza di entalpia, si può ancora scrivere:

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{h_c - h_D}{h_c - h_{A''}} \quad [54]$$

Questo ciclo è utilizzato in tutte le centrali termiche per ottenere potenze elevate. Esso è utilizzato nelle centrali *termoelettriche* (*non nella versione di base ora vista ma con ulteriori miglioramenti impiantistici*) e negli impianti industriali.

Il ciclo *Rankine* produce, negli impianti di grande potenza (*oggi si hanno centrali da >1 GW*), inquinamento termico nel senso che il condensatore si scarica nell'ambiente enormi quantità di calore a bassa temperatura che può, qualora non adeguatamente controllato, provocare mutazioni nell'equilibrio ecologico dell'ambiente circostante. In genere si limitano a due o tre i surriscaldamenti per problemi in caldaia.

In Figura 28 si ha la rappresentazione del ciclo *Rankine* normale sul piano entropico (T,s). Il tratto *AE* corrisponde alla compressione operata dalla pompa: esso è solitamente così piccolo da non essere rappresentato e pertanto il punto A coincide con E. Il tratto *CE* corrisponde all'espansione in turbina ed è supposta isoentropica (*ideale*).

La trasformazione più vicina all'espansione reale è una politropica con indice $n=1,3 \div 1,4$. In ogni caso sia la compressione della pompa che l'espansione in turbina sono ad entropia crescente.

In Figura 29 si ha il confronto (*supponendo trasformazioni internamente reversibili!*) fra il ciclo *Rankine* ed il ciclo di *Carnot*. L'area tratteggiata indica la perdita ideale⁸ rispetto al ciclo di *Carnot* a pari temperature estreme. La stessa figura spiega anche perché è importante utilizzare i vapori saturi per le macchine termiche.

Si osserva, infatti, che la trasformazione BC è di vaporizzazione (da A verso B) e pertanto, per quanto detto per i cambiamenti di stato, la temperatura è costante.

⁸ Si ricordi che le trasformazioni reali sono sempre irreversibili e che le aree nel piano di Gibbs non sono pari ai lavori reali poiché sono incluse anche le perdite per irreversibilità che il diagramma entropico non visualizza.

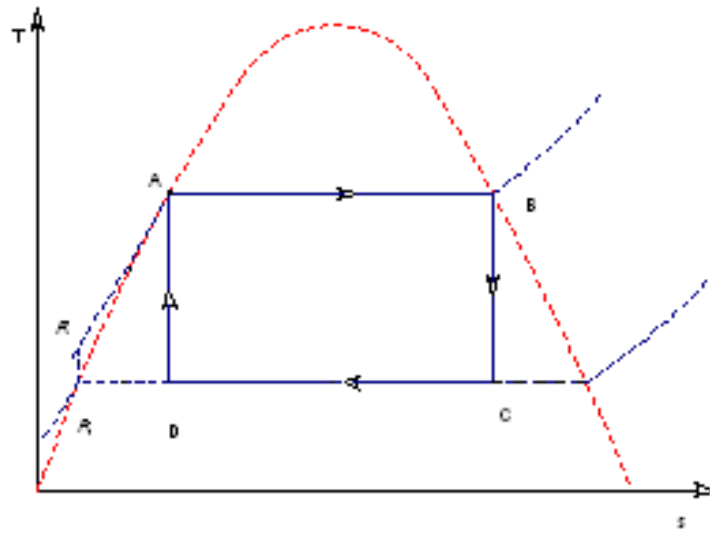


Figura 26: Ciclo di Carnot con vapore saturo

Analogo discorso, anche se parziale, può essere fatto per la trasformazione DE di parziale condensazione.

Quindi l'utilizzo di trasformazioni all'interno della curva di *Andrews* consente di avere scambi termici a temperature costanti e quindi, almeno idealmente, di essere confrontabili con le analoghe trasformazioni del ciclo di *Carnot*.

Si può ancora osservare dalla Figura 29 che la fase AB di preriscaldamento del liquido fino alle condizioni di saturazione (*corrispondenti al punto B*) non avviene a temperatura costante e pertanto la trasformazione, pur essendo *internamente reversibile*, è *esternamente irreversibile* con la conseguenza che il rendimento del ciclo *Rankine* è *ineluttabilmente inferiore* a quello del ciclo di *Carnot* corrispondente.

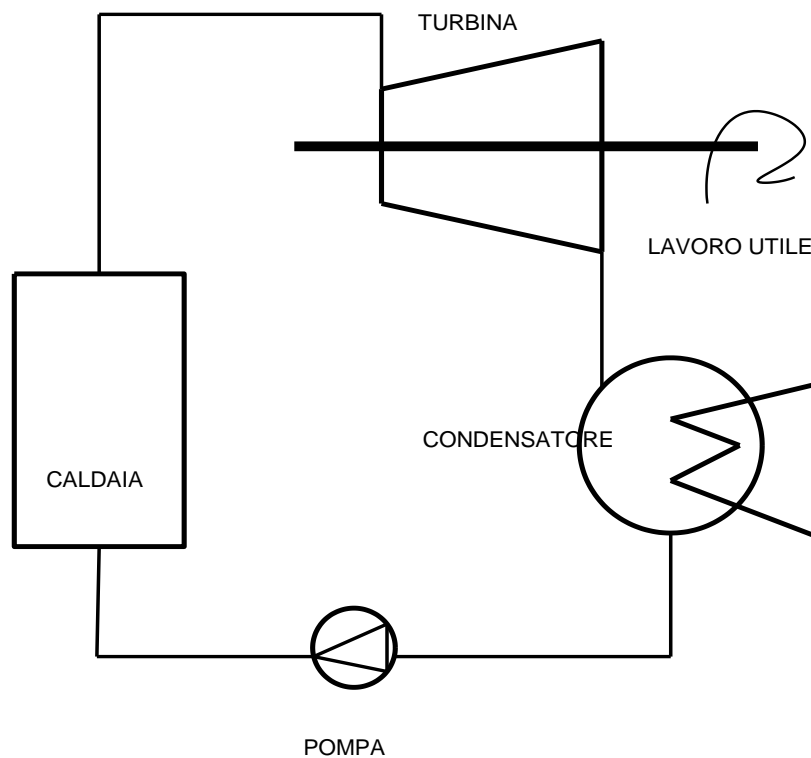


Figura 27: Ciclo delle macchine a vapore di Rankine

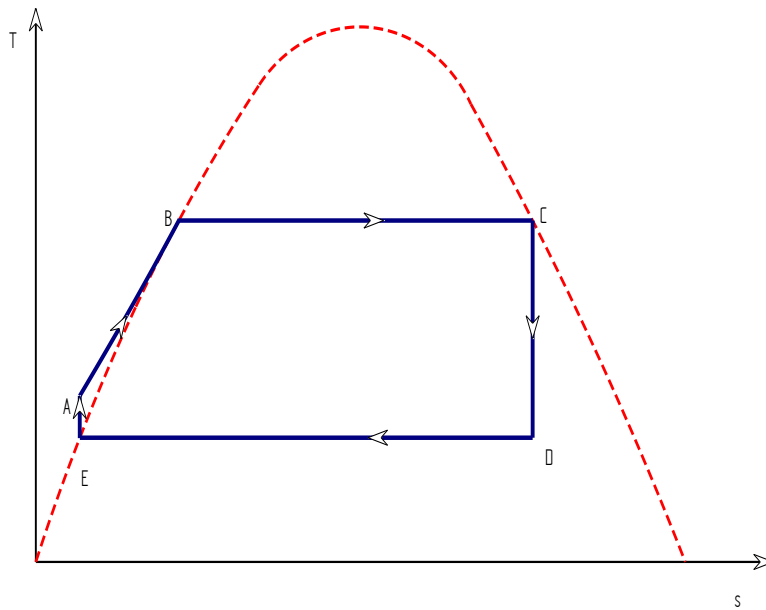


Figura 28: Ciclo Rankine nel piano (Ts)

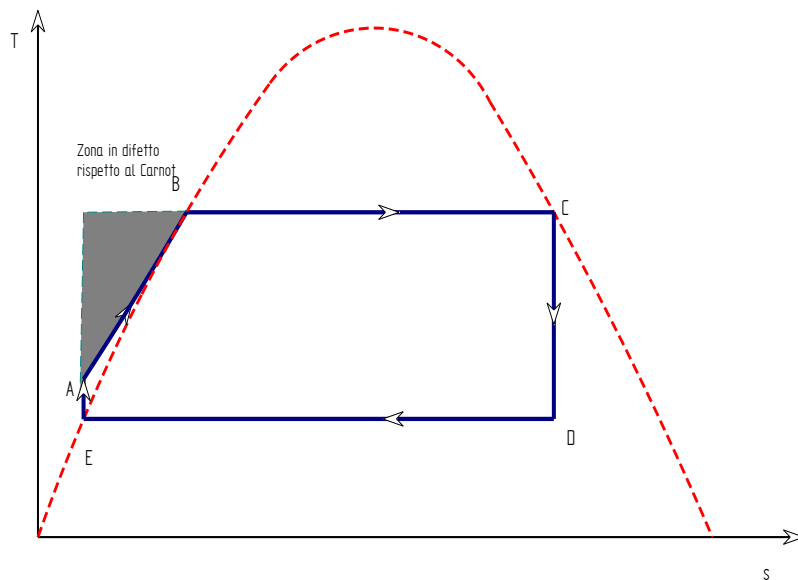


Figura 29: Confronto fra il ciclo Rankine e il ciclo di Carnot

Oggi si cerca di ovviare a queste conseguenze mediante la *rigenerazione termica* con la quale si riduce al massimo la fase *esternamente irreversibile* di preriscaldamento. Il ciclo che ne deriva è più complesso di quello sopra schematizzato, come si vedrà più avanti.

5.2.2 CONSUMO SPECIFICO DI VAPORE

Un parametro importante per l'impiantistica è il *Consumo Specifico di Vapore* definito come la *portata di vapore (fluido motore) necessaria per ottenere l'unità di potenza netta*. Esso è espresso in $[kg/kWh]$ ed è dato dalla relazione:

$$CSV = \frac{3600}{L_n} \quad [55]$$

ove L_n è il lavoro netto espresso in $[J/kg]$ ed ovviamente si ha: $1 kWh = 3600 kJ = 3.6 MJ$. Questo parametro è un indice importante delle dimensioni globali degli impianti e decresce quanto maggiore è il lavoro netto ottenuto dal ciclo reale.

5.2.3 COMPONENTI DELLE CENTRALI TERMICHE A VAPORE

Le trasformazioni indicate in Figura 28 sono realizzate mediante particolari dispositivi, schematizzati con simbolismo in Figura 27 a destra. Questi dispositivi sono fra loro collegati mediante tubazioni nelle quale scorre il vapore o l'acqua di condensa, a seconda delle trasformazioni.

La Caldaia

Le caldaie di potenza sono mastodontiche installazioni, vedi Figura 30, nelle quali si trasferisce la massima quantità di energia termica dalla fiamma, in basso nella sezione conica, all'acqua e al vapore che fluiscono lungo le pareti e nella zona laterale protetta, rispettivamente. La zona laterale (detta *naso*) è utilizzata per il surriscaldamento del vapore: essa riceve calore solo per convezione poiché l'irraggiamento termico della fiamma viene mascherato dalla struttura e in questo modo può limitare la temperatura massima del vapore.

Si ricordi, infatti, che il calore specifico del vapore è minore di quello dell'acqua e pertanto se si mantenesse lo stesso flusso termico di fiamma si avrebbe il rischio di bruciatura dei tubi. Queste caldaie sono assai ingombranti e pongono seri problemi anche dal punto di vista delle installazioni. Esse richiedono, infatti, strutture portanti di grandi dimensioni, solitamente in acciaio, e capaci di sopportare azioni deflagranti e sismiche.

Per impianti di modeste dimensioni si possono avere tipologie di caldaie più semplici a tubi d'acqua e a tubi di fumo. La fiamma proveniente dal bruciatore produce fumi che lambiscono i tubi all'interno dei quali scorre l'acqua che viene così riscaldata e/o vaporizzata.

Le caldaie *a tubi di fumo* (cioè con passaggio dei gas di combustione all'interno del fascio tubiero mentre l'acqua scorre all'esterno) hanno limiti di pressione e temperatura di 30 bar e 350 °C con una produzione di circa 2.8 kg/s (cioè 10 t/h). Le caldaie *a tubi d'acqua* possono produrre vapore in condizioni diverse. Nelle caldaie *a circolazione naturale* la circolazione avviene senza organi motori esterni. Nelle caldaie *a circolazione forzata* le pompe di alimentazione assicurano la circolazione attraverso l'intero generatore a vapore in modo da favorire lo scambio termico in condizioni di assoluta sicurezza.

I componenti di una caldaia sono, in genere:

- La *camera di combustione* in cui avviene la trasformazione dell'energia del combustibile in calore;
- Il *corpo cilindrico superiore* in cui la miscela acqua-vapore (funzione del titolo di uscita) si separa liberando in alto il vapore acqueo che prosegue il ciclo;
- Il *corpo cilindrico inferiore* che serve per distribuire l'acqua nel fascio tubiero;
- Il *fascio tubiero* costituito da tubi, investiti esternamente dai fumi caldi e percorsi internamente dall'acqua in riscaldamento e/o vaporizzazione;
- Il *surriscaldatore*, posto lateralmente alla caldaia (*naso*) costituito da una serpentina ove il vapore passa da saturo a surriscaldato;
- Il *desurriscaldatore* in cui il vapore viene raffreddato in caso di necessità;
- L'*economizzatore*, posto nella parte estrema della caldaia con la funzione di riscaldare l'acqua di alimento;
- Il *riscaldatore d'aria* che sfrutta il calore contenuto nei fumi all'entrata della caldaia;
- Le *pompe di circolazione*, presenti solo nelle caldaie a circolazione forzata o controllata;
- L'*impianto di pulizia della caldaia* per allontanare i depositi e/o le incrostazioni.

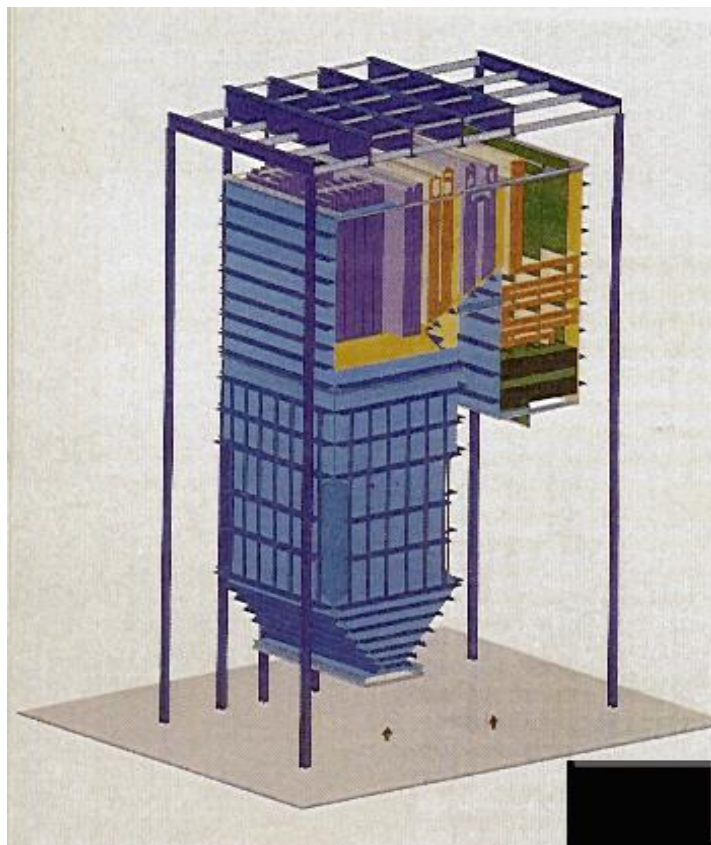


Figura 30: Layout di una caldaia di potenza per grandi centrali

La Turbina a vapore

L'organo che produce potenza attiva è la turbina a vapore il cui schema costruttivo è dato in Figura 31 nella quale sono visibili gli organi di distribuzione del vapore e gli anelli del rotore di diametro crescente verso l'uscita⁹. Nella Figura 32 si può osservare una turbina a vapore di potenza aperta in stabilimento. Sono ben visibili gli anelli di *pALETTE* e la sezione crescente verso il collettore di uscita (*coclea esterna*). Le dimensioni delle turbine a vapore sono crescenti man mano che la pressione di esercizio si abbassa rispetto a quella iniziale.

Pertanto le turbine ad *alta pressione* (*oltre 50 bar*) sono molto più piccole di quelle a bassa pressione (una decina di bar). Le turbine ad alta pressione sono spesso del tipo *contrapposto*, vedi Figura 33, per ridurre lo sforzo sui cuscinetti di supporto. In questo caso la distribuzione del vapore è centrale e il flusso viene poi suddiviso verso i due lati in modo da bilanciare la spinta laterale sui banchi di supporto. I parametri che caratterizzano una turbina a vapore sono i seguenti:

- condizioni del vapore all'ammissione e allo scarico;
- portata massica del vapore;
- rendimento adiabatico;
- potenza fornita.

Il rendimento adiabatico η_a dipende dal tipo di turbina e in particolare dalla taglia secondo la seguente tabella:

- per potenze sopra i 150 MW si ha $\eta_a = 0.82 \div 0.83$
- per potenze tra 5 e 50 MW si ha $\eta_a = 0.76 \div 0.82$
- per potenze fra 1 e 5 MW si ha $\eta_a = 0.70 \div 0.76$
- per potenze < 1 MW si ha $\eta_a < 0.72$

⁹ Si ricordi che il vapore espandendosi aumenta considerevolmente il suo volume specifico e pertanto la turbina deve consentire questo incremento volumetrico mediante l'incremento della sezione di passaggio del vapore.

Quando la turbina a vapore è accoppiata ad un alternatore occorre tenere conto, ai fini del calcolo della potenza elettrica prodotta, del rendimento di quest'ultimo variabile, secondo la taglia, nell'intervallo $0.96 \div 0.99$.

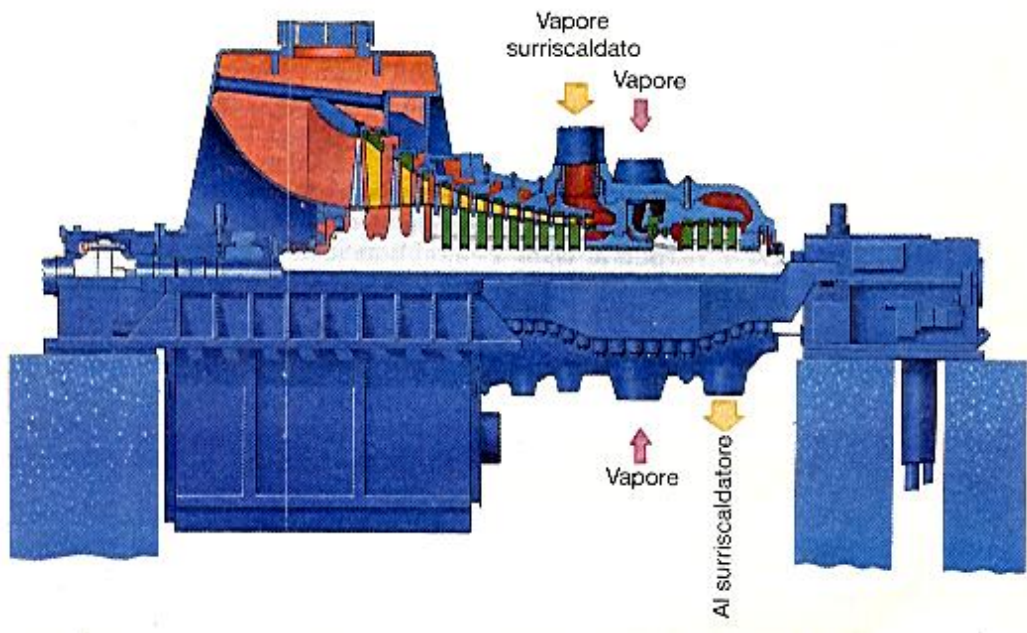


Figura 31: Schema di una turbina a vapore

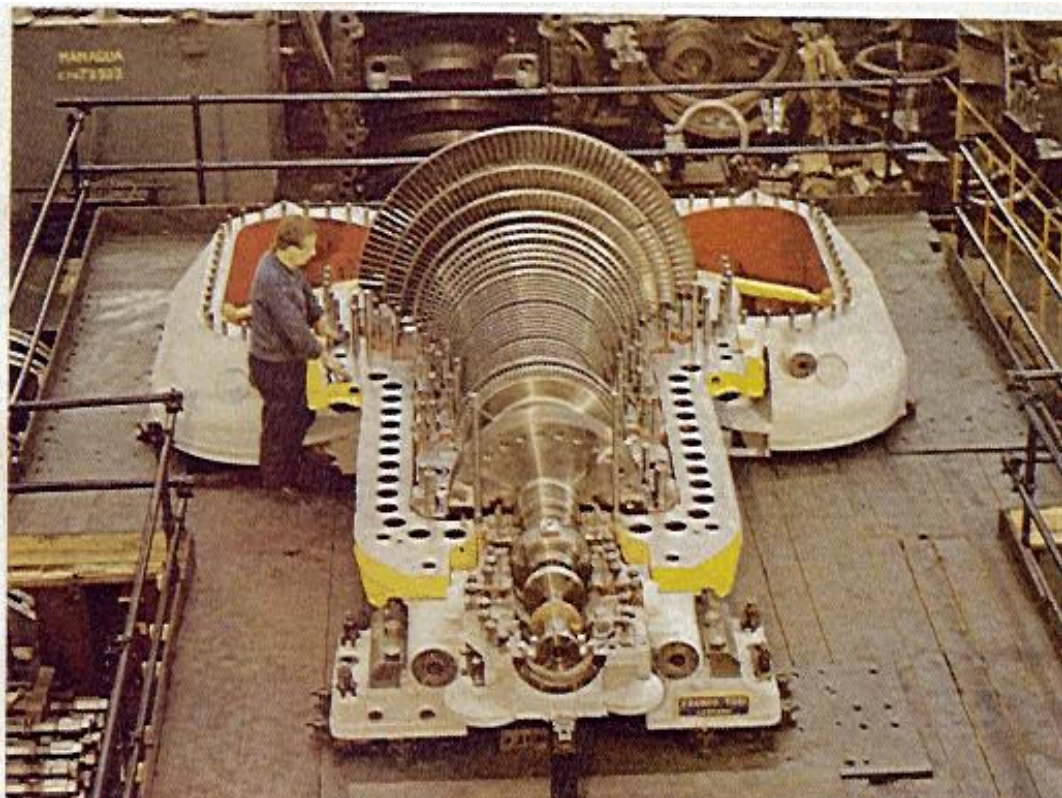


Figura 32: Turbina a vapore aperta

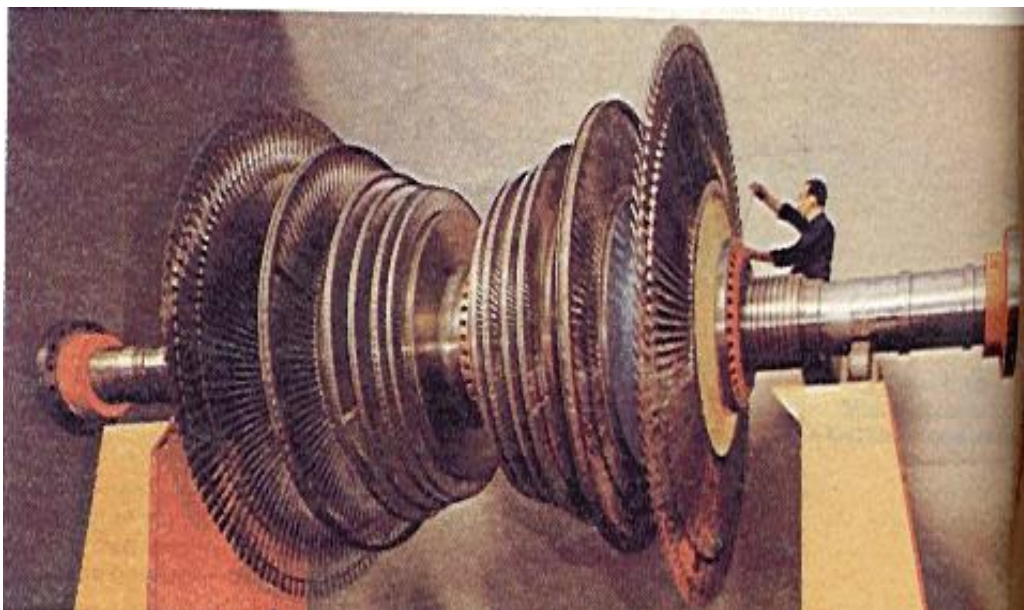


Figura 33: Turbina a vapore ad anelli contrapposti

Condensatore

Il condensatore è l'organo di maggiori dimensioni di tutto l'impianto. Esso è costituito da grandi banchi di tubi di rame nei quali si fa passare acqua fredda all'interno e vapore in uscita dalla turbina all'esterno. La condensazione avviene ad una temperatura di 32-40 °C e ad una pressione di 0,035-0,045 bar. Si utilizza, di norma, l'acqua di mare o l'acqua di fiumi di grandi portate (ad esempio il Po) per evitare l'*inquinamento termico* cioè l'innalzamento sensibile della temperatura dell'acqua e ciò per evitare conseguenze biologiche nella flora e nella fauna marina. La pressione di esercizio (0,02÷0,04 bar) dei condensatori viene inizialmente creata mediante pompe per vuoto e poi, una volta avviato il ciclo a vapore, mantenuta automaticamente (*termodinamicamente*) per effetto dell'equilibrio fra pressione e temperatura nei vapori saturi.

Pompe di alimentazione in caldaia

L'acqua uscente dal condensatore a bassa pressione (circa 0,04 bar) viene poi portata alla pressione di alimentazione in caldaia (circa 70 bar) mediante opportune pompe di alimentazione le cui dimensioni sono piccole rispetto a quelle degli altri organi sopra descritti. La potenza assorbita dalle pompe di alimentazione è di 1÷2 % di quella prodotta dalle turbine.

5.2.4 CICLO HIRN

Per aumentare il lavoro netto e quindi anche il rendimento termodinamico di un ciclo *Rankine* si possono seguire solamente due vie: diminuire la pressione minima al condensatore o aumentare la pressione massima in caldaia. La prima possibilità, che pure offre grandi guadagni energetici a causa della svasatura positiva della curva di *Andrews* verso il basso, ha un limite nella minima temperatura di condensazione raggiungibile con acqua (*marina o di fiume o di lago*) o con aria esterna (*torri evaporative*). Pertanto non si può andare oltre 0.02 bar per le condizioni ambientali italiane.

La seconda possibilità trova un limite nella forma a campana della curva di *Andrews* e in particolare nel fatto che questa tende al punto critico, vedi Figura 25, e quindi il calore latente di vaporizzazione tende a zero. Ne segue che al crescere della pressione si riduce il calore positivo di ciclo con effetto negativo sul rendimento fino ad annullarne il lavoro netto.

Per contro il crescere della pressione massima produce anche lo spostamento verso titolo decrescente del punto di uscita del vapore dalla turbina a fine fase di espansione, vedi Figura 34, con la possibilità di danneggiare le palette delle turbine. Di solito si impone che il titolo di vapore in uscita sia non inferiore a 0.85. L'evoluzione naturale del ciclo *Rankine* è allora il ciclo **Hirn** nel quale il vapore in uscita dalla caldaia non è in condizioni saturo secco bensì surriscaldato, vedi Figura 35.

La pressione massima può, quindi, ancora essere limitata ai valori compatibili con il valore finale del titolo di vapore in uscita dalla turbina ma a spese di un surriscaldamento che produce irreversibilità poiché si tratta di *cessione di calore a temperatura variabile*.

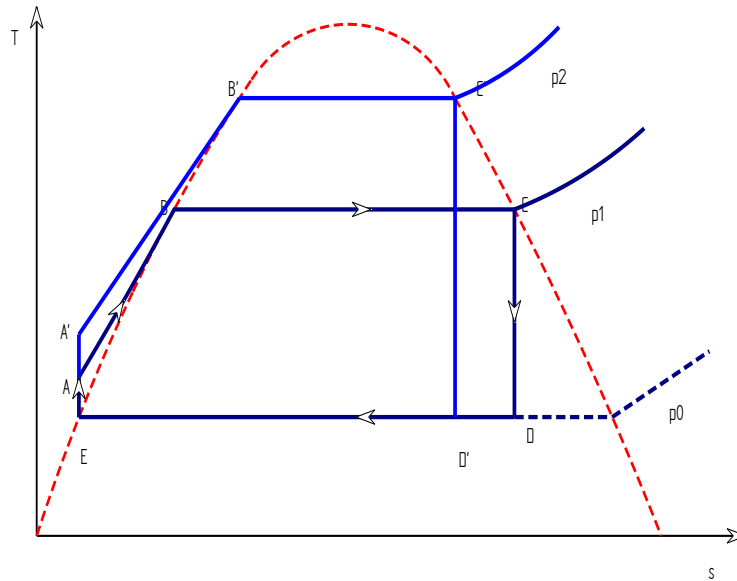


Figura 34: Spostamento del punto D verso sinistra al crescere della pressione in caldaia

Il rendimento di questo ciclo è ancora dato dalla [53] ma con calore Q_1 dato dalla differenza:

$$Q_1 = h_D - h_A \quad [56]$$

e pertanto il rendimento vale:

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{h_D - h_E}{h_D - h_A} \quad [57]$$

Rispetto al ciclo *Rankine* il surriscaldamento del vapore da C a D porta ad avere rendimenti più elevati anche se le perdite per irreversibilità rispetto al ciclo di *Carnot* corrispondente sono ancora maggiori.

In definitiva il rapporto dei rendimenti reale/ideale è maggiore per il ciclo *Rankine* (senza surriscaldamenti) che per il ciclo *Hirn* pur avendo rendimenti reali termodinamici del ciclo *Hirn* maggiore di quello di *Carnot* per effetto del maggior lavoro netto ottenibile. La temperatura massima oggi raggiungibile in D è di circa 570 °C per le centrali italiane (ENEL) e di 760 °C per le centrali tedesche.

Il motivo di questa diversità è da ricercare nel tipo di acciaio utilizzato per le costruzioni impiantistiche. In Italia si usano acciai meno pregiati ma più economici mentre in Germania si utilizzano acciai austenitici più costosi ma che consentono di lavorare a temperature più elevate con conseguente maggior rendimento rispetto alle centrali italiane.

Oggi con il combustibile ad alto costo è preferibile avere rendimenti più elevati che costi iniziali di installazione più ridotti. Per aumentare ulteriormente il rendimento del ciclo *Hirn* si può anche avere più di un surriscaldamento, come riportato in Figura 36. In genere si limitano a due o tre i surriscaldamenti per problemi di sicurezza in caldaia.

Avviene, infatti, che il surriscaldamento del vapore comporterebbe, a pari calore ceduto in caldaia, elevati surriscaldamenti per effetto del minor calore specifico rispetto a quello dell'acqua.

Pertanto si pongono le batterie di scambio termico per i surriscaldatori in una zona protetta della caldaia in modo da essere interessata solo dal calore di convezione (*cioè dei fumi*) e non da quello di radiazione (*della fiamma*).

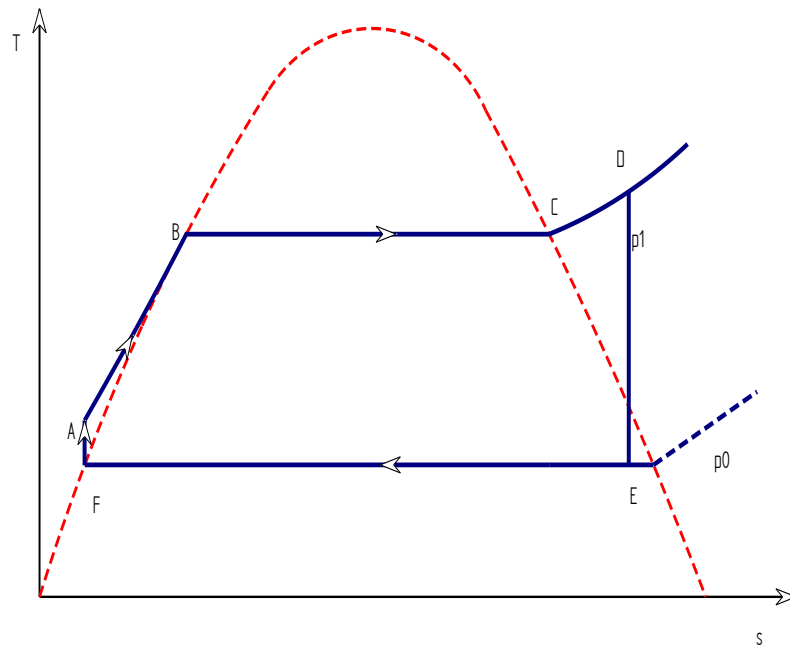


Figura 35: Ciclo Hirn nel piano (T,s)

Questa zona è detta *naso* della caldaia, vedi Figura 30, ed è solitamente posta lateralmente al corpo centrale.

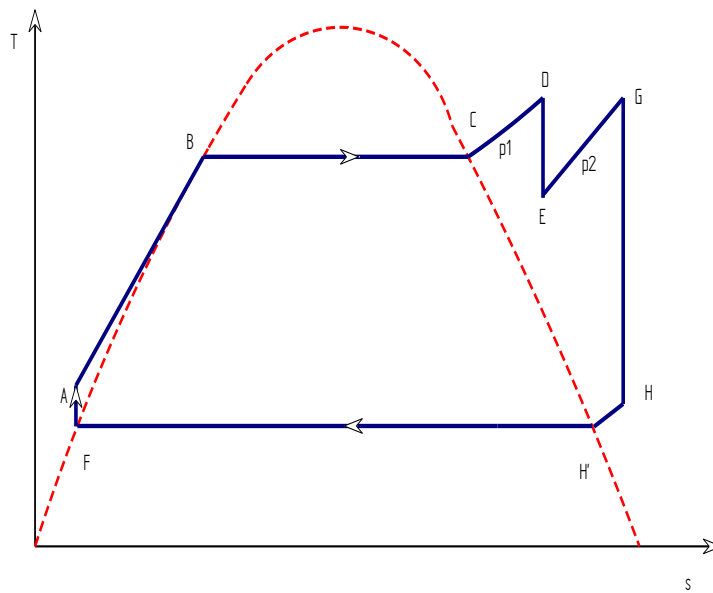


Figura 36: Ciclo Hirn con due surriscaldamenti

Il *naso* della caldaia ha un volume limitato e pertanto il numero di batterie di scambio termico che vi si può porre è limitato. A queste complicazioni in caldaia si aggiunge anche la complicazione impiantistica che si ha ogni volta che si deve riportare il vapore dalle turbine di espansione alla caldaia per effettuare il surriscaldamento.

Nel caso del ciclo di Figura 36 con due surriscaldamenti il rendimento termodinamico vale:

$$\eta = \frac{(h_D - h_E) + (h_G - h_H) - (h_A - h_F)}{(h_D - h_A) + (h_G - h_E)}$$

In modo analogo si procede nel caso di un numero maggiore di surriscaldamenti. L'effetto dei surriscaldamenti nel ciclo Hirn è benefico sulla riduzione del *consumo specifico di vapore*, CSV , che risulta dimezzato rispetto al normale ciclo Rankine con evidenti benefici impiantistici.

5.2.5 CICLI RIGENERATIVI

Per superare i limiti impiantistici dei cicli *Rankine* e *Hirn* sopra illustrati e quindi per accrescere il rendimento termodinamico degli impianti a vapore si ricorre ai *cicli rigenerativi* che basano il loro funzionamento sul concetto, assai importante, di ***rigenerazione termica***. Questa consiste nel ridurre gli effetti di irreversibilità esterna nelle fasi di preriscaldamento e surriscaldamento, cioè nelle fasi nelle quali si ha scambio termico a temperatura variabile e quindi con produzione di *irreversibilità esterna* (cioè dovuta alla sorgente e non al fluido di lavoro che qui si sta supponendo ideale).

Se osserviamo la Figura 29 si conclude che la fase di preriscaldamento AB avviene a temperatura variabile ed è responsabile della produzione di irreversibilità esterna. La fase di vaporizzazione BC avviene, nella zona dei vapori saturi, a temperatura costante e quindi senza produzione di irreversibilità. Se allora potessimo in qualche modo compensare il preriscaldamento BC con uno scambio di calore interno che non interessi la sorgente termica esterna allora l'irreversibilità corrispondente sarebbe annullata.

In Figura 37 si ha lo schema di una possibile trasformazione ***isodiabatica*** alla AB che sottrae calore nella fase di espansione CD in modo che l'area sottesa dalla CF sia eguale all'area sottesa dalla AB. Mediante uno scambio termico ideale (*senza perdite*) fra il fluido in espansione lungo la CF e il fluido in preriscaldamento lungo la AB si potrebbe avere l'effetto desiderato e cioè di annullare la produzione di irreversibilità esterna perché il calore di preriscaldamento è ottenuto ***internamente***.

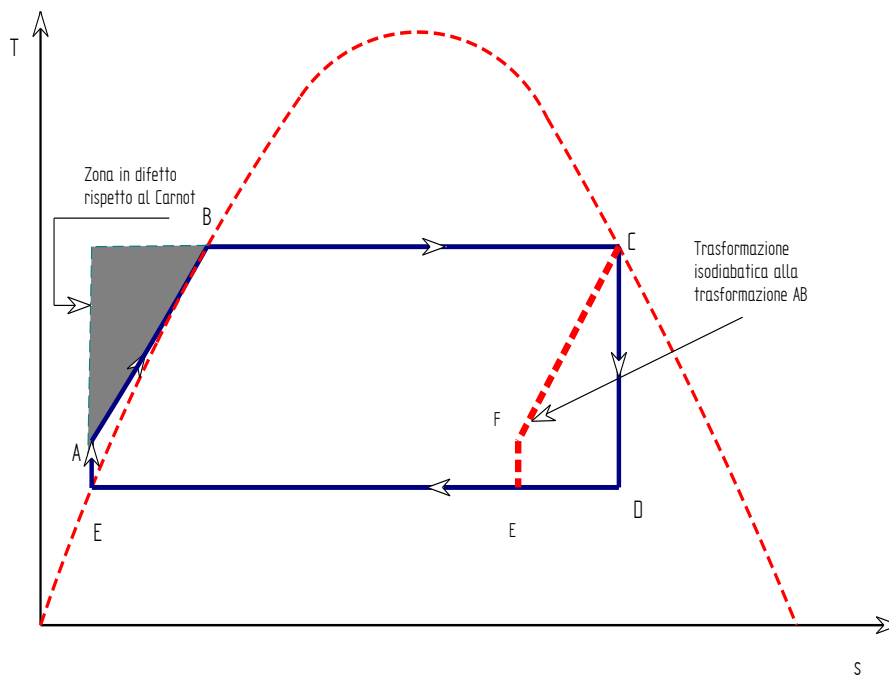


Figura 37: Ciclo Rankine con rigenerazione termica

Questo è il principio su cui si basa la ***rigenerazione termica***. Naturalmente quanto sopra detto è sempre riferito a trasformazioni ideali.

Nella pratica risulta impossibile ottenere una espansione del tipo CF poiché è impensabile di fare espandere il vapore nella turbina e al tempo stesso fargli scambiare calore con l'acqua di preriscaldamento.

Pertanto si cerca di superare l'inconveniente mediante una soluzione tecnico impiantistica che può ritenersi una approssimazione, anche se efficace, della rigenerazione termica ideale.

5.2.6 CICLI A SPILLAMENTO

L'ultima tendenza nella direzione del miglioramento del rendimento del ciclo a vapore è quella dei **cicli a spillamento**. In questi cicli si cerca di riparare al guasto termodinamico provocato dal preriscaldamento in caldaia dell'acqua prima di vaporizzare.

Questa fase è, come già detto in precedenza, fortemente irreversibile e riduce molto il rendimento del ciclo *Hirn* (o anche di *Rankine*). Allora se si riesce a riscaldare il più possibile l'acqua di alimento in caldaia con calore sottratto allo stesso vapore durante l'espansione in turbina si può pensare di ridurre le perdite di irreversibilità anzidette. Questo è proprio quello che si fa nei cicli a spillamento. Si preleva vapore dalla turbina durante la fase di espansione e lo si fa condensare in uno scambiatore di calore (detto *recuperatore*) in modo da cedere il calore di condensazione all'acqua che alimenta la caldaia.

In Figura 39 si ha un esempio di ciclo *Hirn* con 4 spillamenti che portano l'acqua dalle condizioni del punto A (*uscita dalla pompa*) fino al punto B'. Occorrerà fornire solamente il calore di preriscaldamento da B' a B.

Questo è certamente inferiore al calore AB senza spillamenti e pertanto si riducono le perdite per irreversibilità. Aumentando il numero di spillamenti si può portare il punto B' molto vicino a B incrementando, così, il rendimento termodinamico. Per motivi di costo si limitano gli spillamenti a 10÷14 al massimo.

In Figura 38 si ha il layout dell'impianto corrispondente alla Figura 39. In esso si sono indicate con x, y, z, k le portate di spillamento (*frazioni della portata totale che per un diagramma termodinamico è pari a 1 kg/s*).

Queste portate sono determinate imponendo il bilancio entalpico per ciascuno degli scambiatori di calore (detti *recuperatori*) indicati con S1, S2, S3 ed S4 in Figura 38. Ad esempio, con riferimento alla Figura 40, si può scrivere che, a regime stazionario, la somma dell'entalpia entrante è pari a quella uscente e quindi.

$$m_v h_v + m_1 h_1 + m_{1s} h_{1s} = m_2 h_2 + m_{1d} h_{1d}$$

ove si ha $m_1 = m_2 = 1$ ed i punti indicati con 1,2,3,4 e 5 sono quelli relativi alla posizione del recuperatore nel layout di Figura 38.

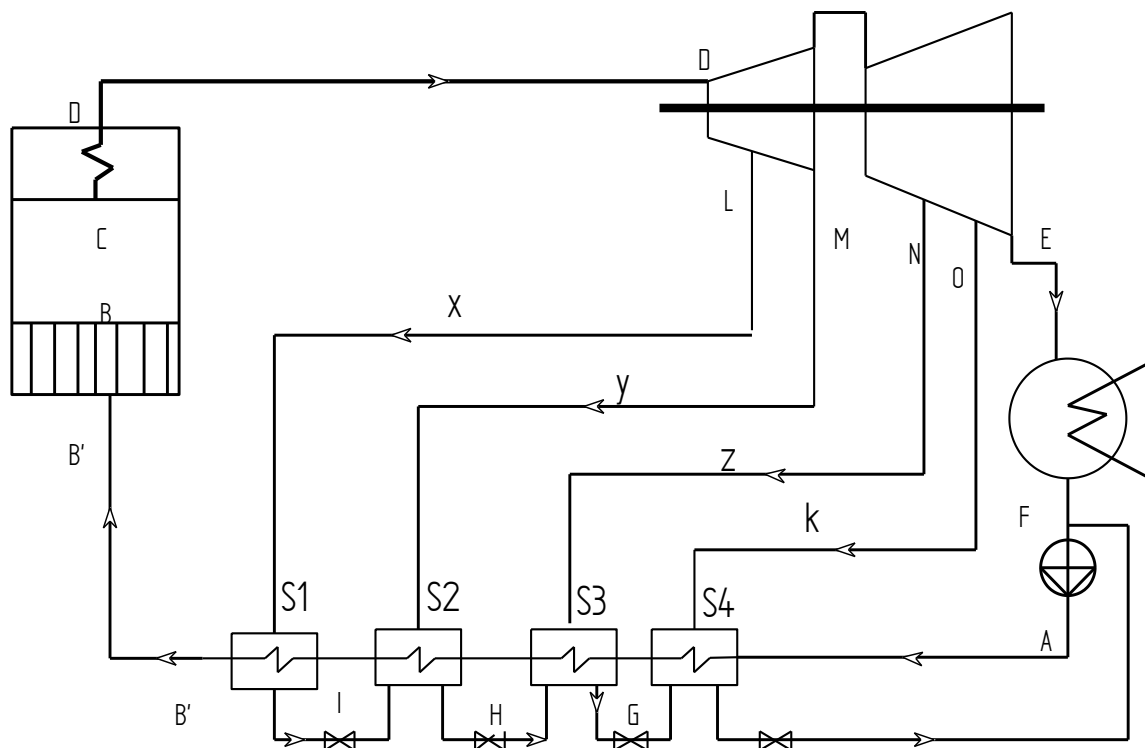


Figura 38: Layout di un ciclo *Hirn* con 4 spillamenti

I valori delle entalpie sono letti nel diagramma di *Gibbs* per temperature e pressioni corrispondenti ai punti nel layout. Scrivendo tante equazioni quanti sono i recuperatori di calore si ha un sistema in tante incognite quante sono le portate di spillamento¹⁰ e quindi è possibile scrivere l'espressione del rendimento termodinamico di impianto:

$$\eta = \frac{1(h_d - h_L) + (1-x)(h_L - h_M) + (1-x-y)(h_M - h_N) + (1-x-y-z)(h_N - h_O) + (1-x-y-z-k)(h_O - h_E)}{1(h_D - h_{B'})}$$

A numeratore si ha la somma dei lavori ottenute dalle effettive portate di vapore in espansione per i rispettivi salti entalpici. A denominatore si ha il calore effettivamente ceduto in caldaia.

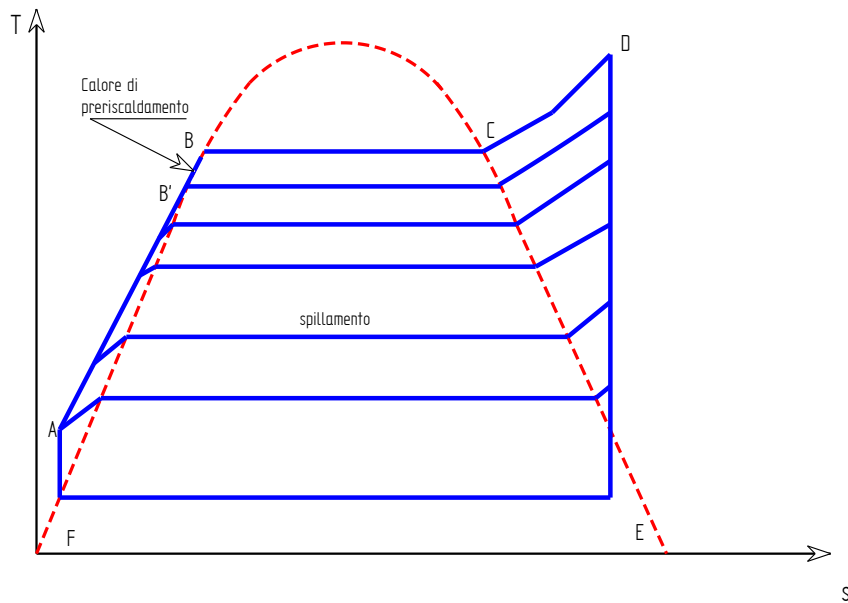


Figura 39: Cicli a spillamento

I cicli a spillamento risultano vantaggiosi, oltre che per l'aumento del rendimento termodinamico, anche perché ***producono una sensibile riduzione delle dimensioni delle turbine e del condensatore.*** In questi organi, infatti, viene a fluire una portata inferiore rispetto al caso di ciclo senza spillamento e pertanto sia la turbina (*specialmente quella di bassa pressione*) che il condensatore possono avere un volume (*e quindi anche un costo*) più ridotto.

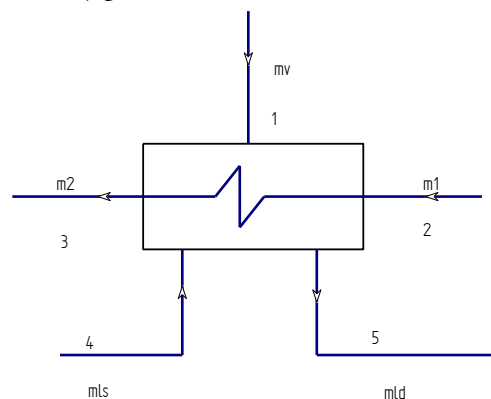


Figura 40: Bilancio energetico per un generico recuperatore di calore

¹⁰ Si osservi che le portate di spillamento non sono in ordine regolare crescente o decrescente. Si possono avere valori apparentemente non congruenti con le aspettative ma questi dipendono dalle condizioni di prelievo e quindi di bilancio dei singoli recuperatori di calore.

Un criterio semplice, ma in buon accordo con la pratica, è quello di suddividere il salto termico DE in parti eguali al numero di spillamenti desiderati (come indicato nella Figura 39). In generale, però, si hanno metodi di ottimizzazione piuttosto complessi ed onerosi che portano ad una scelta ottimale dei punti di spillamento.

Il numero degli spillamenti viene limitato a 10÷14 per non complicare eccessivamente il layout dell'impianto. Si osserva, infatti, che al crescere del numero dei componenti cresce anche il costo complessivo dell'impianto e pertanto occorre sempre valutare che i benefici indotti dagli spillamenti non siano annullati dal loro costo di realizzazione.

Il consumo specifico di vapore, CSV, per gli impianti a spillamento è leggermente superiore a quelli senza gli spillamenti ma i vantaggi termodinamici e i benefici impiantistici fanno di questa tecnica un punto fermo nelle moderne centrali di potenza.

5.2.7 COMBUSTIBILI UTILIZZATI NEGLI IMPIANTI A VAPORE

Si è detto che nel ciclo a vapore si può, in generale, utilizzare qualunque tipologia di combustibile sia esso solido, liquido o gassoso. La scelta del combustibile si riflette sulle caratteristiche della caldaia, del ciclo di trattamento del combustibile e del sistema di depurazione dei fumi.

La combustione con combustibili gassosi e con polverino di carbone polverizzato viene realizzata tramite l'uso di bruciatori nei quali l'aria viene miscelata al combustibile mentre nel caso di combustibili solidi (non polverizzati) si ha un focolare dotato di griglie. Fra i combustibili principali si ricordano:

- *greggio;*
- *olio combustibile*
- *gas naturale*
- *gas residuo (gas di cokeria, gas di raffineria, ...)*
- *polverino di carbone;*
- *coal-oil*
- *Nelle caldaie a focolare si possono bruciare:*
- *carbone povero*
- *combustibile da rifiuti (CDR)*
- *legna.*

I combustibili gassosi non richiedono, in generale, alcun trattamento ed i bruciatori sono più semplici che in altri casi. I combustibili liquidi comportano una fase di filtraggio e riscaldamento al fine di raggiungere i valori necessari di pressione e viscosità (40÷60 bar e $\eta < 5$ °E) per la successiva operazione di polverizzazione al bruciore.

I combustibili solidi (*carbone, scarti di lavorazione, Rifiuti Solidi Urbani RSU, ...*) possono subire trattamenti preliminari per raggiungere i valori di granulometria e contenuto d'acqua imposti dal tipo di bruciore adottato o del tipo di forno (ad esempio a letto fluido).

5.3 FUNZIONAMENTO DEI GENERATORI DI CALORE

Il generatore di calore è, in ultima analisi, uno scambiatore di calore che consente di trasferire il calore dei prodotti di combustione (fumi) all'acqua (o al vapore) calda. L'elemento attivo che fornisce calore è il bruciore che bruciando combustibile produce i fumi, come indicato in Figura 41. In base al principio di conservazione della massa possiamo scrivere il bilancio:

$$\dot{m}_c + \dot{m}_a = \dot{m}_f + \dot{m}_s \quad [58]$$

ove si ha:

- \dot{m}_c portata massica del combustibile
- \dot{m}_a portata massica di aria comburente
- \dot{m}_f portata massica dei fumi prodotti e che escono dal camino

- \dot{m}_s portata massica di scorie eventualmente prodotte.

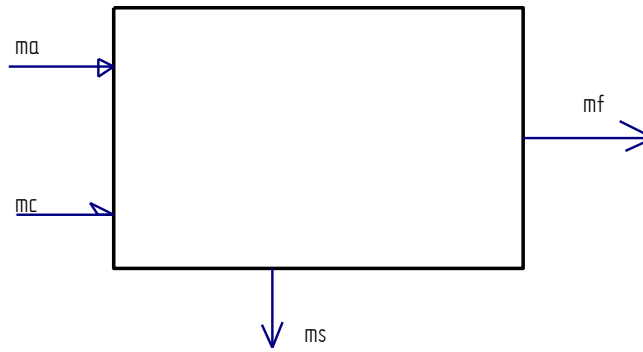


Figura 41: Sistema termodinamico di un generatore

Questa relazione si può scrivere opportunamente definendo l'indice d'aria come:

$$n = \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_{at}} \quad [59]$$

ove \dot{m}_{at} è il flusso di aria teorica necessaria per la combustione stechiometrica del combustibile. Pertanto la [58] diviene:

$$1 + na_t = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_c} + \frac{\dot{m}_s}{\dot{m}_c} \quad [60]$$

ove n_t è l'indice d'aria e a_t è l'aria teorica di combustione. Sempre con riferimento al sistema di Figura 41 si può scrivere il bilancio energetico:

$$\dot{E} + \dot{Q} - \dot{L} = \sum_{j=1}^u \left[\dot{m} \left(h + gz + \frac{w^2}{2} \right) \right]_j - \sum_{j=1}^i \left[\dot{m} \left(h + gz + \frac{w^2}{2} \right) \right]_j \quad [61]$$

dove a primo membro abbiamo, nell'ordine, la potenza elettromagnetica, termica e meccanica che entrano nella superficie di controllo, \dot{m}_j la portata di massa e in parentesi tonda la *entalpia*¹¹ delle masse entranti ed uscenti dal sistema. Lo scambio di potenza attraverso la superficie di controllo (1° membro) produce una variazione di entalpia nelle portate di massa che attraversano la superficie di controllo.

Nel caso dei generatori termici poniamo a zero la potenza meccanica \dot{L} poiché non viene compiuto lavoro attraverso l'involucro. Inoltre si possono trascurare i termini gravimetrici (gz) e cinetici ($w^2/2$) rispetto alla variazione di entalpia h ottenendo:

$$\dot{E} + \dot{Q} = \sum_{j=1}^u (\dot{m}h)_j - \sum_{j=1}^i (\dot{m}h)_j \quad [62]$$

Con riferimento alla Figura 42 la precedente equazione diviene:

$$\dot{E} - \dot{Q}_d - \dot{Q}_t = \dot{m}_f h_f + \dot{m}_s h_s + \dot{m}_i H_i - (\dot{m}_a h_a + \dot{m}_c h_c + \dot{m}_c H) \quad [63]$$

ove si ha il simbolismo:

- \dot{E} potenza elettrica entrante per azionamento degli ausiliari
- \dot{Q}_d potenza termica dispersa dall'involucro del generatore
- \dot{Q}_t potenza termica utile e quindi ceduta al fluido termovettore
- h_f entalpia massica dei fumi
- h_s entalpia massica delle scorie (assunte come solido inerte)

¹¹ Si ricordi che si definisce *entalpia* la somma : $h + w^2/2 + gz$. Qualcuno chiama la entalpia *Entalpia Totale*.

- \dot{m}_I portata di massa degli incombusti (trascurabile rispetto ad \dot{m}_f)
- H_I potere calorifico inferiore degli incombusti
- h_a entalpia massica dell'aria comburente
- h_c entalpia massica del combustibile (inteso come fluido inerte)
- H potere calorifico inferiore (a pressione costante) del combustibile)

Le condizioni di riferimento (t_0 , p_0) delle entalpie sono quelle del combustibile. La [63] si può ancora scrivere nella forma:

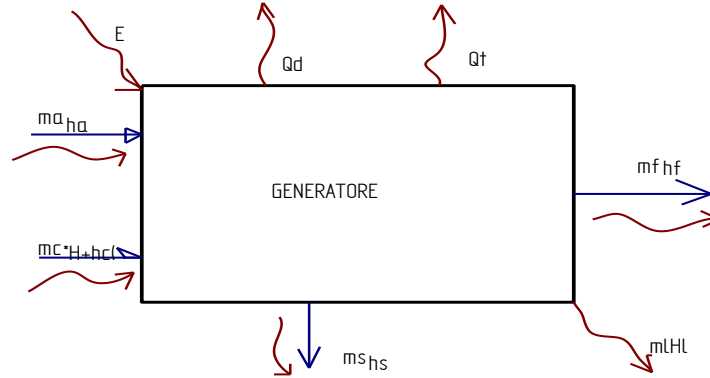


Figura 42: Bilancio energetico per un generatore

$$\dot{E} + \dot{m}_c H = \dot{Q}_t + \dot{Q}_d + [\dot{m}_f h_f - (\dot{m}_a h_a + \dot{m}_c h_c)] + \dot{m}_I H_I + \dot{m}_s h_s \quad [64]$$

Questa equazione ci dice che la potenza del combustibile e degli ausiliari elettrici viene convertita in parte in potenza utile (\dot{Q}_t) e la restante parte viene persa in disperdimenti vari. Si osservi che la potenza elettrica degli ausiliari (\dot{E}) è di solito trascurabile (qualche %) rispetto alla potenza del combustibile e alla potenza utile ma la si è esplicitamente indicata per tenere conto dell'alto valore exergetico rispetto alle energie termiche. Viene definita *potenza al focolaio* il prodotto:

$$\dot{Q}_f = \dot{m}_c H \quad [65]$$

cioè la potenza fornita al bruciatore e rappresenta l'energia primaria in ingresso (oltre quella elettrica per gli ausiliari) al generatore, fondamentale per tutte le analisi economiche. La grandezza principale di uscita è rappresentata dall'*energia utile* (\dot{Q}_t) che è anche lo scopo fondamentale del generatore termico. La potenza dispersa per dispersioni attraverso il mantello si calcola, tenendo conto della coibentazione termica normalmente presente e della bassa temperatura superficiale esterna, mediante la relazione:

$$\dot{Q}_d = hA(t_p - t_e)$$

avendo indicato con t_p la temperatura superficiale esterna del mantello, t_e la temperatura dell'aria esterna, h il coefficiente di convezione termica e con A la superficie disperdente del mantello. Il termine $\dot{m}_f h_f - (\dot{m}_a h_a + \dot{m}_c h_c)$ è la potenza termica dispersa con i fumi nel camino. Questa potenza può essere espressa nella forma:

$$\dot{Q}_c = \dot{m}_f c_f (t_f - t_0) - [\dot{m}_c c_c (t_c - t_0) + \dot{m}_a c_a (t_a - t_0)] \quad [66]$$

avendo indicato con c i calori specifici e t_0 la temperatura di riferimento. Si osservi che h_a ed h_c sono trascurabili rispetto ad h_f e pertanto, trascurando anche il contributo delle scorie (oggi di poco conto con i combustibili liquidi e gassosi) si può ancora scrivere che le perdite al camino sono essenzialmente date da:

$$\dot{Q}_c = \dot{m}_f c_f (t_f - t_a) \quad [67]$$

La potenza perduta per incombusti ($\dot{m}_I H_I$) dipende dalla qualità della combustione e quindi dalla maggiore o minore presenza di sostanze che non sono state completamente ossidate.

Temperatura teorica di combustione

Se assumiamo le ipotesi:

- assenza di scambio termico, $\dot{Q}_t = 0$
- assenza di disperdimenti $\dot{Q}_{ds} = 0$
- reazione di ossidazione completa (e quindi $\dot{m}_I H_I = 0$)
- assenza di scorie calde (e quindi $\dot{m}_s h_s = 0$)

possiamo scrivere l'equazione di bilancio:

$$\dot{m}_c H = \dot{m}_f c_f (t_{ad} - t_0) - \dot{m}_a c_a (t_a - t_0) - \dot{m}_c c_c (t_c - t_0) \quad [68]$$

La temperatura teorica viene anche detta *temperatura adiabatica di combustione*, indicata con t_{ad} e vale, dalla precedente equazione:

$$t_{ad} = t_0 + \frac{H + n a_t c_a (t_a - t_0) + c_c (t_c - t_0)}{(1 + n a_t) c_f} \quad [69]$$

Ne deriva che la temperatura adiabatica dipende dall'eccesso d'aria (attraverso n), dall'entalpia dei reagenti (attraverso t_a e t_c) e dal tipo di combustibile (attraverso H ed a_t).

Rendimenti e Perdite

Scriviamo la [64] in forma adimensionale dividendo ambo i membri per la potenza al focolaio $\dot{m}_c H$ per cui otteniamo:

$$\frac{\dot{E}}{\dot{m}_c H} + 1 = \eta + P_d + P_c + P_I + \frac{\dot{m}_s h_s}{\dot{m}_c H} \quad [70]$$

ove si sono indicati:

- η rendimento del generatore termico
- P_d perdite per dispersioni
- P_c perdite al camino
- P_I perdite per incombusti.

Questa equazione non dice nulla di nuovo rispetto alla [64] ma è espressa in forma più semplice.

Il *rendimento energetico* del generatore è dato da:

$$\eta = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{m}_c H} \quad [71]$$

e in pratica viene calcolato valutando separatamente sia il numeratore che il denominatore con metodi diretti (cioè valutando i singoli termini) che indiretti (cioè valutando quanto ceduto all'acqua sottraendo alla potenza al focolare le perdite di calore). La *perdita per dispersione* è definita dalla relazione:

$$P_d = \frac{\dot{Q}_d}{\dot{m}_c H} \quad [72]$$

e in genere è piccola (qualche %) rispetto alla potenza utile grazie all'isolamento del mantello. La perdita per dispersione cresce al diminuire del carico in quanto il denominatore della [72] diminuisce.

La *Potenza perduta al camino* vale:

$$P_c = \frac{\dot{Q}_c}{\dot{m}_c H} \quad [73]$$

che può ancora scriversi, per la [67] nella forma:

$$P_c = \frac{\dot{m}_f c_f (t_f - t_a)}{\dot{m}_c H} \quad [74]$$

Le perdite al camino dipendono molto dal sistema di regolazione del bruciatore. Questo può essere:

- *Modulante*: se la portata di combustibile viene variata con continuità fra un valore minimo e quello massimo (nominale);
- *Tutto o Niente*: quando la portata di combustibile è solo quella nominale e quindi si regola accendendo o spegnendo il bruciatore stesso. Questo tipo di bruciatori sono certamente più grossolani ma meno costosi di quelli modulanti e sono utilizzati per generatori di piccola potenza.

Con regolazione *tutto o niente* il generatore lavora sempre a regime nominale quando il bruciatore è in funziona e quindi le perdite al camino sono pressoché costanti.

Con la regolazione modulante se la portata di combustibile scende (a pari indice d'aria) si riduce la t_f e quindi le perdite al camino.

La *Perdita per incombusti* vale:

$$P_I = \frac{\dot{m}_I H_I}{\dot{m}_c H} \quad [75]$$

Nel caso di incombusti gassosi si può scrivere:

$$P_I = \frac{V_I}{V_f} \frac{\rho_I}{\rho_f} \frac{H_I (1 + n a_t)}{H} \quad [76]$$

ove ρ_I è la densità degli incombusti, ρ_f la densità dei fumi (in condizioni normali) e il rapporti V_I/V_f è il contenuto di incombusti in volume nei prodotti della combustione secchi.

5.3.1 CICLI COMBINATI E COGENERATIVI

Per un ciclo cogenerativo, cioè tale da produrre contemporaneamente sia potenza meccanica (o elettrica) che termica per usi di processo, nel quale si desideri avere la necessaria flessibilità nel soddisfacimento del carico elettrico e termico si utilizza, di solito, la turbina in *derivazione e condensazione* (detta anche *a prelievo regolato*).

Questo tipo di impianto può lavorare anche separatamente dalle reti esterne (parallelo elettrico e termico) come pure possono lavorare in parallelo con la rete ENEL e cedere energia in caso di sovrapproduzione.

Impianti a derivazione e condensazione

Il rapporto $C = E_T/E_E$ fra le potenze elettriche e termiche può variare fra 0 e 4 e anche oltre nel caso di contropressione. In Figura 43 si ha un esempio di impianto con turbina a vapore a derivazione e condensazione.

In questo caso la turbina è sostanzialmente divisa in due parti: un corpo ad alta pressione, ove si espande tutto il vapore prodotto, ed uno a bassa pressione dove avviene l'espansione del vapore che eccede quello richiesto dalla utenza.

Questo tipo di impianto consente di realizzare tutti i casi fra la turbina a condensazione pura e quella in contropressione pura. E' quindi molto flessibile e segue perfettamente le esigenze del carico elettrico e termico dell'Utenza.

Si tenga presente che occorre avere almeno 6÷7% di vapore in espansione nella sezione a bassa pressione per avere un raffreddamento del corpo turbina.

Inoltre il corpo a bassa pressione non è dimensionato per ricevere tutta la portata di vapore e pertanto i due casi limiti sono solo teorici.

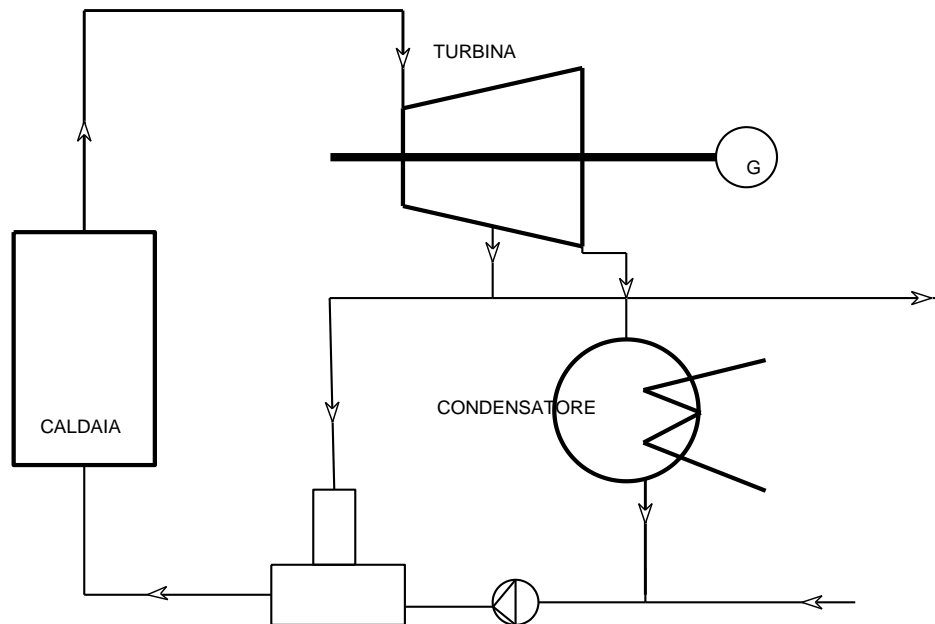


Figura 43; Ciclo a vapore a derivazione e condensazione

Per questa tipologia di impianto occorre considerare i seguenti parametri:

- rendimento totale di cogenerazione, N , dato dalla somma algebrica dei rendimenti termici ed elettrico;
- rendimento elettrico, N_E
- consumo specifico di vapore per la produzione elettrica, CSV_p
- rapporto energia termica su energia elettrica, C .

Tutti questi parametri variano al variare del carico elettrico e della potenza termica estratta.

In un gruppo *a derivazione e condensazione* si può variare il carico elettrico, entro certi limiti, senza pesare sul carico termico e, viceversa, è possibile variare il carico termico senza disturbare il carico elettrico. La regolazione, infatti, agisce sia sulle valvole di ammissione alla turbina che su quelle a valle del prelievo.

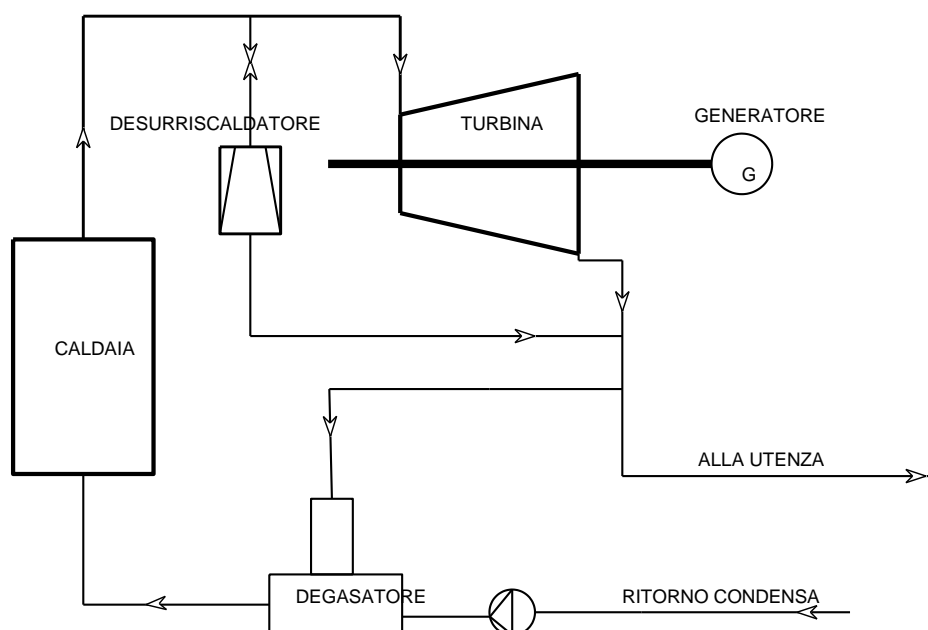


Figura 44: Schema di un impianto a vapore con turbina in contropressione

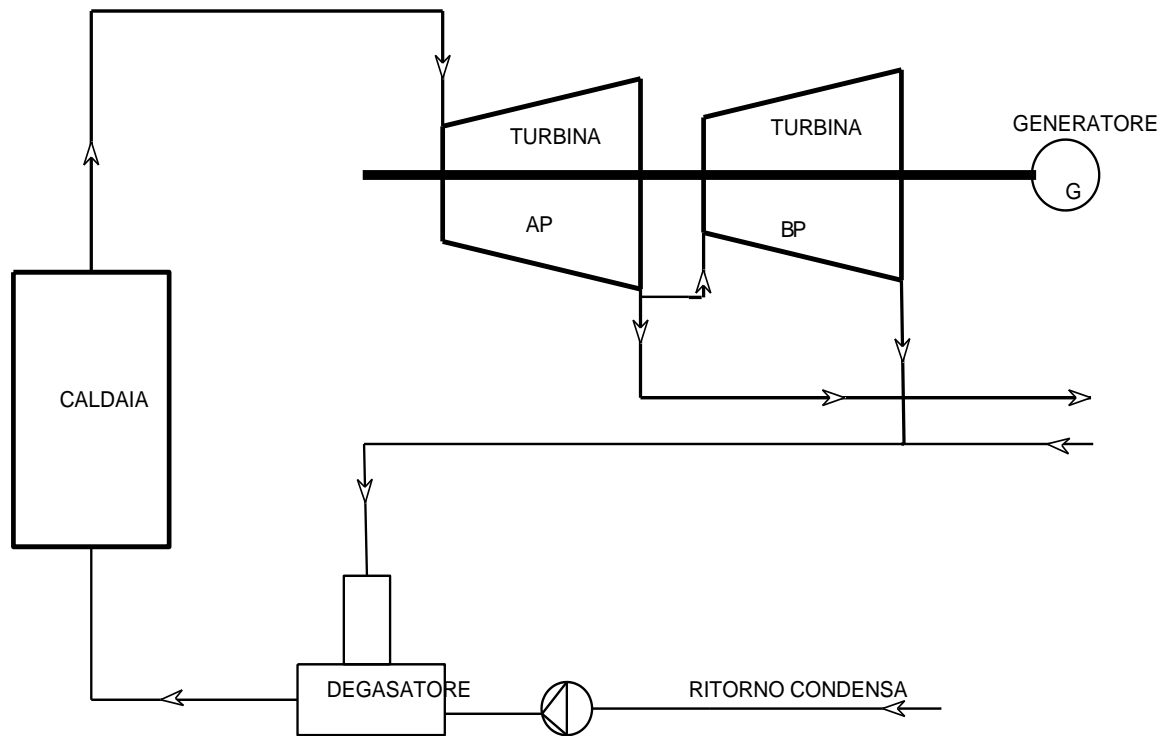


Figura 45: Schema di un impianto a contropressione con due turbine e due livelli di scarico vapore

5.3.2 IMPIANTI A CONTROPRESSIONE

Questi impianti sono detti *a recupero totale* e forniscono calore ad una utenza (detta fredda) in grado di dissipare tutto il carico. Essi presentano una elevata rigidità e quindi non consentono di variare indipendentemente i carichi elettrici e termici.

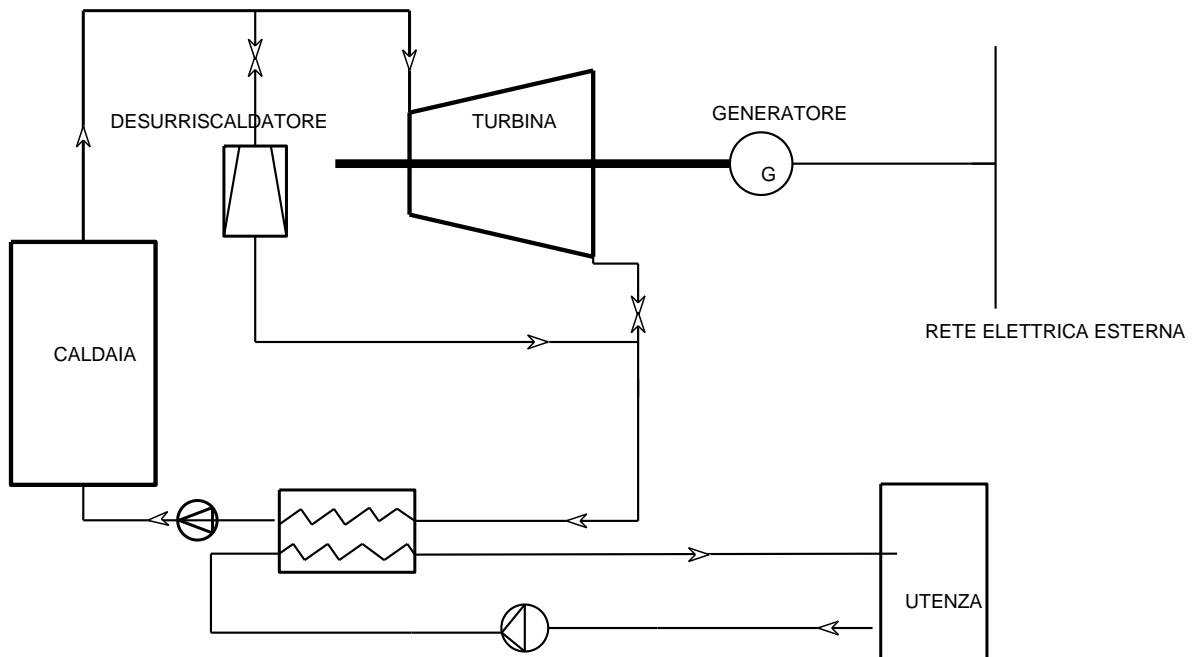


Figura 46: Schema di un sistema cogenerativo con turbina a vapore a contropressione per reti di teleriscaldamento

In genere gli impianti a contropressione sono dimensionati sull'utenza termica con rendimento complessivo che può raggiungere il 90%. In Figura 44 si ha lo schema di un impianto in contropressione nella versione più semplice, adatto per piccole taglie.

Lo stadio di riduzione di pressione e di desurriscaldamento del vapore, unitamente al by-pass della turbina, è utilizzato sia in fase di avviamento del gruppo che in caso di fuori servizio della turbina. Il desurriscaldatore serve ad adattare il vapore alle esigenze dell'utenza.

In Figura 45 si ha uno schema di impianto a contropressione con due turbine: in questo modo si hanno due livelli di scarico del vapore a diversa pressione.

In Figura 46 si ha uno schema tipico per applicazioni di teleriscaldamento. La turbina in contropressione è regolata dalla quantità di combustibile bruciato in caldaia e quindi dalla quantità di vapore inviato alla turbina stessa, a parità di condizioni termodinamiche. In linea di principio la regolazione può essere asservita sia al carico termico che al carico elettrico.

5.3.3 DIAGRAMMA DI SUNKEY

Risulta interessante sviluppare un'analisi *exergetica* del ciclo a vapore per mettere in risalto sia le incongruenze che l'analisi energetica ancora oggi pone sia per evidenziare i possibili punti di attacco per migliorare effettivamente il rendimento termodinamico.

Si consideri il ciclo *Hirn* di Figura 47 e consideriamo le perdite energetiche ed exergetiche delle trasformazioni fondamentali. Ricordiamo che, ai fini pratici, per quanto detto nel §3.7, consideriamo che l'exergia del combustibile coincida con il suo potere calorifico inferiore, p_{ci} .

Perdite per combustione adiabatica nel generatore

La perdita di exergia va sempre riferita all'exergia iniziale del combustibile ed è data, con riferimento alla Figura 48, dalla relazione:

$$\Pi_1 = \frac{e_c - m_f e_{1f}}{e_c}$$

Ove $m_f e_{1f}$ è l'exergia dei prodotti di reazione che risultano dalla combustione completa dell'unità di massa di combustibile alla temperatura di combustione adiabatica. Possiamo scrivere, per l'exergia dei prodotti di combustione, la relazione:

$$e_{1f} = h_{1f} - h_{0f} - T_0 (s_{1f} - s_{0f})$$

ove il pedice 0 si riferisce all'ambiente.

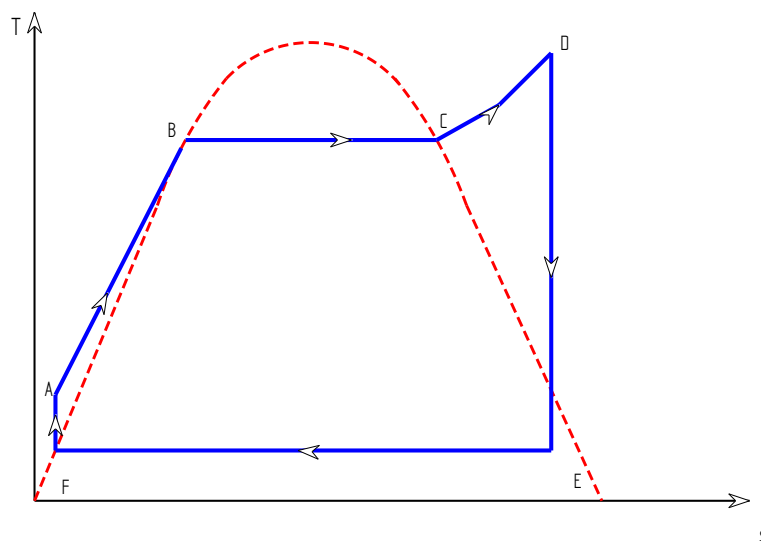


Figura 47: Cicli Hirn con un solo surriscaldamento

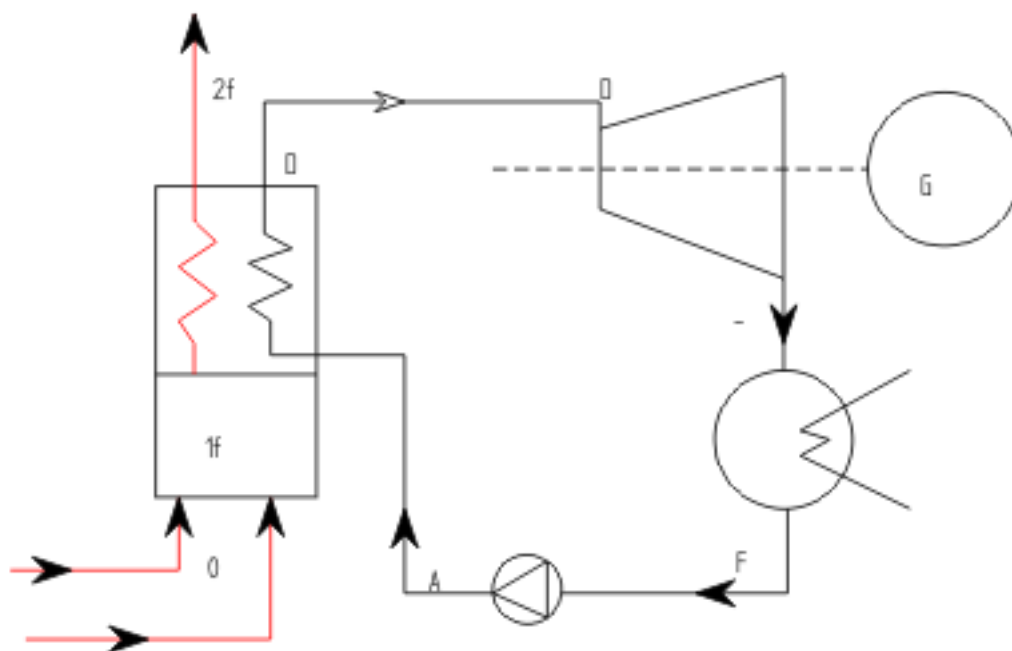


Figura 48: Layout del ciclo Hirn ai fini del calcolo delle perdite

Si osservi che la *combustione adiabatica* è di per sé esente da perdite energetiche. Le perdite termodinamiche sono conseguenza della degradazione della qualità dell'energia prima e dopo il processo.

In pratica non riusciamo ad utilizzare totalmente l'exergia iniziale del combustibile con un processo di combustione chimica in caldaia mentre riusciamo a farlo meglio, ad esempio, con *combustione chimica* a bassa temperatura (ad esempio nelle *celle a combustibile*).

La *combustione calda* è fortemente dispersiva e, con riferimento al gasolio ($pci=42000 \text{ kJ/kg}$ e $e_c=43350 \text{ kJ/kg}$) con eccesso d'aria pari a 0.12 e temperatura dei fumi uscenti dal camino pari a 150°C , si possono avere circa il 32.1 % di perdite exergetiche. Si è considerata la combustione completa e quindi si trascurano le perdite per incombusti.

Perdite nello scambio di calore fumi – acqua nel generatore termico

Supponiamo che lo scambio di calore fra i fumi caldi della combustione e il fluido di lavoro in caldaia sia *adiabatico* e che pertanto tutta l'energia perduta dai fumi passi all'acqua e/o vapore, detta m_v la portata di vapore trattata per unità di massa del combustibile bruciato, allora le perdite exergetiche dovute allo scambio fumi – vapore sono date dalla relazione:

$$\Pi_2 = \frac{m_f(e_{1f} - e_{2f}) - m_v(e_D - e_A)}{e_c}$$

ove e_D ed e_A sono le exergie specifiche del vapore e dell'acqua di alimento nei punti D e A del diagramma termodinamico di Figura 47. Inoltre e_{2f} è l'exergia specifica dei fumi all'uscita dalla caldaia.

Le perdite exergetiche per vapore uscente a 550°C e pressione di lavoro di 50 bar sono pari a circa il 29.7 %. Avendo supposto lo *scambio adiabatico* le perdite energetiche sono nulle in quanto tutta l'energia dei fumi scambiata si trasferisce al fluido di lavoro.

Nella realtà la qualità del Joule alla temperatura dei fumi (circa 2000 K) è ben diversa da quella del vapore a 823 K e questo degrado exergetico è molto pesante ed è ascrivibile unicamente all'impossibilità tecnologica attuale di utilizzare fluidi di lavoro a 2000 K.

Perdite per lo scarico dei fumi al camino

I fumi escono dal camino del generatore ancora caldi, abbiamo supposto a 150°C . Ciò significa che perdiamo l'exergia che questi ancora possiedono e pertanto queste perdite valgono:

$$\Pi_3 = \frac{m_f e_{2f}}{e_c}$$

Le perdite energetiche sono ora presenti perché i fumi riversano nell'ambiente la loro entalpia e pertanto si ha:

$$\Psi_3 = \frac{m_f (h_{2f} - h_{0f})}{(pci)_i}$$

avendo indicato con pci_i il potere calorifico inferiore in ingresso al generatore. Nelle ipotesi fatte di funzionamento dell'impianto si hanno perdite exergetiche dell'ordine dell'1% mentre quelle energetiche (*che non considerano la minore qualità termodinamica dei fumi a 325 K rispetto a quella dei fumi a 2000 K*) sono pari a circa il 5.9% (quindi *sensibili*!).

Perdite per espansione non isoentropica del vapore nella turbina

In Figura 47 si ha un ciclo *Hirn* con espansione isoentropica ma nella realtà si ha un rendimento di espansione isoentropica variabile da 0.7 a 0.85 e pertanto l'espansione reale comporta perdite exergetiche date dalla relazione:

$$\Pi_4 = \frac{m_v (e_D - e_E) - (h_D - h_E)}{e_c} = \frac{m_v [T_0 (s_D - s_E)]}{e_c}$$

Le perdite energetiche sono nulle perché l'espansione si suppone *adiabatica* (anche se *non isoentropica*). Con i valori di funzionamento dell'impianto prima indicati e $\eta_e = 0.82$ si ha perdite exergetiche pari al 6.4 %.

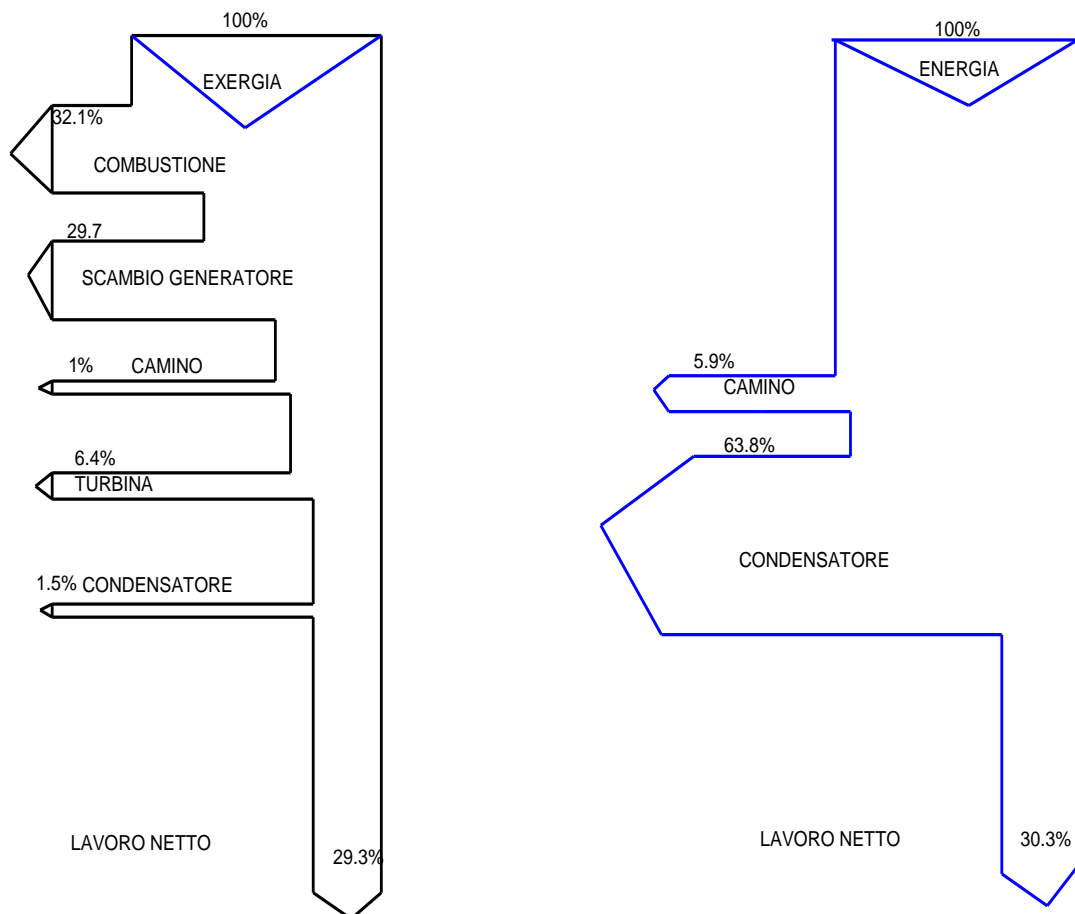


Figura 49: Diagramma di Sankey per un ciclo Hirn

Perdite nel condensatore

Le perdite exergetiche nel condensatore sono relative allo stato termodinamico del vapore in uscita dalla turbina e alle condizioni dell'ambiente e pertanto valgono:

$$\Pi_5 = \frac{m_v (e_E - e_F)}{e_c}$$

mentre quelle energetiche valgono:

$$\psi_5 = \frac{m_v (h_E - h_F)}{(pci)_i}$$

In termini numerici le perdite exergetiche, sempre nelle ipotesi sopra indicate, sono di circa 1.5 % mentre quelle energetiche sono ben 63.8 %.

In definitiva dal punto di vista energetico c'è da strapparsi i capelli per l'enorme quantità di energia buttata a mare mentre dal punto di vista exergetico si conclude che questa vale poco termodinamicamente poiché ad una temperatura molto prossima a quella dell'ambiente.

Non si può fare più nulla con questa quantità enorme di energia a bassa temperatura!

Riportando le perdite sopra calcolate in forma grafica, come mostrato in Figura 49, si ha il cosiddetto *diagramma di Sunkey* che ben evidenzia la differenza concettuale che si ha nell'impostazione dei bilanci dal punto di vista exergetico ed energetico.

5.4 MOTORI ENDOTERMICI

I motori alternativi che più vengono utilizzati sono quelli endotermici basati su ciclo *Diesel* e su ciclo *Otto*. Va tenuto presente, tuttavia, che se i combustibili di elezione di questi motori sono il gasolio e la benzina, in campo cogenerativo si usano spesso anche combustibili diversi quali il metano, il *syngas* (*derivato da pirolisi industriali*), oli pesanti (*di scarto*), Il diesel può anche funzionare a gas con opportune iniezioni di nafta (*combustione pilota*) in percentuale del 5% del totale. Questa soluzione (detta *dual fuel*) consente di funzionare anche a gas ma con un aggravio dei consumi di circa il 10% rispetto al solo funzionamento a nafta.

5.4.1 CICLO OTTO

Si tratta di uno dei cicli termodinamici più utilizzati ed è *il ciclo di riferimento* per i motori a benzina.

E' proprio la caratteristica del combustibile alla base della concezione di questo motore. La benzina, infatti, è una frazione petrolifera leggera ed evapora facilmente.

Ciò consente di ottenere con relativa semplicità (mediante i *carburatori*) miscele di aria (*comburente*) e vapori di benzina (*combustibile*) da utilizzare all'interno dei cilindri dei motori per ottenere energia dai prodotti di combustione. Si vedrà che la miscela di aria e vapori di benzina non può essere compressa a piacimento perché, con l'innalzarsi della temperatura adiabatica di compressione, si ha il raggiungimento del *punto di autoaccensione* che provoca i fenomeni di *detonazione anticipata* (si dice che il motore *picchia*) che risultano dannosi sia per gli stessi motori sia per lo scarso rendimento globale che si ottiene.

I motori commerciali hanno rapporti di compressione (*che fra poco definiremo*) variabili fra 5 e 8 e le benzine utilizzate hanno *numeri di ottani*¹² compresi fra 94÷96. I motori aeronautici hanno NO notevolmente più elevati per consentire la costruzione di motori più compatti e leggeri.

¹² Il *Numero di Ottani* è riferito al rapporto, espresso in percento, fra il punto di autodetonazione di una miscela di aria con *iso-ottano normale* e la miscela di benzine utilizzate. In commercio si hanno benzine contenenti composti aromatici ciclici e non lineari (come l'*iso-ottano*) e ciò comporta un abbassamento del punto di autodetonazione. Si aggiungono additivi chimici di vario genere per incrementare il punto di autodetonazione. Le benzine commerciali hanno NO variabile fra 0.04 e 0.96. Le benzine per motori aeronautici hanno valori di NO=130÷160 e quindi sono fortemente additivate per potere avere motori di minore dimensioni e peso a pari potenza.

Si osservi che non si ha alcuna convenienza ad usare benzine con NO più elevati di quelli che il rapporto di compressione consente, mentre l'uso di benzine con NO inferiori a quelli minimi richiesti possono provocare malfunzionamenti e danneggiamenti vari.

Ciclo Termodinamico

Esso si compone, vedi Figura 51, di una compressione isoentropica, sempre con riferimento al ciclo ideale ad aria standard, seguito da una combustione interna *isocora*, mediante scoppio attivato da una scarica elettrica, seguita da una fase utile di espansione e poi di una fase di scarico dei prodotti di combustione in atmosfera ancora *isocora*.

Le fasi di scambio di calore con l'esterno sono qui supposte reversibili ma occorre precisare che, avvenendo a temperatura non costante, esse sono **esternamente irreversibili**. Ciò significa che si ha, comunque si operi, una forte penalizzazione termodinamica rispetto al ciclo ideale di *Carnot*, così come si è osservato a proposito del ciclo *Rankine* e *Hirn*.

Questo ciclo, come pure il ciclo *Diesel* e quello *Joule-Bryton* dei quali si parlerà fra poco, consente la rigenerazione termica con maggiore facilità rispetto al ciclo a vapore.

Si osserva, infatti, che dopo la fase utile di espansione il fluido di lavoro (gas combusti) si trovano ad una temperatura ancora sufficientemente elevata (*variabile fra 300 e 450 °C*) e quindi tale da consentire un recupero energetico.

Il rendimento di questo ciclo può essere calcolato facilmente. Infatti si ha:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{Q_{BC}}$$

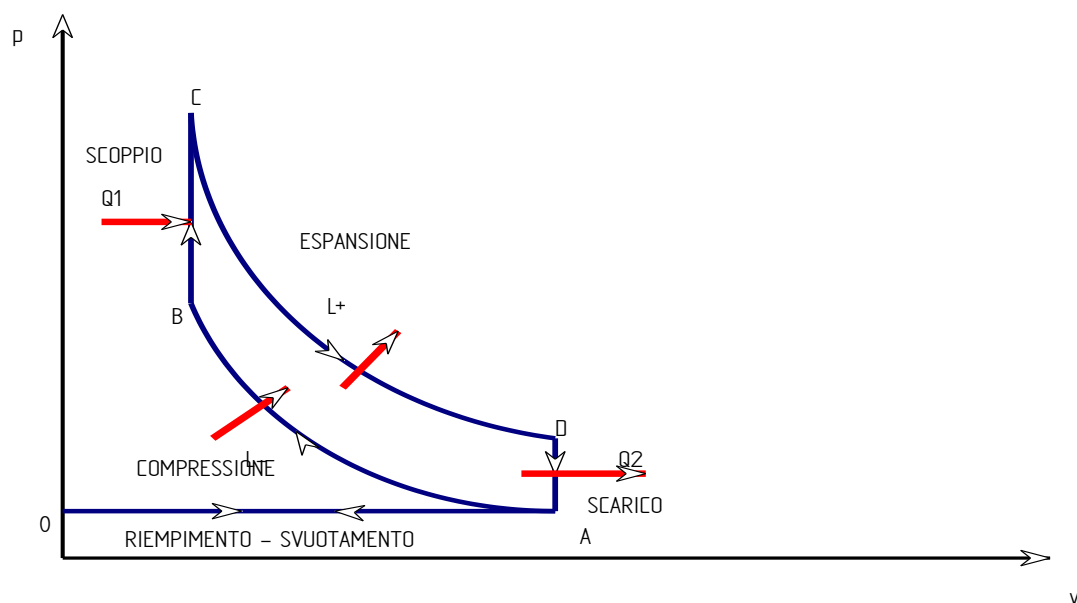


Figura 50: Ciclo Otto nel piano (p,v)

Per le due trasformazioni isocore si possono scrivere le relazioni:

$$Q_{DA} = c_v (T_D - T_A)$$

$$Q_{BC} = c_v (T_C - T_B)$$

ove, si ricordi, si ha la costanza dei calori specifici a volume costante perché l'aria standard è supposta comportarsi come un gas ideale. Sostituendo nell'espressione del rendimento si ha:

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

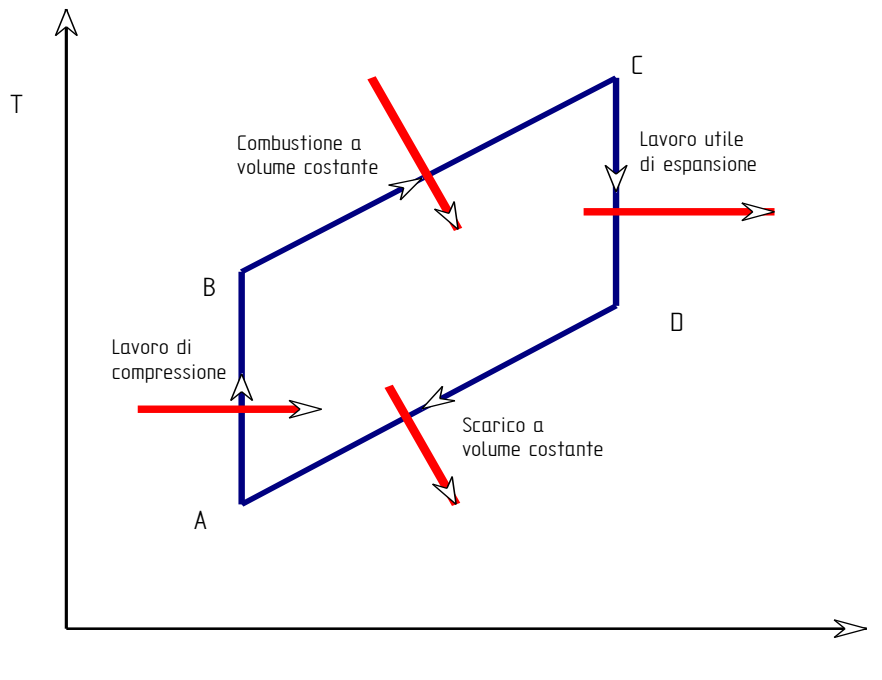


Figura 51: Ciclo Otto per motori a benzina

Questa espressione va bene da un punto di vista termodinamico ma non viene utilizzata in campo motoristico perché non evidenzia i parametri meccanici e costruttivi dei motori a scoppio. Definito il *rapporto di compressione* $r_v = v_A/v_B$ si può scrivere per le due isoentropiche:

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C}{T_D} = \left(\frac{v_A}{v_B} \right)^{k-1} = r_v^{k-1}$$

Pertanto applicando la regola dello *scomponendo* ai primi due rapporti e tenendo conto dell'espressione del rendimento si ottiene la seguente relazione:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \quad (77)$$

I valori di rendimento che si ottengono normalmente sono compresi fra il 16 e il 24% e quindi bassi rispetto ai valori ottenibili con un ciclo ideale di Carnot. Il rendimento del ciclo *Otto* cresce, quindi, con il crescere del rapporto volumetrico. Purtroppo non possiamo avere valori elevati (di norma questi variano fra 6 e 10 e nei motori da competizione si raggiunge 15÷17) perché la temperatura a fine fase di compressione, T_B , non può superare quella di autoaccensione delle benzine iniettate nel cilindro. Oggi usiamo benzine additivate con benzene o altre sostanze (*additivi* quali il piombo tetraetile o tetrametile erano utilizzate per le benzine non verdi ora messe al bando nella U.E.) capaci di innalzare il punto di detonanza ma pur tuttavia, comprimendo contemporaneamente aria e vapori di benzina, non si può andare oltre i limiti raggiunti.

Per superare il problema della detonazione si usano motori a benzina ad iniezione e quindi con un concetto di funzionamento simile a quello dei cicli *Diesel* che comprimono inizialmente solo aria e poi iniettano il gasolio mediante una pompa ad iniezione. I cicli reali *Diesel* e *Otto* risultano alquanto modificati rispetto ai *cicli ideali* sopra indicati per varie ragioni fra le quali, si ricorda:

- Compressione ed espansione reali (*politropiche*) dei fluidi;
- Comportamento della miscela di gas diverso dall'*aria standard* e quindi con calori specifici variabili alle varie pressioni e temperature;
- I prodotti di combustione presentano fenomeni di dissociazione ad elevate temperature;

- I fenomeni di accensione e combustione avvengono in intervalli di tempo non trascurabili e quindi non istantanei;
- I cicli sono *aperti* e quindi con scambi di massa con l'esterno.

I cicli reali si allontanano molto da quelli ideali qui descritti, come indicato in Figura 52. Si osservi come le fasi di riempimento e di svuotamento non sono più coincidenti (*caso teorico*) ma costituiscono una sorta di ciclo negativo (*lavoro perso*) prima per riempire il cilindro (*depressione*) e poi per svuotarlo (*sovrapressione*).

Le fasi di compressione e di espansione non sono più isoentropiche ma politropiche con indice n diverso da quello di adiabacità dell'aria standard ($k = 1.4$) sia perché la trasformazione si allontana da quella ideale che per la diversa composizione dei gas di combustione rispetto alla miscela iniziale di aria e vapori di benzina. La fase di scoppio avviene non più istantaneamente (*volume costante*) bensì in un piccolo intervallo di tempo durante il quale, per effetto dello spostamento del pistone (*anticipo all'accensione e posticipo di fine combustione*) assume un andamento curvilineo.

La stessa osservazione si può fare per la fase di scarico che avviene a volume variabile. In definitiva il ciclo reale appare piuttosto deformato rispetto a quello ideale, interno a questo e di area inferiore. Pertanto il lavoro netto reale è inferiore (*anche molto*) rispetto a quello ideale.

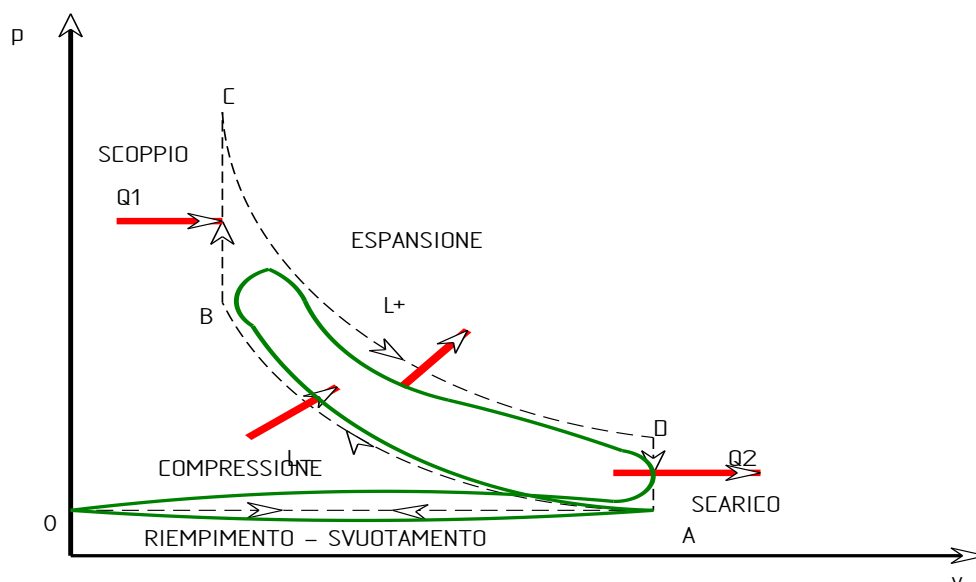


Figura 52: Ciclo Otto reale nel piano (p, v)

La forma del ciclo reale è detta *a scarpetta* e si intuisce come l'involuppo esterno (*ideale*) sia solo una idealizzazione necessaria per lo studio termodinamico del ciclo *Otto*. Nei cicli reali si definisce la *pressione media* del ciclo come la pressione che moltiplicata per la cilindrata fornisce il lavoro netto reale. Questa può essere calcolata facilmente per via grafica o numerica una volta noto il ciclo reale. Maggiori dettagli sul ciclo *Otto* sono rimandati al corso di *Macchine Termiche*.

5.4.2 CICLO DIESEL

Uno dei motori più antichi è quello a gasolio basato sul ciclo *Diesel* di cui si parlerà fra breve. Si tratta di motori endotermici caratterizzati da un numero di giri al minuto piuttosto basso (*alcune centinaia*), dall'assenza di candele di accensione e dall'utilizzo di combustibile oleoso (*che funge anche da lubrificante*) detto gasolio. Questo motore ha buoni rendimenti e relativa facilità d'uso.

E' usato prevalentemente per motori di potenza ad uso industriale, marino o terrestre nel campo dei trasporti su camion,... Oggi si è avuta una evoluzione automobilistica (*diesel veloci*) con un numero di giri elevato (5000÷6000 gpm) e con iniezione elettronica ad alta pressione che lo rende molto competitivo rispetto al motore a benzina. Il motore diesel non emette CO e quindi non risulta particolarmente pericoloso come quello a benzina.

Va tuttavia tenuto conto anche degli aspetti negativi che il motore diesel presenta e cioè: potenza unitaria limitata e non suscettibile di rapidi aumenti, complessità notevole della macchina e quindi maggiori oneri di manutenzione, abbondante produzione di ossidi di azoto e di particolato.

Ciclo Termodinamico

Il ciclo *Diesel* è formato da due isoentropiche una isobara ed una isocora, come indicato in Figura 54. La fase di combustione avviene insufflando, ad alta pressione (oltre 100 bar e oggi si possono avere pressioni elevatissime fino ad oltre 2000 bar nei diesel *common rail*), gasolio nebulizzato in piccolissime goccioline nel cilindro ove si trova aria compressa nelle condizioni del punto B e quindi ad una temperatura di circa 900 °C, sufficiente per fare avvenire la combustione. Non occorre alcun dispositivo elettrico di accensione, come si ha nel motore a benzina, e la trasformazione avviene ad una pressione che si può ritenere, almeno *idealmente*, costante poiché durante la combustione si ha un aumento di volume della camera di combustione per effetto del movimento del pistone. Pertanto la cessione di calore avviene a temperatura variabile e quindi la trasformazione è **esternamente irreversibile**.

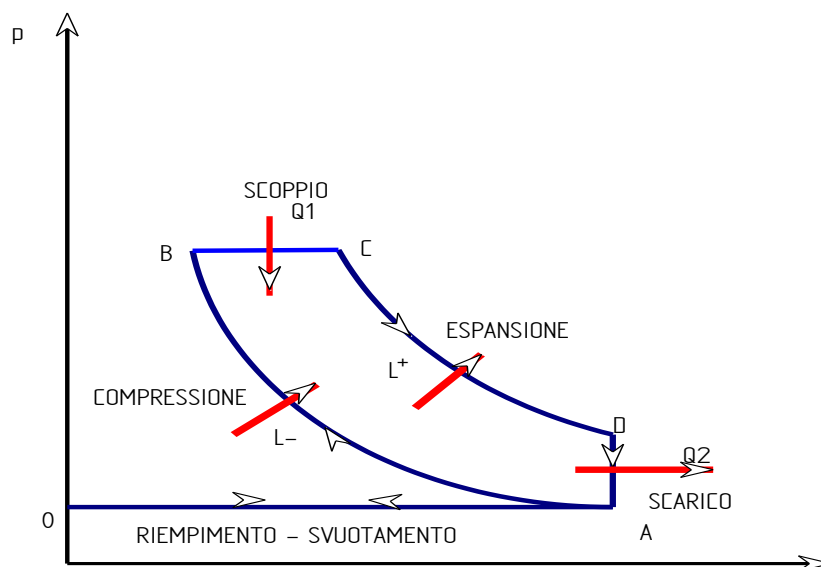


Figura 53: Ciclo Diesel nel piano (p,v)

Il rendimento del ciclo *Diesel* si calcola facilmente applicando i concetti sin qui studiati. In particolare si ha:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{Q_{BC}}$$

Il calore scambiato lungo la isobare e la isocora¹³ vale:

$$Q_{BC} = c_p (T_C - T_B)$$

$$Q_{AD} = c_v (T_D - T_A)$$

Sostituendo nell'espressione del rendimento si ha, ricordando l'espressione del rapporto adiabatico:

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{k(T_C - T_B)}$$

¹³ Si osservi che lungo la isocora vale la relazione $\delta q = du + pdv$ e quindi $\delta q = du$. Supponendo il fluido di lavoro ideale vale ancora la relazione $\delta q = du = c_v dT$.

Possiamo ora scrivere, per la trasformazione isoentropica AB:

$$\frac{T_B}{T_A} = r_v^{k-1}$$

ove r_v è sempre il rapporto di compressione volumetrico $r_v = v_A/v_B$. Da questa relazione si deduce:

$$T_A = T_B \left(\frac{1}{r_v} \right)^{k-1}$$

Per l'isobara che esprime il processo di combustione si può ancora scrivere:

$$\frac{T_C}{v_C} = \frac{T_B}{v_B}$$

Che si può scrivere nella forma:

$$T_C = T_B r_c$$

ove r_c è il *rapporto di combustione* definito dalla relazione:

$$r_c = \frac{v_C}{v_B} \quad (78)$$

con i simboli di Figura 54. Per l'isoentropica CD si ha:

$$\frac{T_D}{T_C} = \left(\frac{v_C}{v_D} \right)^{k-1} = \left(\frac{v_C}{v_B} \frac{v_B}{v_D} \right)^{k-1} = \left(\frac{r_c}{r_v} \right)^{k-1}$$

Ne segue, che per le precedenti relazioni si ha:

$$T_D = T_B r_c \left(\frac{r_c}{r_v} \right)^{k-1}$$

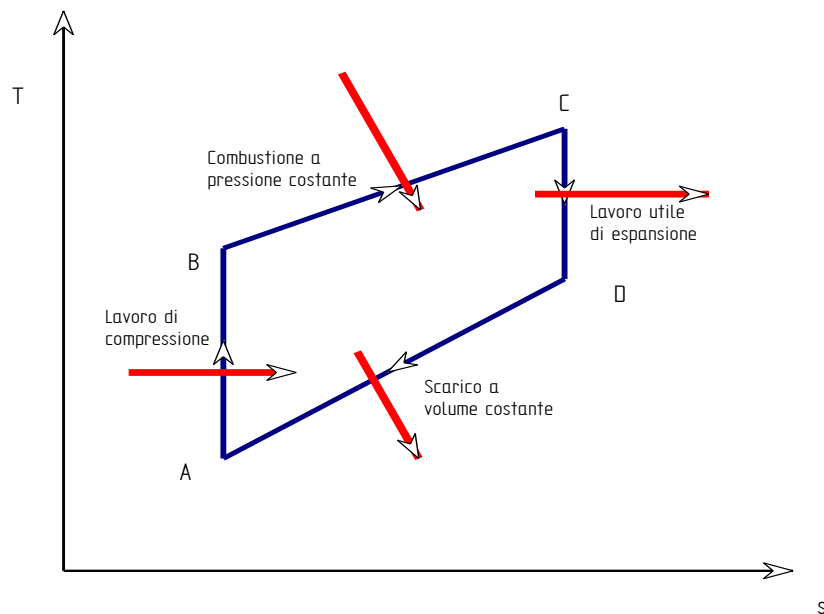


Figura 54: Ciclo ideale Diesel

L'espressione del rendimento, sostituendo i valori delle temperature T_A , T_C e T_D , diviene:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \left[\frac{r_c^k - 1}{k(r_c - 1)} \right] \quad (79)$$

Osservando questa espressione troviamo che a secondo membro si ha, escludendo la parentesi quadra, il rendimento del ciclo *Otto* corretto da un rapporto (*parentesi quadra*) che dipende dal *rapporto di combustione* r_c .

A pari rapporto di compressione r_v il rendimento del ciclo *Diesel* è minore di quello *Otto* e questo farebbe supporre una poca convenienza di questo ciclo, vedi Figura 55.

I rendimenti di questo ciclo sono elevati, rispetto ai cicli *Otto*, poiché si può comprimere solo aria nella fase AB evitando i fenomeni di *autodetonazione* delle benzine. In realtà il pregio del ciclo *Diesel* deriva dalla possibilità di iniettare gasolio nel cilindro dopo la fase di compressione AB e quindi senza avere il pericolo della *autodetonazione* tipico delle benzine.

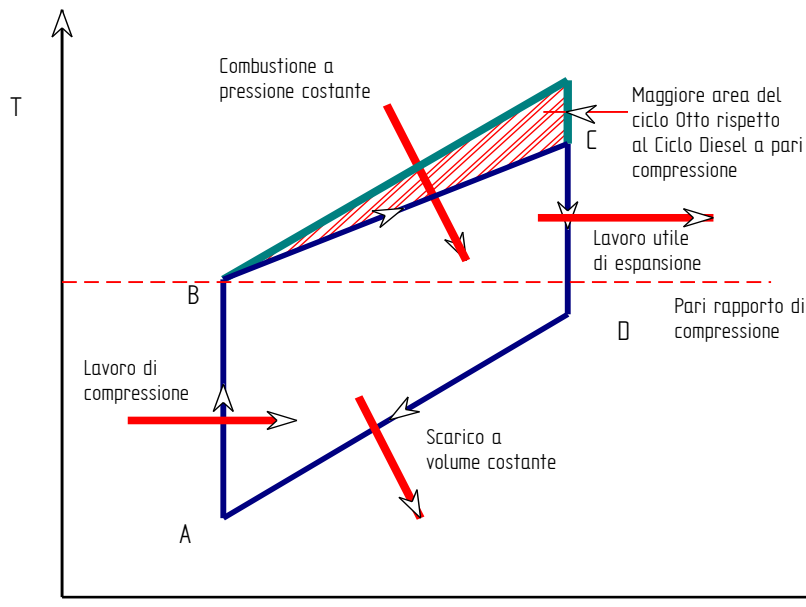


Figura 55: Confronto fra ciclo Otto e Diesel a pari rapporto di compressione

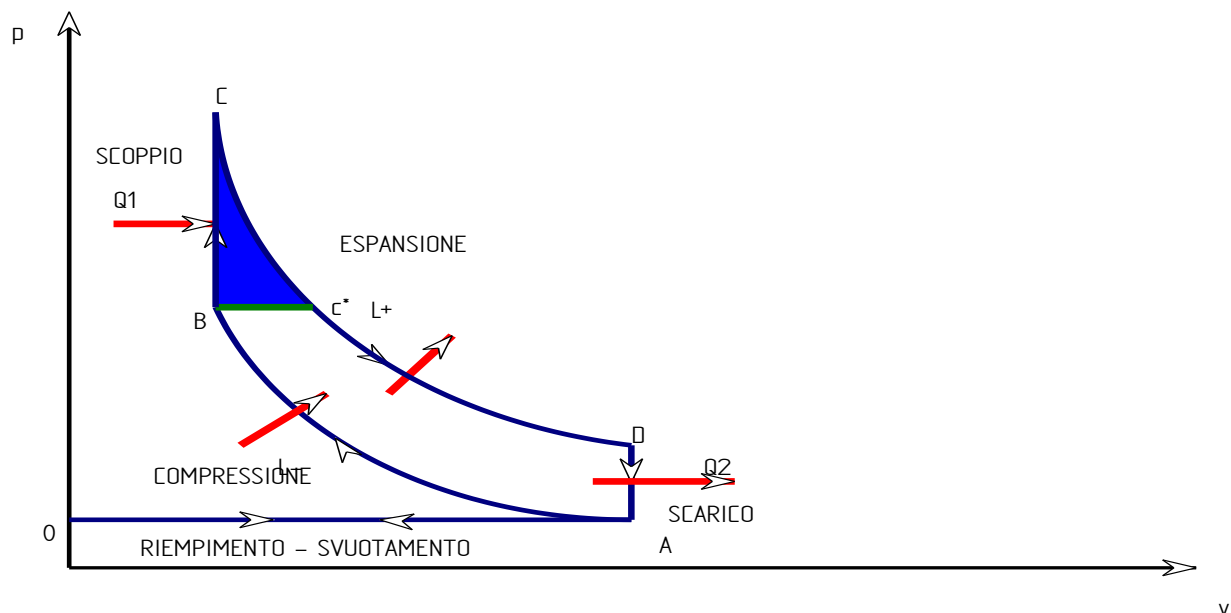


Figura 56: Confronto fra i cicli Otto e Diesel a pari rapporto di compressione nel piano (p,v)

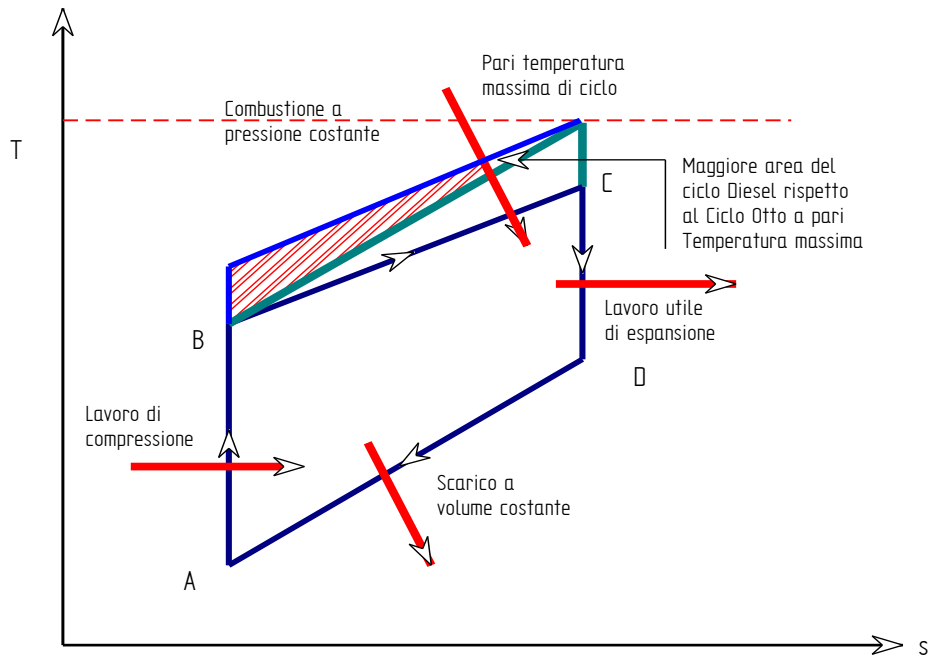


Figura 57: Confronto fra i cicli Otto e Diesel a pari temperatura massima

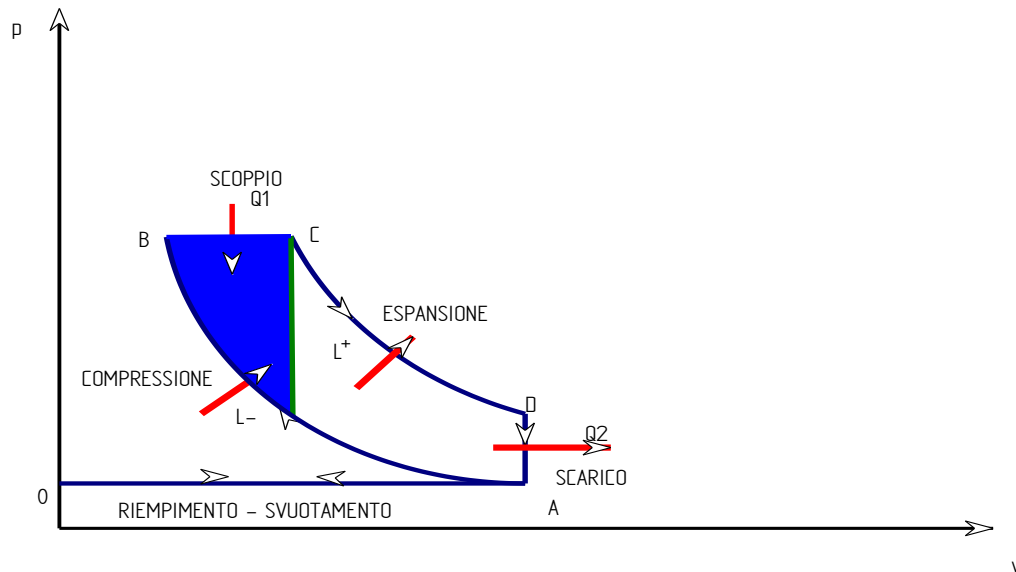


Figura 58: Confronto fra i cicli Otto e Diesel a pari temperatura massima nel piano (p,v)

Pertanto questo motore ha *rapporti di compressione* ben più elevati rispetto a quelli dei motori *Otto* e in queste condizioni operative, quindi a pari temperatura massima raggiungibile dai materiali di costruzione, si ha un rendimento maggiore, vedi Figura 57. Per avere un esempio concreto, oggi i normali motori *Otto* hanno $r_v = 6 \div 10$ mentre i *Diesel* veloci hanno $r_v = 25 \div 50$. Si osservi che il ciclo reale è ben distante da quello ideale qui considerato e il diagramma *all'indicatore* è una specie di scarpetta tutta interna al ciclo limite ideale. L'iniezione del gasolio è realizzata con pompe ad elevata efficienza con nebulizzatori molto efficaci alimentati da pressioni a monte di $130 \div 180$ bar. Nel caso di iniezione diretta con pompe ad alta pressione (*common rail*) si raggiungono circa 2500 bar. Di recente si sono sviluppati i cicli misti, cicli *Sabathè*, caratteristici dei diesel veloci. Si raggiungono 6000 g/m e anche più ed hanno alti rendimenti. L'andamento di un ciclo *Diesel* reale nel piano di *Clapeyron* è dato in Figura 59. Anche per questo ciclo si ha la *scarpetta* caratteristica dei cicli reali.

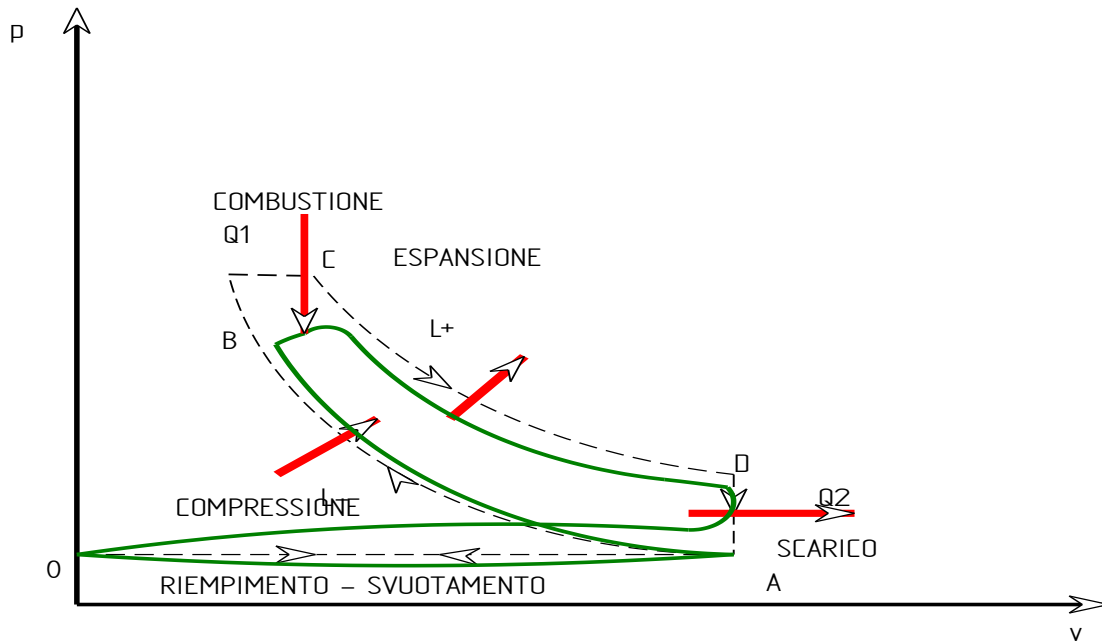


Figura 59: Ciclo Diesel reale nel piano (p, v)

La fase di combustione avviene con un certo prolungamento dovuto all'azione degli iniettori. La combustione iniziale è più rapida (*primo fronte di fiamma*) mentre quella secondaria avviene con un maggior tempo in funzione della quantità di combustibile da iniettare e della polverizzazione ottenuta dagli iniettori. Con l'evolversi dei motori automobilistici la fase iniziale (*primo fronte di fiamma*) è divenuta molto efficace e rapida tanto da suggerire l'evoluzione termodinamica verso il ciclo *Sabathè*.

5.4.3 CICLO SABATHE'

Il ciclo *Sabathè* si può considerare una evoluzione del *Diesel*. Aumentando la velocità, infatti, la fase di combustione non può più considerarsi a pressione costante perché la velocità del pistone è parecchio elevata e quindi non si può immaginare di esaurire la fase di iniezione del combustibile nella sola vicinanza del punto morto superiore del moto del pistone.

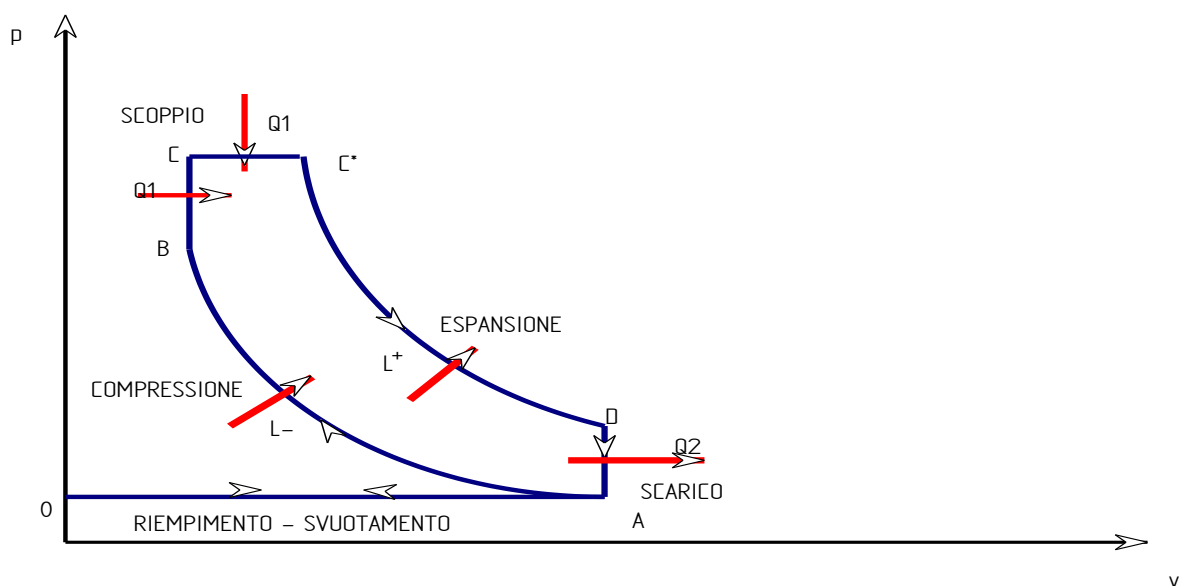


Figura 60: Ciclo Sabathè nel piano (p, v)

Si può immaginare che all'inizio, vicino al punto morto superiore del pistone, si abbia una combustione che avviene a volume costante e poi in secondo tempo, con lo spostarsi del pistone, a pressione costante.

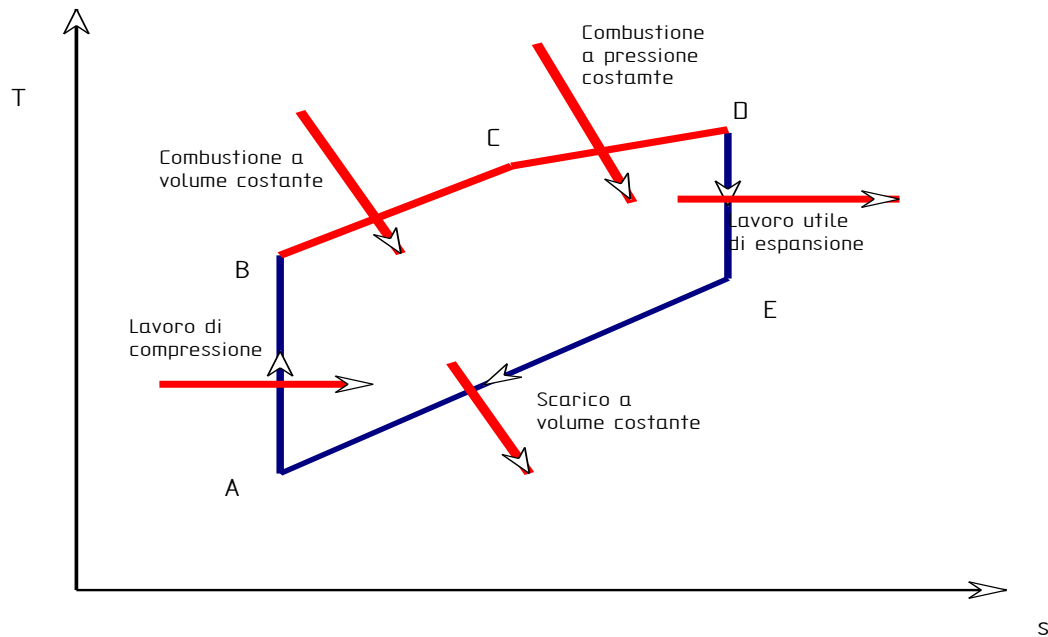


Figura 61: Ciclo ideale Sabathè

In definitiva si ha l'andamento di Figura 61. In pratica il ciclo *Sabathè* si può considerare un misto fra il ciclo *Otto* (nella fase iniziale) e il ciclo *Diesel* (in secondo tempo). Il rendimento del ciclo è dato dalla relazione:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{EA}|}{Q_{BC} + Q_{CD}} = 1 - \frac{T_E - T_A}{(T_C - T_B) + k(T_D - T_C)}$$

Definiamo, con riferimento al ciclo di Figura 61, il *rapporto delle pressioni* r_p dato da: $r_p = \frac{p_C}{p_B}$

Allora procedendo in analogia a quanto fatto per il ciclo Diesel ed esprimendo le temperature dei vari punti in funzione della temperatura T_B si ottiene l'espressione del rendimento termodinamico ideale:

$$\eta = \frac{1}{r_v^{k/1}} \frac{r_p r_c^k - 1}{(r_p - 1) + k r_p (r_c - 1)}$$

Questa relazione ci dice che il rendimento del ciclo *Sabathè* è intermedio fra quello *Otto* (primo rapporto a secondo membro) e *Diesel* (secondo rapporto a secondo membro). Se si pone $r_c = 1$ si ha la coincidenza con il ciclo *Otto* e analogamente se si pone $r_p = 1$ si ha la coincidenza con il ciclo *Diesel*.

I cicli diesel di seconda generazione, detti *common rail*, si avvicinano molto alle condizioni ideali di Sabathè grazie all'elevata pressione usata per l'alimentazione con gli iniettori.

Si hanno pressioni elevatissime comprese fra 1200 e 2500 bar. Il combustibile viene posto all'interno di un grosso cilindro comune (detto appunto *common rail*) che, a pressione elevatissima, alimenta gli iniettori garantendo una elevata polverizzazione delle goccioline di gasolio e quindi una combustione più efficace e rapida.

L'elevata pressione consente anche una ripresa migliore del motore e quindi una migliore brillantezza d'uso.

5.4.4 COMBUSTIBILI UTILIZZATI DAI DIESEL

I Diesel possono utilizzare, nelle versioni industriali, diversi tipi di oli combustibili e quindi sia frazioni leggere, come il gasolio, che frazioni pesanti.

Le caratteristiche delle frazioni leggere sono:

<i>Proprietà</i>	<i>Valori</i>	<i>Unità di Misura</i>
<i>Densità</i>	<i>835÷870</i>	<i>Kg/m³</i>
<i>Viscosità a 40 °C</i>	<i>2.1÷13</i>	<i>CSt</i>
<i>Viscosità a 50 °C</i>	<i>1.1÷1.8</i>	<i>°E</i>
<i>Residuo Conradson (max)</i>	<i>6</i>	<i>%</i>
<i>Ceneri (max)</i>	<i>0.02</i>	<i>%</i>
<i>Acqua e sedimenti (max)</i>	<i>0.3</i>	<i>%</i>
<i>Zolfo</i>	<i>2.5</i>	<i>%</i>
<i>Potere Calorifico Inferiore</i>	<i>42.7</i>	<i>MJ/kg</i>

Tabella 2: Proprietà dei frazioni leggere per Diesel

Le proprietà delle frazioni pesanti sono:

<i>Proprietà</i>	<i>Valori</i>	<i>Unità di Misura</i>
<i>Densità</i>	<i>950÷990</i>	<i>Kg/m³</i>
<i>Viscosità a 38 °C</i>	<i>75÷120</i>	<i>°E</i>
<i>Residuo Conradson (max)</i>	<i>16</i>	<i>%</i>
<i>Acqua (max)</i>	<i>0.3</i>	<i>%</i>
<i>Ceneri (max)</i>	<i>0.03</i>	<i>%</i>
<i>Asfaltini (max)</i>	<i>4÷11</i>	<i>%</i>
<i>Zolfo (max)</i>	<i>1÷4</i>	<i>%</i>
<i>Potere Calorifico Inferiore</i>	<i>41</i>	<i>MJ/kg</i>
<i>Vanadio</i>	<i>100÷200%</i>	<i>ppm</i>
<i>Sodio</i>	<i>20÷80%</i>	<i>ppm</i>

Tabella 3: Proprietà dei frazioni pesanti per Diesel

Si osservi che il *residuo Conradson* e le *ceneri* influiscono molto sullo sporco e sull'usura del motore. Il *tenore di vanadio* e di *sodio* influenza il grado di corrosione ad elevata temperatura e la formazione di depositi sulle valvole. Infine il *tenore di zolfo* influenza la corrosione nel motore e negli scambiatori di recupero termico dei gas di scarico. Le frazioni leggere possono essere usate nei diesel veloci ed automobilistici mentre le frazioni pesanti possono essere usate solo nei diesel lenti con opportune scelte di materiali (testate in ghisa).

5.5 IL CICLO JOULE - BRYTON

Negli aerei e nelle centrali di potenza di terra si utilizza il ciclo di *Joule - Bryton*. Questo è composto¹⁴, con riferimento al *ciclo ideale ad aria standard*¹⁵, da **due isobare e due isoentropiche**, come indicato in Figura 62.

¹⁴ Si rimanda ai corsi di Macchine per maggiori approfondimenti.

¹⁵ Si ricorda che un ciclo si dice ideale quando è formato da trasformazioni termodinamiche *internamente reversibili*. I cicli a combustione (ciclo *Otto*, *Diesel*, *Sabatè*, *Joule-Bryton*) utilizzano aria come comburente e benzina o gasolio o petrolio come combustibile. La combustione produce vari composti chimici detti *gas di combustione* e pertanto la composizione del fluido di lavoro (inizialmente aria esterna) viene modificata. Poiché le caratteristiche termodinamiche complessive (calore specifico, densità, costante di adiabaticità,...) non sono molto diverse da quelle dell'aria esterna allora si fa l'ipotesi (ovviamente semplificativa) di fluido di lavoro con caratteristiche costanti e coincidenti con quelle dell'*aria standard* ossia

Lungo la trasformazione AB si ha una compressione (qui supposta ideale *isoentropica*) dell'aria esterna fra la pressione p_A e la pressione p_B . La compressione viene effettuata in un compressore rotativo alimentato dalla turbina (vedi dopo) e pertanto assorbe parte dell'energia prodotta dalla stessa turbina.

Nella trasformazione BC si ha la combustione di petrolio raffinato (detto JP, *Jet Propeller*) all'interno di una camera di combustione toroidale. La combustione avviene a pressione costante perché si ha fuoriuscita dei gas di combustione in modo continuo verso l'anello di distribuzione della turbina di potenza. La trasformazione BC, anche se supposta internamente reversibile, è **esternamente irreversibile** poiché si ha cessione di calore a temperatura variabile.

La trasformazione di espansione (sempre supposta *ideale isoentropica*) CD avviene in turbina ed è proprio in essa che si ha la produzione di energia meccanica che serve in parte ad alimentare il compressore.

La differenza fra l'energia meccanica prodotta e quella assorbita dal compressore è l'*energia utile* che è possibile utilizzare esternamente al ciclo. La trasformazione isobara DA è di raffreddamento (anch'essa **esternamente irreversibile**) e può avvenire in uno scambiatore di calore (impianti fissi di terra) o in aria (impianti mobili aeronautici) cioè scaricando i prodotti di combustione nell'atmosfera esterna. Si osservi che avendo aspirato aria atmosferica con il compressore in A lo scarico equivale ad una cessione di calore all'ambiente esterno a pressione costante.

In Figura 66 si ha la vista sezionata di una turbina di tipo *aeronautico* nella quale si possono vedere i componenti fondamentali del ciclo *Joule – Bryton* e cioè il compressore, a destra in primo piano, a cui segue la camera di combustione toroidale, al centro, e poi la turbina di potenza che, per questo tipo di motore, è seguita da un *ugello di scarico* che fornisce la spinta per far muovere gli aerei.

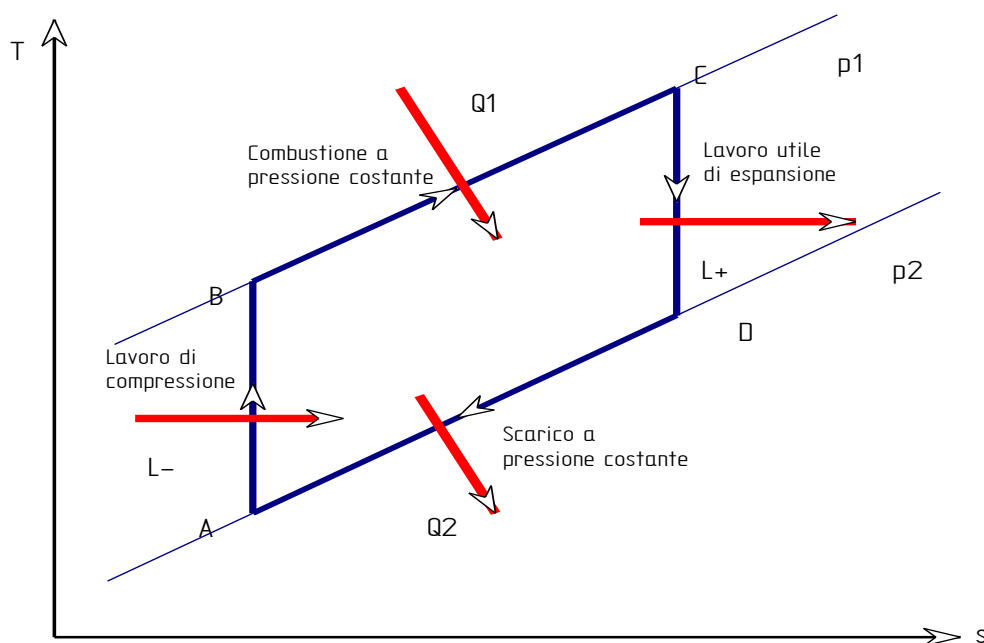


Figura 62: Ciclo Joule – Bryton con aria standard

Per gli impianti di terra si usano configurazioni impiantistiche meno compatte e con elevati carichi di lavoro (*heavy duty*) tipicamente 8000 ore/anno. Il rendimento termodinamico del ciclo Joule – Bryton si calcola facilmente ricordando che è:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{Q_{CB}}$$

dell'aria supposta come *fluido ideale* e quindi con *calori specifici costanti* al variare della temperatura. Questa ipotesi semplifica molto i calcoli termodinamici anche se è un po' lontana dalla realtà. Per quanto necessario nell'ambito di questo corso possiamo accettare pienamente questa semplificazione senza perdita di generalità.

Con riferimento ad aria standard per le due isobare si hanno le relazioni:

$$Q_{BC} = c_p (T_C - T_B)$$

$$Q_{DA} = c_p (T_D - T_A)$$

Pertanto il rendimento termodinamico vale:

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

Questa espressione può essere modificata definendo il *rapporto delle pressioni* r_p dato da:

$$r_p = \frac{p_B}{p_A} \quad (80)$$

Per le due isoentropiche si possono scrivere le relazioni:

$$\frac{T_B}{p_B^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_A}{p_A^{\frac{k-1}{k}}}$$

da cui si trae:

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C}{T_D} = r_p^{\frac{k-1}{k}} \quad [81]$$

Applicando la regola dello scomponendo ai primi due rapporti e sostituendo il risultato nell'espressione del rendimento si ottiene la relazione:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} \quad (82)$$

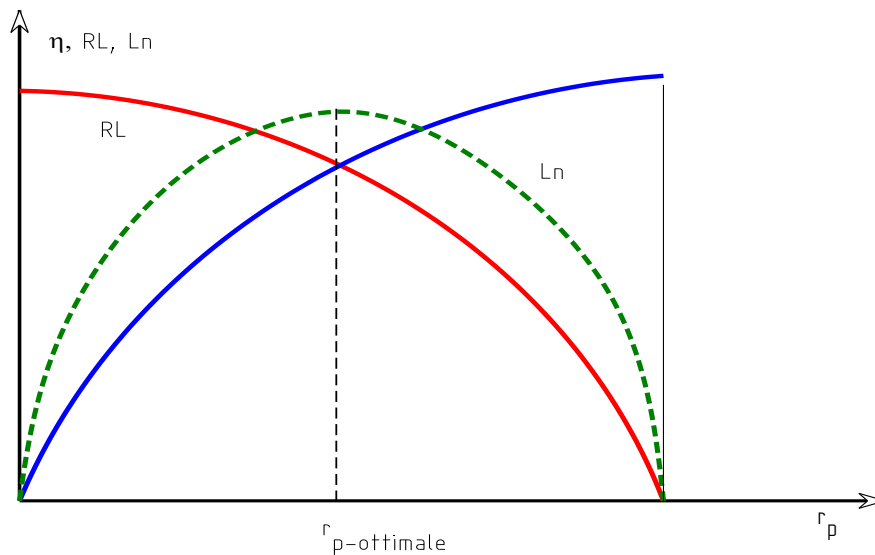


Figura 63: Andamento del rendimento del ciclo Joule – Bryton e del Rapporto dei lavori

Da questa relazione si conclude che il rendimento del ciclo *Joule – Bryton* cresce al crescere del rapporto delle pressioni. Sfortunatamente non possiamo comprimere a dismisura perché la temperatura di fine fase compressione e poi di combustione non può andare oltre i limiti tecnologici dei materiali utilizzati per la costruzione della camera di combustione e delle palette della turbina.

Con riferimento alla Figura 65 si osserva che aumentando il rapporto delle pressioni a pari T_{max} si ha un restringimento dell'area del ciclo stesso. Quando i punti B e C coincidono il ciclo si riduce ad una linea (BC) di area nulla ma di rendimento massimo (il ciclo diviene un ciclo di *Carnot* degenerare).

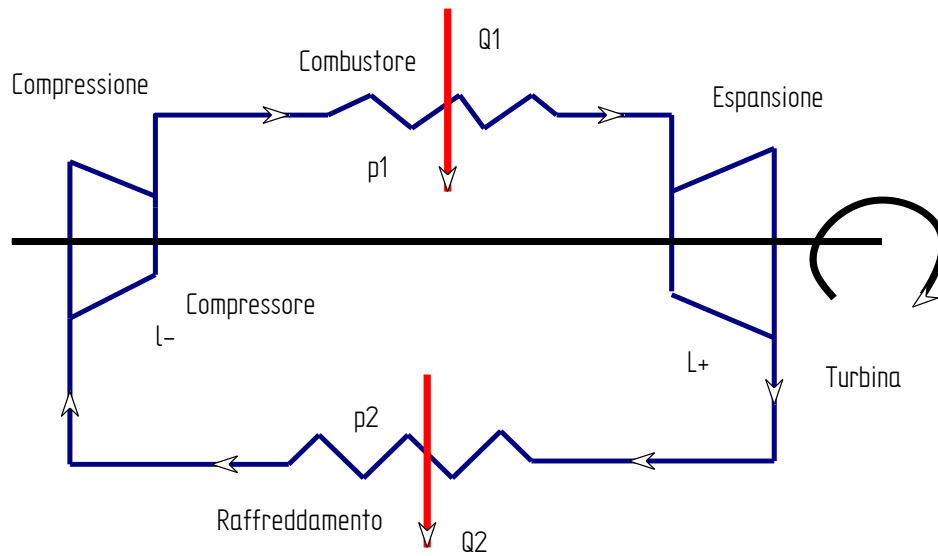


Figura 64: Layout del ciclo Joule – Bryton

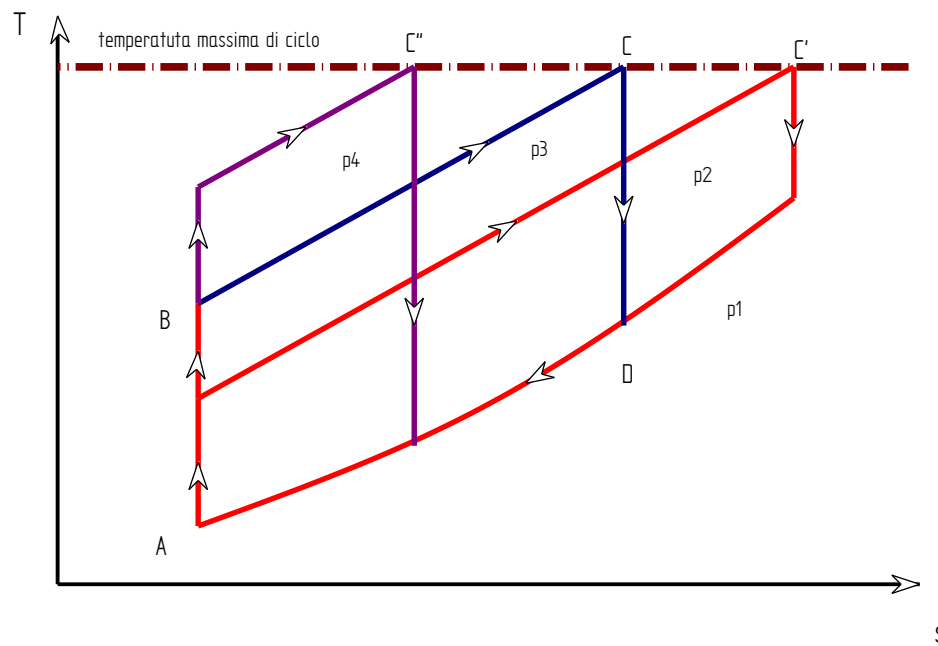


Figura 65: Andamento del ciclo J-B al variare del rapporto delle pressioni a pari T_{max}

Imponendo la condizione limite $T_B = T_C$ si ha il rapporto massimo delle pressioni dato da:

$$(r_p)_{\max} = \left(\frac{T_C}{T_A} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (83)$$

Nel ciclo Joule – Bryton il rapporto dei lavori assume un ruolo importante perché il lavoro di compressione (negativo) non è più trascurabile come avveniva nel ciclo Hirn.

Rapporto dei lavori e Backwork ratio

Poiché il lavoro prodotto dalla turbina:

$$L^+ = h_C - h_D \quad (84)$$

viene assorbito dal compressore in quantità pari a:

$$|L^-| = h_B - h_A \quad (85)$$

ne segue che il lavoro netto prodotto dal ciclo è dato dalla differenza:

$$L_n = L^+ - L^- = (h_C - h_D) - (h_B - h_A) \quad (86)$$

In termini di temperatura, per aria standard, possiamo scrivere la precedente nella forma:

$$L_n = c_p [(T_C - T_D) - (T_B - T_A)] \quad [87]$$

Si definisce *Rapporto dei lavori* il rapporto, come già detto in precedenza, fra il lavoro utile e il lavoro positivo della turbina:

$$RL = \frac{L_n}{L^+} = \frac{L_n = c_p [(T_C - T_D) - (T_B - T_A)]}{c_p (T_C - T_D)} = 1 - \frac{T_B - T_A}{T_C - T_D} \quad [88]$$

Poiché per le due isoentropiche si espansione e compressione risulta:

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_C}{T_D} = r_p^{\frac{k-1}{k}}$$

e quindi applicando la regola dello scomponendo si ottiene:

$$\frac{T_B - T_A}{T_A} = \frac{T_C - T_D}{T_D}$$

ovvero anche:

$$\frac{T_B - T_A}{T_C - T_D} = \frac{T_A}{T_D} = \frac{T_A}{T_C} \frac{T_C}{T_D}$$

Ricordando che $\frac{T_C}{T_D} = r_p^{\frac{k-1}{k}}$ si ha:

$$\frac{T_B - T_A}{T_C - T_D} = \frac{T_A}{T_C} r_p^{\frac{k-1}{k}} \quad [89]$$

Pertanto la [88] diviene, tenendo conto anche della (83):

$$RL = \frac{L_n}{L^+} = 1 - \frac{T_A}{T_C} r_p^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \left[\frac{r_p}{r_{p_{max}}} \right]^{\frac{k-1}{k}} \quad (90)$$

Il *rapporto dei lavori* è massimo per $r_p = 0$ mentre vale 0 quando $r_p = r_{p_{max}}$ come indicato in Figura 63.

In essa si può anche osservare come il lavoro utile abbia un andamento parabolico con un valore massimo corrispondente interno al rapporto delle pressioni. Inoltre a pari r_p il rapporto dei lavori è tanto più elevato quanto maggiore è il rapporto T_C/T_A fra la *temperatura massima e quella minima del ciclo*.

Si osservi che la temperatura minima T_A è, di solito, quella dell'ambiente esterno e quindi non controllata dal processo mentre la T_C è la temperatura massima che dipende dalla temperatura di combustione e dalla resistenza dei materiali utilizzati. Si tratta, quindi, di un **limite tecnologico** che varia nel tempo con il perfezionarsi della tecnologia dei materiali. Spesso è utile utilizzare il rapporto:

$$bwr = \frac{L^-}{L^+} \quad [91]$$

detto *backwork ratio* (*rapporto del lavoro negativo*). Procedendo come già indicato in precedenza si ha:

$$bwr = \frac{h_B - h_A}{h_C - h_D} = \frac{T_B - T_A}{T_C - T_D}$$

Per la [89] si ha anche:

$$bwr = \frac{T_A}{T_C} r_p^{\frac{k-1}{k}} \quad [92]$$

Pertanto il *rapporto dei lavori* è anche espresso dalla relazione:

$$RL = 1 - bwr \quad [93]$$

La [87] ci dice che il *rapporto dei lavori* è funzione di una differenza e che pertanto, escludendo i valori negativi, si ha una variabilità da un valore minimo (lo zero) ed uno massimo.

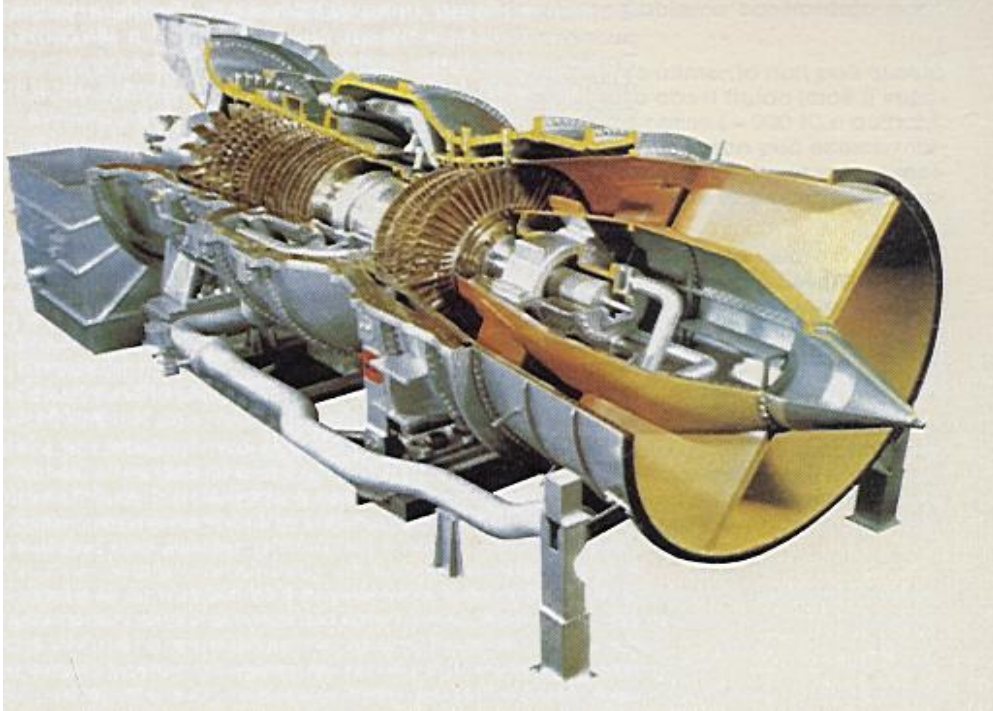


Figura 66: Ciclo Bryton in una turbina di tipo aeronautico

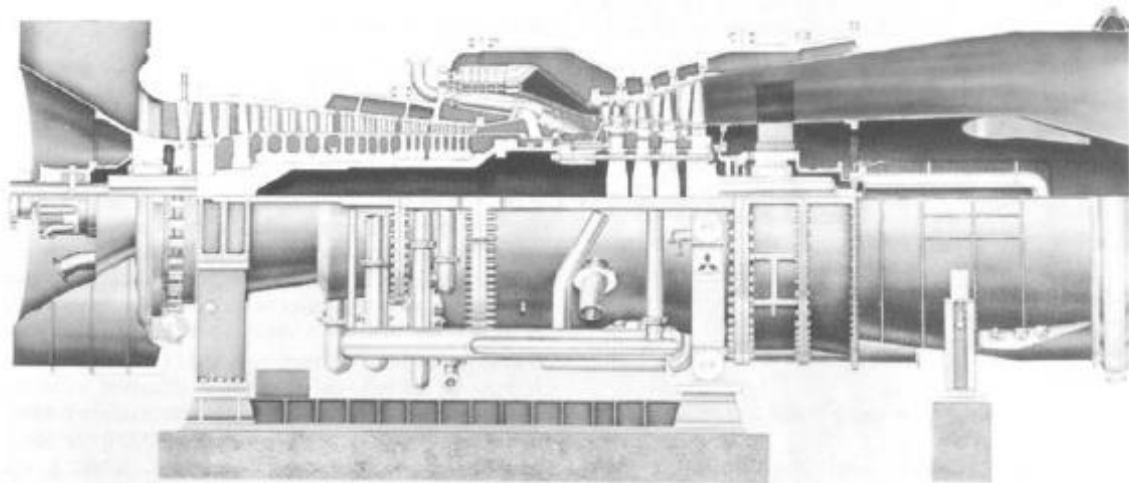


Figura 67: Turbina a gas heavy duty Mitsubishi da 131 MW

Possiamo, infatti, scrivere la [87] in modo opportuno:

$$L_n = c_p [(T_C - T_D) - (T_B - T_A)] = c_p \left[T_C \left(1 - \frac{T_D}{T_C} \right) - T_A \left(\frac{T_A}{T_B} - 1 \right) \right]$$

Tenendo conto della [81] si ottiene:

$$L_n = c_p \left[T_C \left(1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} \right) - T_A \left(r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \right] \quad [94]$$

Per trovare il massimo di RL occorre eguagliare a zero la derivata rispetto ad r_p e cioè:

$$\frac{\partial L_n}{\partial r_p} = \frac{\partial}{\partial r_p} \left[T_C \left(1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} \right) - T_A \left(r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \right] = 0$$

da cui si ha:

$$\frac{T_C}{T_A} \frac{\frac{k-1}{k} r_p^{-\frac{1}{k}}}{r_p^{\frac{2(k-1)}{k}}} - \frac{k-1}{k} r_p^{\frac{-1}{k}} = 0$$

ovvero:

$$\frac{T_C}{T_A} r_{p_{ott}}^{-\frac{2(k-1)}{k}} - 1 = 0$$

da cui si ricava:

$$r_{p_{ott}} = \left(\frac{T_C}{T_A} \right)^{\frac{k}{2(k-1)}}$$

e quindi, ricordando l'espressione (83) si ha:

$$r_{p_{ottimale}} = \sqrt{r_{p_{max}}} = \left(\frac{T_C}{T_A} \right)^{\frac{k}{2(k-1)}} \quad (95)$$

In Figura 63 si ha l'andamento del rendimento e della curva RL per un ciclo ideale ed assegnato rapporto fra le temperature massima e minima di ciclo. Si può osservare che il rapporto ottimale è ben diverso da quello massimo e che al crescere di questo rapporto oltre il valore ottimale aumenta il lavoro negativo e quindi diminuisce il lavoro netto.

I cicli Joule – Bryton sono caratterizzati da uno sviluppo di grandi potenze con piccoli volumi di impianto. In Figura 63 si ha un tipico andamento del rendimento e del *rapporto dei lavori* in un ciclo ideale. Ciò è dovuto al fatto che, diversamente dai motori a scoppio (sia a benzina che diesel) essi producono potenza in continuità.

I rendimenti vanno dal 25% al 35% a seconda del rapporto delle pressioni utilizzato e del rapporto fra la temperatura massima e la minima del ciclo. Si tratta di valori lontani dai rendimenti dei cicli a vapore (circa 40% e oltre nei moderni impianti) e pertanto la produzione di grandi potenze elettriche è oggi sempre più delle centrali a vapore (sia tradizionali che nucleari) mentre i cicli a gas sono considerati complementari ai cicli a vapore.

5.5.1 CICLI JOULE - BRYTON CON TRASFORMAZIONI NON ISOENTROPICHE

Si è già detto che i cicli che lavorano con rapporto dei lavori non vicini all'unità sono caratterizzati da una forte sensibilità alle irreversibilità del sistema. Poiché il *rapporto ottimale delle pressioni* varia, di norma, fra 0.4 ÷ 0.6 si deve concludere che questo ciclo, diversamente dal ciclo Rankine o Hirn, soffre molto le irreversibilità di sistema, secondo quanto indicato in Figura 24. Studiamo allora il ciclo J-B assumendo che le trasformazioni di espansione in turbina e di compressione nel compressore non siano più ideali (isoentropiche) ma solamente adiabatiche (e quindi irreversibili), secondo quanto indicato in Figura 68.

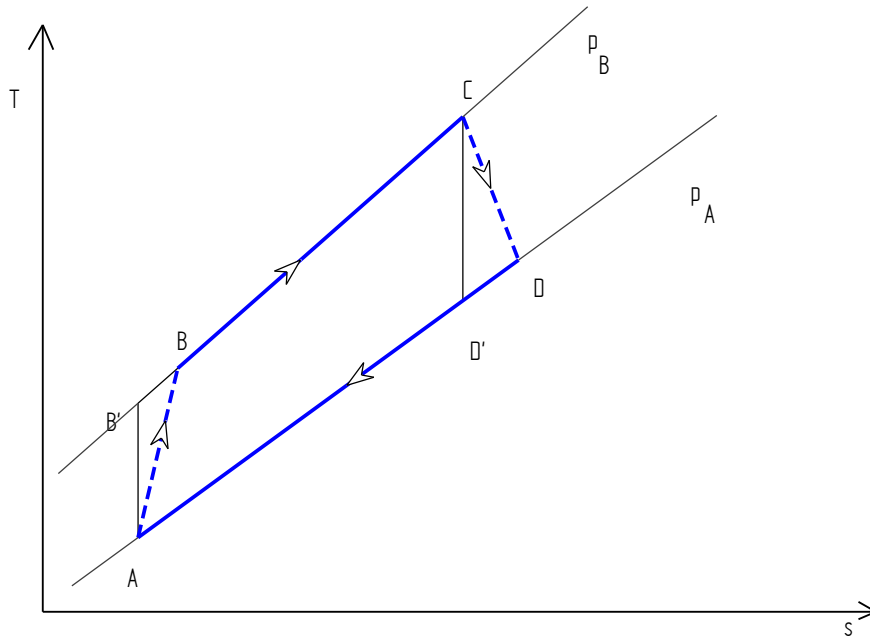


Figura 68: Ciclo Joule Bryton con trasformazioni adiabatiche

L'effetto delle trasformazioni adiabatiche può essere tenuto in conto mediante i rendimenti isoentropici di espansione e di compressione che sono indicati, rispettivamente, con η_{ie} ed η_{ic} . Il rendimento termodinamico ideale¹⁶, cioè riferito ancora all'aria standard, è dato dal rapporto:

$$\eta = \frac{(h_C - h_D) - (h_B - h_A)}{h_C - h_B} = \frac{(T_C - T_D) - (T_B - T_A)}{T_C - T_B} \quad [96]$$

I rendimenti isoentropici sono dati dai rapporti:

$$\eta_{ic} = \frac{T_{B'} - T_A}{T_B - T_A} \quad ; \quad \eta_{ie} = \frac{T_C - T_D}{T_C - T_{D'}} \quad [97]$$

Pertanto, sostituendo, si ottiene:

$$T_B - T_A = \frac{T_{B'} - T_A}{\eta_{ic}} = T_A \frac{r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_{ic}} \quad [98]$$

e ancora:

$$T_C - T_D = \eta_{ie} (T_C - T_{D'}) = \eta_{ie} T_C \left(1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} \right) \quad [99]$$

Inoltre si ha:

$$\frac{T_B}{T_A} = 1 + \frac{T_B - T_A}{T_A} = 1 + \frac{r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_{ic}} \quad [100]$$

Sostituendo le ultime tre espressioni in quella del rendimento si ottiene:

¹⁶ Si osservi che l'aver indicato trasformazioni adiabatiche al posto delle isoentropiche non ha del tutto reso *reale* il ciclo in esame. Non si stanno considerando, infatti, gli effetti di attrito interno nel moto dei fluidi e quindi le cadute di pressione. Inoltre le trasformazioni reali sono più vicine alle politropiche che alle adiabatiche. Questi approfondimenti sono oggetto del Corso di Macchine.

$$\eta = \frac{\eta_{ie} \frac{T_C}{T_A} \left(1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} \right) - \frac{1}{\eta_{ic}} \left(r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{\frac{T_C}{T_A} - 1 - \frac{1}{\eta_{ic}} \left(r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)} \quad [101]$$

che è l'espressione cercata del rendimento ideale per trasformazioni adiabatiche. Un confronto con la (82) relativa al ciclo ideale isoentropico ci dice che nelle nuove ipotesi il rendimento dipende dal rapporto delle temperature massima e minima (T_C/T_A), dal rapporto delle pressioni r_p e dai rendimenti isoentropici di espansione e di compressione.

In Figura 69 si ha l'andamento del rendimento reale per rapporti T_C/T_A pari a 3,5 e 5, con $\eta_{ic}=0,82$, $\eta_{ie}=0,84$ e per il caso ideale. Al crescere del rapporto fra le temperature si ha un benefico effetto sul rendimento che tende verso quello ideale. L'effetto delle irreversibilità è ben visibile ed è più marcato quanto minore è il rapporto delle temperature.

L'utilizzo di materiali ceramici sta oggi portando ad avere temperature di esercizio di $1300 \div 1500$ °C in camera di combustione e in turbina¹⁷ e pertanto il rapporto delle temperature più realistico è pari a 5.

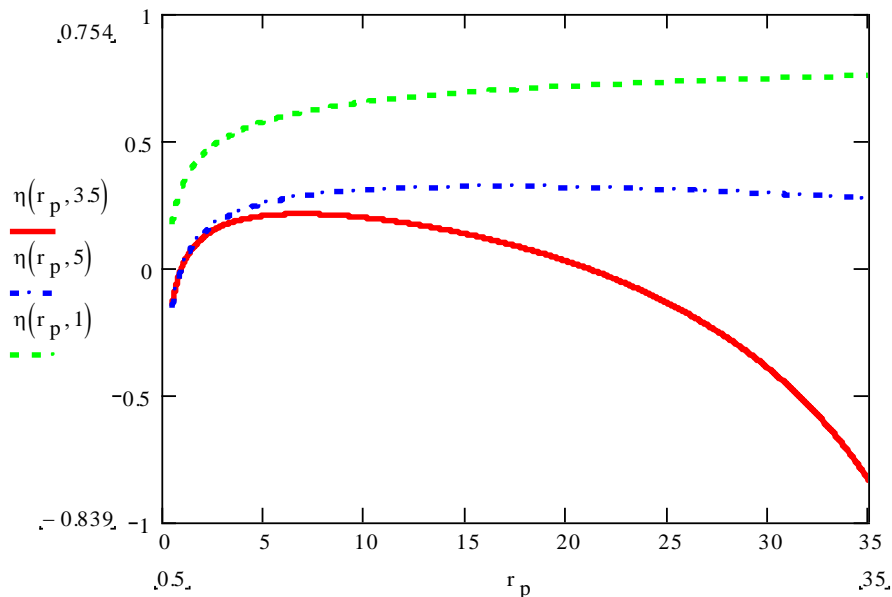


Figura 69: Rendimenti reali per T_C/T_A pari a 3,5 e 5 e ciclo ideale

Per le turbine di aereo si hanno due regimi di funzionamento: quello di regime normale ha rapporto fra le temperature inferiore (minori sollecitazioni) mentre con funzionamento con post bruciatore si ha un rapporto tendente a 5. Nelle turbine per impianti di terra il rapporto delle temperature può essere elevato sia per la maggior sicurezza delle installazioni fisse che per la costruzione più robusta delle turbine poiché il peso complessivo riveste minore importanza rispetto alle turbine di aereo.

Rapporto dei lavori per cicli non isoentropici

Il rapporto dei lavori per il ciclo non isoentropico di Figura 68 è dato dalla relazione:

$$L_n = c_p \left[(T_C - T_D) - (T_B - T_A) \right]$$

¹⁷ Nella turbina di espansione l'organo più sollecitato è il distributore del primo anello che è attraversato dai prodotti di combustione alla temperatura più elevata.

In base a quanto detto per le trasformazioni adiabatiche di espansione e compressione si può ancora scrivere:

$$L_n = c_p \left[\eta_{ie} T_C \left(1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} \right) - \frac{T_A}{\eta_{ic}} \left(r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \right] \quad [102]$$

Il rapporto ottimale delle pressioni si determina ancora derivando rispetto ad r_p ed eguagliando a zero. Si ottiene così:

$$(r_p)_{ott} = \left(\frac{T_C}{T_A} \eta_{ie} \eta_{ic} \right)^{\frac{k}{2(k-1)}} = \sqrt{r_{p_{max}} \eta_{ie} \eta_{ic}} \quad [103]$$

Pertanto, essendo il prodotto dei due rendimenti isoentropici (ciascuno minore di 1) minore di ciascuno di essi, ne deriva che il rendimento ottimale reale diminuisce ulteriormente rispetto a quello ideale. Le irreversibilità dovute all'allontanamento dalle condizioni ideali di isoentropicità comportano un pesante riduzione sia del rendimento che del rapporto ottimale delle pressioni.

5.5.2 CICLI JOULE – BRYTON RIGENERATIVI

Se consideriamo ancora il ciclo ideale di Figura 62 si può osservare come le temperature di uscita dalla turbina siano più elevate di quella di fine compressione.

Nasce quindi l'idea di potere in parte rigenerare, nel senso già descritto per il ciclo Hirn, il ciclo trasferendo parzialmente calore dalla fase di raffreddamento¹⁸ DA alla fase di riscaldamento BC, come illustrato nella Figura 82. In questo caso il calore trasferito lungo la fase di raffreddamento DF viene ceduto al fluido in riscaldamento lungo la fase BE, come illustrato nella Figura 71.

Il layout del ciclo così modificato è riportato nella Figura 72: uno scambiatore di calore posto in uscita dalla turbina provvede a preriscaldare i gas compressi prima dell'immissione in camera di combustione.

Il calore ceduto per riscaldamento (EC) è ora in quantità minore rispetto al ciclo ideale senza rigenerazione (BC) con beneficio sul rendimento termodinamico del ciclo che ora possiamo scrivere nella forma:

$$\eta = \frac{(T_C - T_D) - (T_B - T_A)}{T_C - T_E} = 1 - \frac{T_B - T_A}{T_C - T_D} \quad [104]$$

avendo posto, come si può osservare dalla Figura 70, $T_D = T_E$.

Il secondo membro di questa relazione si può ancora scrivere, per quanto osservato per la [88] e tenuto conto della (90):

$$\eta = 1 - \frac{T_A}{T_C} r_p^{\frac{k-1}{k}} \quad [105]$$

Pertanto il rendimento di un ciclo rigenerativo non dipende più dal solo *rapporto delle pressioni* r_p ma anche dal rapporto delle temperature minima e massima T_A/T_C .

Per $r_p \rightarrow 1$ il rendimento del ciclo rigenerativo tende a quello ideale di Carnot, $(1 - T_A/T_C)$ e quindi il rendimento η diviene tanto maggiore quanto minore è il rapporto delle pressioni.

In Figura 73 si ha la rappresentazione del rendimento del ciclo J-B ideale con rigenerazione per due valori del rapporto delle temperature. Nella stessa figura è riportato l'andamento del rendimento del solo ciclo ideale.

¹⁸ Nei cicli aeronautici e spesso in quelli fissi di terra la fase DA di raffreddamento è sostituita con lo scarico dei prodotti combusti in aria. L'isobara p_A è quella ambiente e il calore di scarico è ceduto all'aria ambiente. Il ciclo si ricostituisce riprendendo dallo stesso ambiente aria fresca nelle condizioni A.

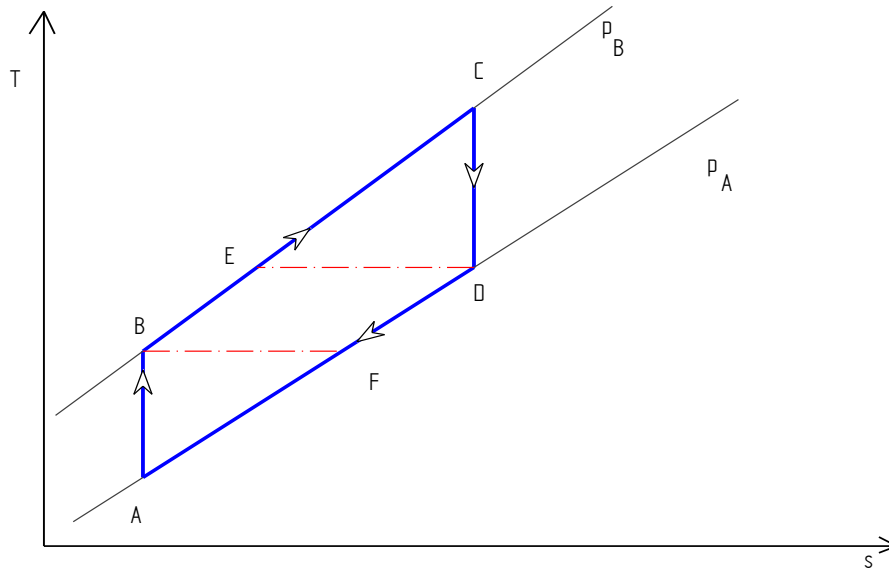


Figura 70: Rigenerazione termica in un ciclo J-B ideale

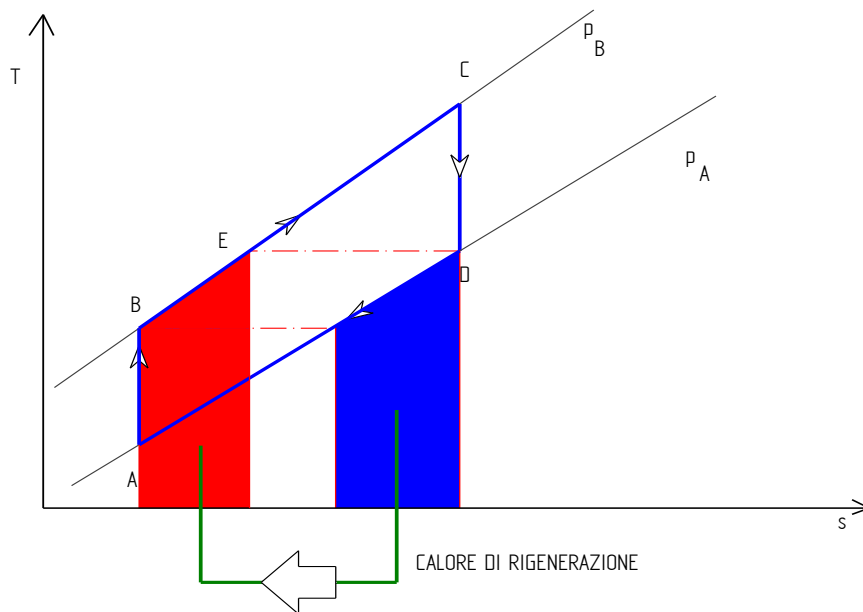


Figura 71: Ciclo rigenerativo con l'evidenziazione del calore trasferito

Si osservi come le curve con rigenerazione termica incontrino la curva senza rigenerazione in corrispondenza del rapporto delle pressioni dato dalla relazione:

$$1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} = 1 - \frac{T_A}{T_C} r_p^{\frac{k-1}{k}}$$

ovvero per il valore:

$$r_p = \left(\frac{T_C}{T_A} \right)^{\frac{k}{2(k-1)}} = (r_p)_{ott} \quad [106]$$

Questo valore del rapporto delle pressioni è il limite massimo a cui si può pensare di applicare la rigenerazione termica. Per questo valore la temperatura dell'aria in uscita dalla turbina eguaglia quella in uscita dal compressore.

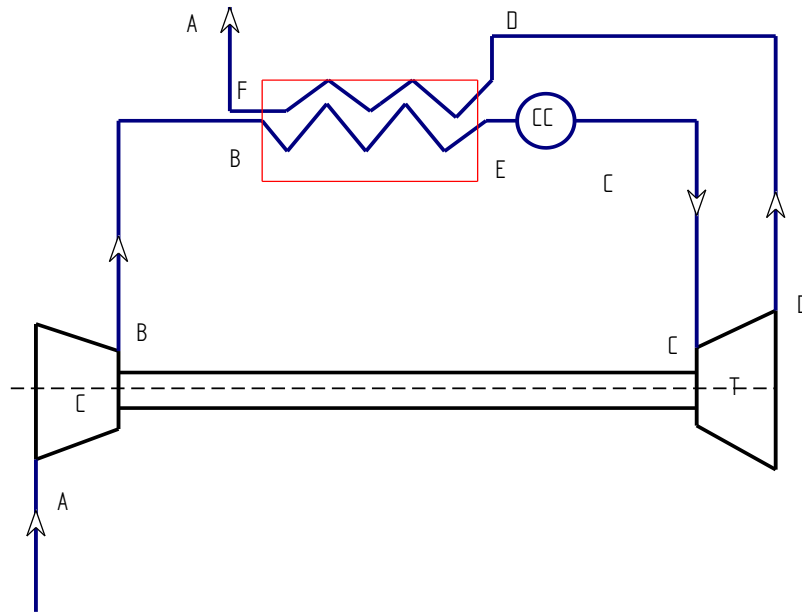


Figura 72: Layout di un ciclo Joule Bryton ideale con rigenerazione

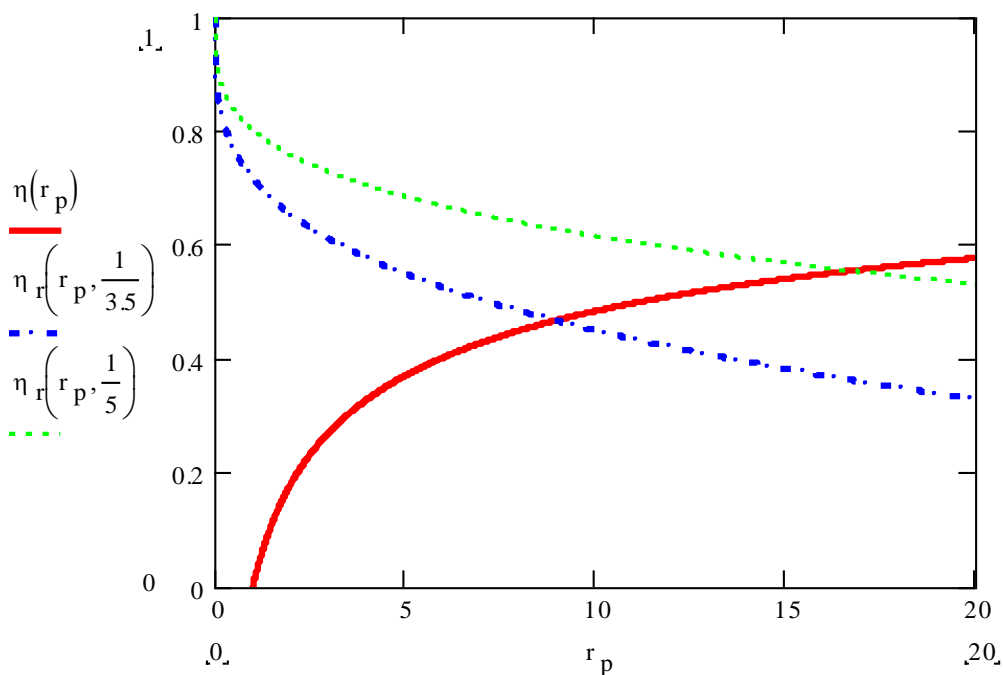


Figura 73: Andamento del rendimento del ciclo J-B ideale rigenerato e del ciclo ideale

Ciclo J-B con trasformazioni non isoentropiche e rigenerazione termica

Se adesso facciamo riferimento al ciclo Joule Bryton con trasformazioni adiabatiche ed applichiamo i concetti di rigenerazione termica otteniamo la situazione di Figura 74.

In Figura 75 si ha l'evidenziazione delle aree di scambio per il recupero termico. Si osservi che in questo caso i punti finali dello scambio termico, indicati con E ed F, sono diversi da quelli teorici

E' ed F', perché negli scambiatori reali occorre *sempre* prevedere una *differenza di temperatura* per avere un flusso termico positivo. Ciò deriva dal 2° principio della *Termodinamica*.

Si vedrà in *Trasmissione del Calore*, che si definisce **efficienza di uno scambiatore di calore** ϵ il rapporto fra il calore realmente scambiato nelle condizioni di esercizio e il calore teorico massimo che si potrebbe scambiare con una *superficie infinita* dello scambiatore di calore.

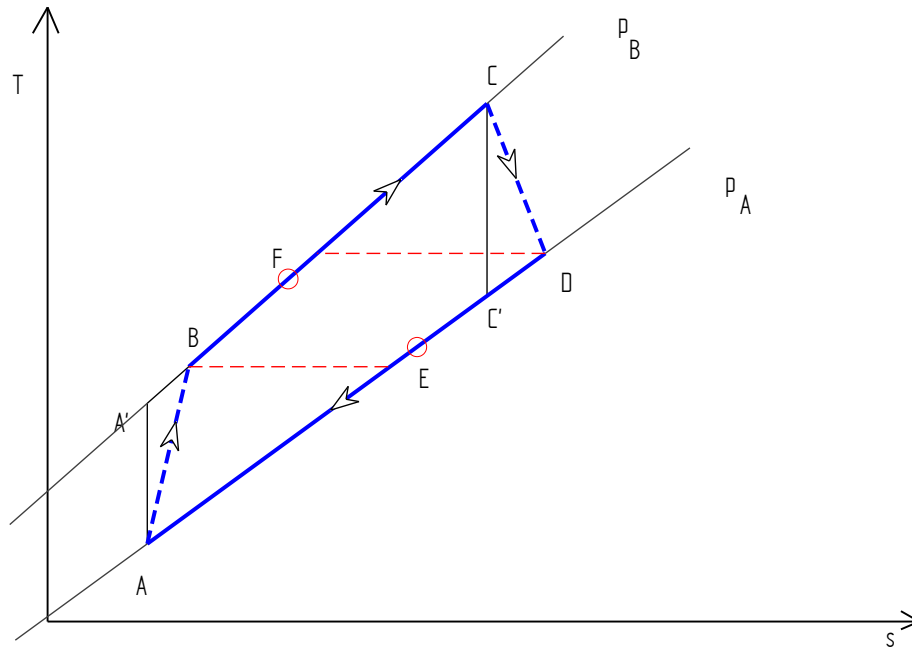


Figura 74: Ciclo reale J-B con rigenerazione termica

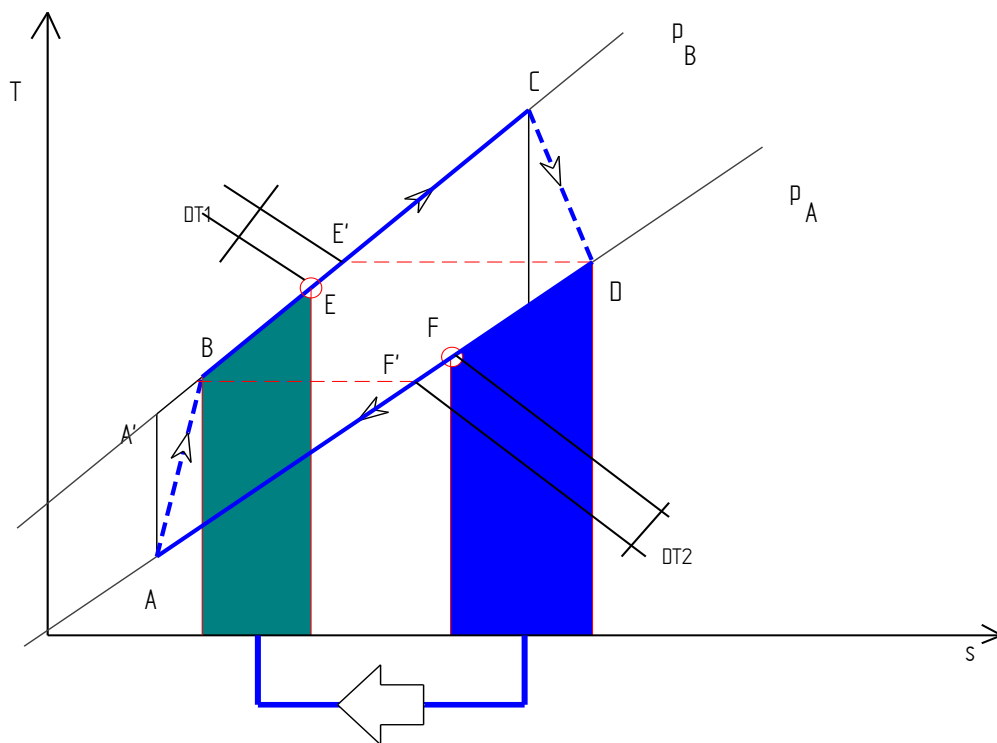


Figura 75: Ciclo rigenerativo reale con aree di scambio

Supponendo, come di regola si fa, che lo scambiatore di calore sia del tipo a *controcorrente*¹⁹, allora l'efficienza di scambio risulta data dal rapporto:

$$\varepsilon = \frac{\text{Calore_Realmente_Scambiato}}{\text{Calore_Teoricamente_scambiabile}} = \frac{c_p (T_{u_f} - T_{i_f})_{\text{Freddo}}}{c_p (T_{i_c} - T_{i_f})} = \frac{T_E - T_B}{T_D - T_B} \quad [107]$$

Il rendimento termodinamico del ciclo rigenerato reale è dato, con il simbolismo di Figura 74, da:

$$\eta = \frac{(T_C - T_D) - (T_B - T_A)}{T_C - T_E} \quad [108]$$

Possiamo ulteriormente sviluppare i calcoli relative alle differenze di temperature tenendo conto sia dell'efficienza di scambio termico che dei rendimenti isoentropici di espansione e di compressione. Risulta infatti che per il riscaldamento si ha:

$$T_C - T_E = (T_C - T_B) + (T_B - T_E)$$

da cui:

$$T_C - T_E = (T_C - T_B) - \varepsilon (T_D - T_B)$$

Tenendo conto che:

$$T_D - T_B = T_D - T_C + T_C - T_B$$

si ha ancora:

$$T_C - T_E = (1 - \varepsilon)(T_C - T_B) + \varepsilon(T_C - T_D)$$

Pertanto la [108] si può scrivere:

$$\eta = \frac{(T_C - T_D) - (T_B - T_A)}{(1 - \varepsilon)(T_C - T_B) + \varepsilon(T_C - T_D)} \quad [109]$$

Utilizzando ora le espressioni dei rendimenti isoentropici [97] si ottiene:

$$\eta = \frac{\eta_{ie} \frac{T_C}{T_A} \left(1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} \right) - \frac{1}{\eta_{ic}} \left(r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{(1 - \varepsilon) \left[\frac{T_C}{T_A} - 1 - \frac{1}{\eta_{ic}} \left(r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \right] + \varepsilon \eta_{ie} \frac{T_C}{T_A} \left(1 - \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}}} \right)} \quad [110]$$

In Figura 76 si ha l'andamento del rendimento di un ciclo J-B reale nelle ipotesi di rapporti delle temperature pari a 3.5 e 5 e con efficienza di scambio termico 0.85. Nella stessa figura è riportato l'andamento di un ciclo J-B ideale. In Figura 77 si hanno le stesse curve messe a confronto per due valori dell'efficienza degli scambiatori di calore pari a 0.8 e 0.7. La [110] ci dice che il rendimento di un ciclo reale con rigenerazione termica dipende ancora dal *rapporto delle pressioni* t_p e dal rapporto fra le temperature massima e minima di ciclo ma dipende anche (e fortemente) dai rendimenti isoentropici di espansione e compressione e dall'efficienza degli scambiatori di calore.

Si osservi come il rendimento si annulli per $r_p \rightarrow 1$

¹⁹ Si intende per *controcorrente* una disposizione geometrica delle superfici di scambio tali che il flusso del fluido caldo sia parallelo ma in direzione opposta rispetto al flusso della corrente fredda. Si pensi a due cilindri concentrici nei quali si fa scorrere il fluido caldo nel cilindro interno da sinistra verso destra, mentre il fluido freddo scorre nell'intercapedine fra i due cilindri ma da destra verso sinistra. Questa configurazione geometrica, si vedrà, è la migliore che si possa avere ed è considerata come riferimento per tutte le altre configurazioni geometriche che, pur risultando più pratiche dal punto di vista costruttivo, hanno una efficienza minore di quella a controcorrente pura.

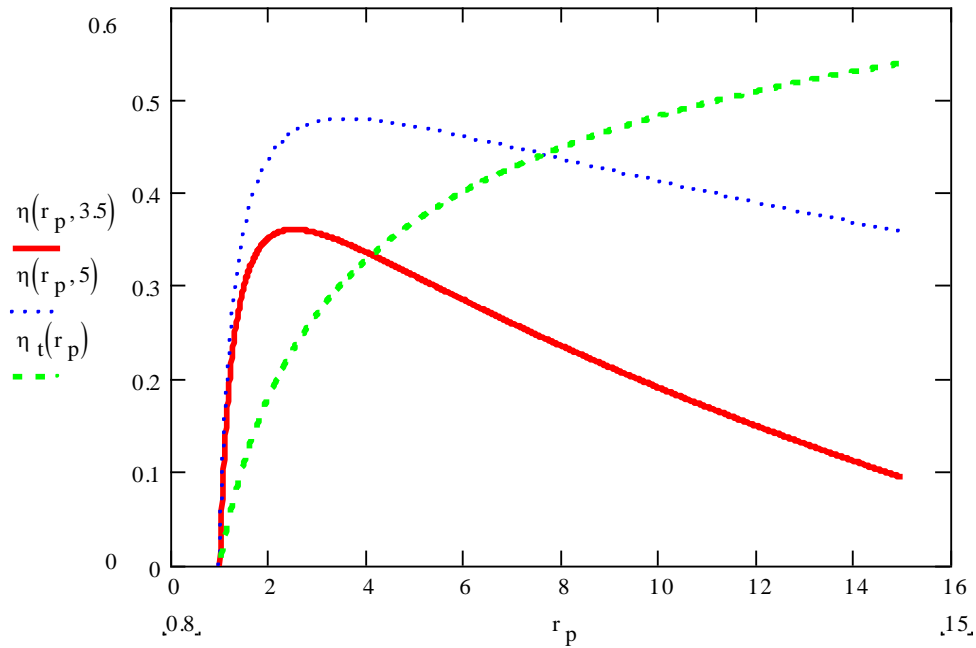


Figura 76: rendimento di un ciclo JB reale rigenerato con vari rapporti T_C/T_A ed $\varepsilon=0.85$

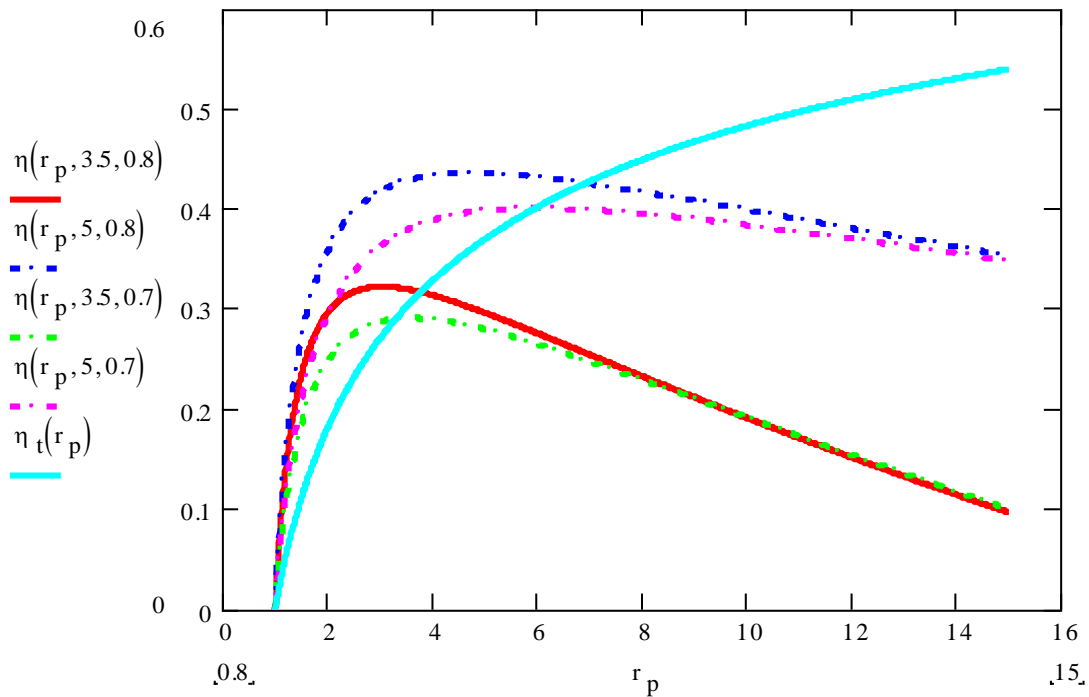


Figura 77: Rendimento di un ciclo JB reale rigenerato con vari rapporti T_C/T_A ed $\varepsilon=0.8$ ed $\varepsilon=0.7$

Inoltre il rendimento con rigenerazione reale mostra un valore massimo per valori del rapporto delle pressioni inferiore a quello ottimale reale dato dalla [103].

Pertanto la scelta del rapporto delle pressioni di lavoro viene effettuato, nel caso di rigenerazione termica in cicli J-B reali, con considerazioni diverse da quelle fatte in precedenza.

Inoltre si deve osservare che nel caso di rigenerazione termica in un ciclo reale il *rapporto dei lavori* dato dalla [102] non fornisce più indicazioni complete sugli effetti dell'irreversibilità perché in quella relazione non si tiene conto del comportamento non ideale dello scambiatore di calore e quindi della sua efficienza termica ε .

5.5.3 IMPIANTI DI TERRA CON TURBINE A GAS HEAVY DUTY

Negli impianti di terra si vuole ottenere dal ciclo *Joule – Bryton* la massima potenza senza avere il problema del peso da trasportare. Pertanto negli impianti fissi si hanno layout che favoriscono gli scambi termici (combustori esterni ottimizzati) e si possono anche avere cicli *rigenerativi* con scambi multipli con raffreddamenti intermedi in fase di compressione e riscaldamenti in fase di espansione, come illustrato in Figura 78. Si possono anche usare anche più raffreddamenti intermedi nella fase di compressione (*cicli con intercooler*) e più riscaldamenti intermedi nella fase di espansione in turbina (*cicli ad espansione multipla*). In questi cicli occorre inserire tanti scambiatori di calore intermedi quante sono le interruzioni delle fasi di compressione e di espansione. Si rinvia ai testi specializzati per ulteriori approfondimenti. In Figura 79 si ha una rappresentazione di impianti a gas di terra: a sinistra si può osservare il combustore (ora esterno alla turbina) e a destra si ha una vista di una turbina a più stadi accoppiata ad un compressore sullo stesso albero motore.

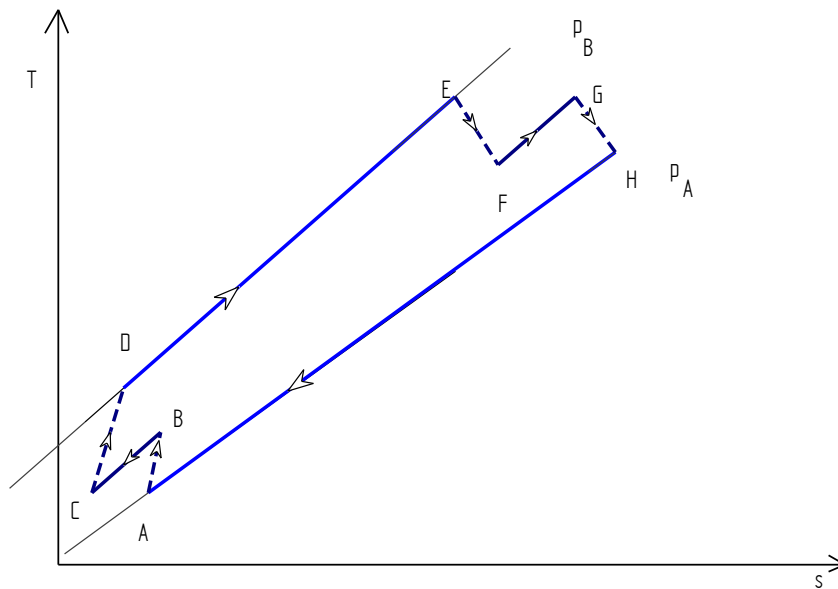


Figura 78: Andamento di un ciclo J-B reale con intercooler

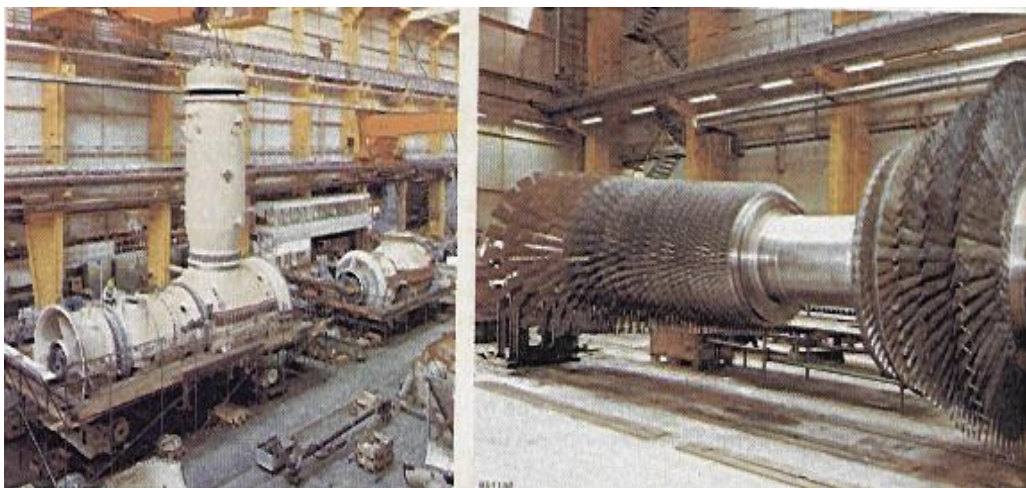


Figura 79: Impianti a gas di terra

5.5.4 COMBUSTIBILI UTILIZZATI DALLE TURBINE A GAS

Negli impianti di terra le turbine a gas sono nate per bruciare gas naturale ma l'evoluzione tecnologica porta oggi all'uso anche di combustibili gassosi di altro tipo ed anche liquidi purché sottoposti a trattamenti di depurazione particolari.

Le caratteristiche medie dei combustibili gassosi sono le seguenti:

Proprietà	Valori	Unità di Misura
<i>Piombo</i>	< 0.02	<i>ppm</i>
<i>Vanadio</i>	< 0.01	<i>ppm</i>
<i>Sodio</i>	< 0.024	<i>ppm</i>
<i>Polveri</i>	< 25	Mg/Nm^3
<i>Zolfo</i>	< 0.5	%
<i>Potere Calorifico Inferiore</i>	$12.5 \div 35.5$	MJ/Nm^3

Tabella 4: Proprietà dei combustibili gassosi per turbine a gas

Per i combustibili liquidi si hanno le seguenti proprietà:

Proprietà	Valori	Unità di Misura
<i>Viscosità</i>	$3 \div 20$	<i>cSt</i>
<i>Densità</i>	< 875	Kg/m^3
<i>Residuo Conradson</i>	< 0.2	%
<i>Acqua</i>	< 0.1	%
<i>Zolfo</i>	< 0.5	%
<i>Potere Calorifico Inferiore</i>	> 24	MJ/Nm^2
<i>Ceneri</i>	< 0.01	%
<i>Vanadio</i>	< 0.5	<i>ppm</i>
<i>Sodio</i>	< 0.5	<i>ppm</i>

Tabella 5: Proprietà dei combustibili liquidi per turbine a gas

Per combustibili aventi caratteristiche diverse da quelle sopra indicate occorre prevedere turbine opportunamente modificate. Nel caso di combustibili gassosi non devono essere presenti fasi liquide.

I combustibili pesanti possono richiedere un preriscaldamento per rendere possibile sia la nebulizzazione che il pompaggio.

I metalli vanno separati mediante trattamento di separazione elettrostatica, lavaggio e centrifugazione (per il sodio) e l'aggiunta di additivi neutralizzanti (per il vanadio).

Nel caso di funzionamento con olio pesante occorre prevedere una fermata ogni $400 \div 1000$ ore per l'eliminazione delle ceneri ed il lavaggio con acqua calda.

5.5.5 POSSIBILITÀ DI COGENERAZIONE DELLE TURBINE A GAS

Tipicamente per una turbina a gas si hanno le percentuali di energia indicate in Figura 80.

L'elevata percentuale di energia nei gas di scarico (67%) lascia intravedere forti possibilità di recupero energetico a temperature variabili fra 400 e 550 °C e quindi ancora interessanti impiantisticamente.

Naturalmente occorre evitare che la temperatura finale dei gas di scarico scenda al di sotto dei $120 \div 140$ °C per evitare il pericolo di condensazione dell'acqua acida.

Le possibilità di cogenerazione delle turbine a gas possono essere schematizzate nelle seguenti:

- Recupero termico per uso diretto di processo;
- Produzione di fluidi termovettori (ad esempio per il teleriscaldamento)
- Ciclo combinato turbina a gas – turbina vapore.

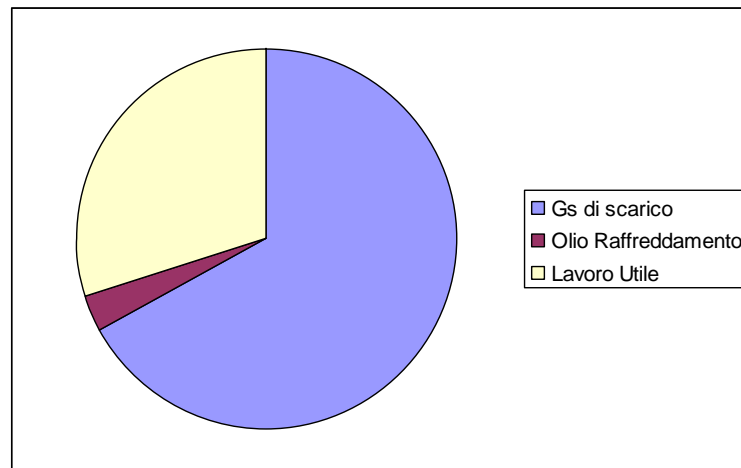


Figura 80: Bilancio energetico per una turbina a gas

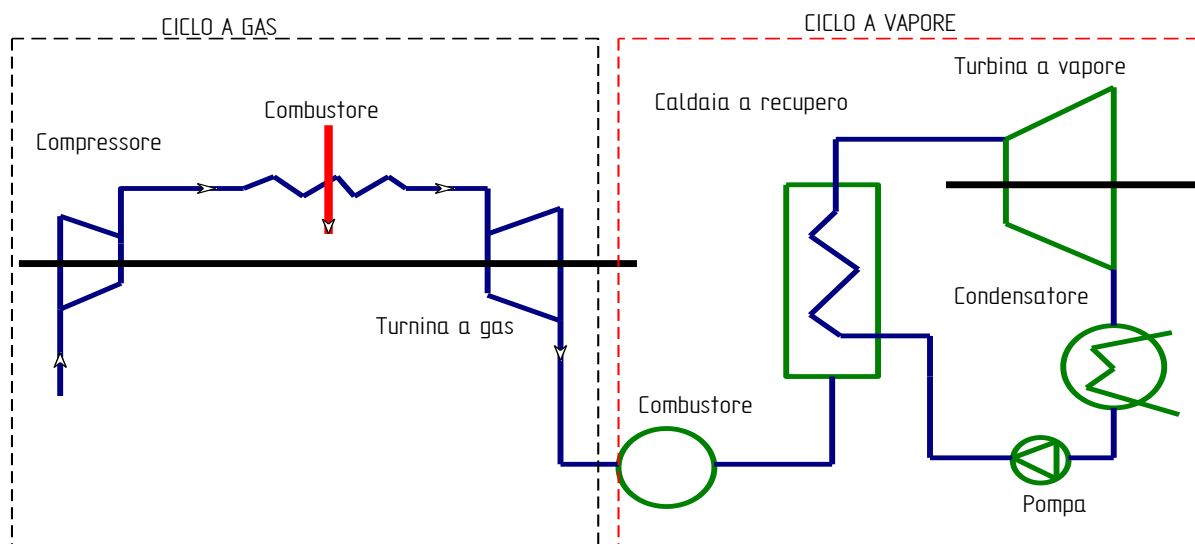


Figura 81: Ciclo combinato a gas e a vapore

Il rapporto $C = E_T/E_E$ può variare nell'intervallo $1.7 \div 3.5$ per turbine a semplice recupero. La produzione di acqua calda surriscaldata o anche di vapore per tele riscaldamento urbano lascia intravedere interessanti sviluppi per questo tipo di impianti.

In Figura 81 si ha lo schema di impianto per un ciclo combinato gas- vapore con caldaia a recupero per la produzione del vapore acqueo da inviare nella turbina a vapore (che può essere a condensazione, a derivazione, a spillamento o in contropressione a seconda delle esigenze impiantistiche).

In Figura 82 si ha lo schema di ciclo combinato con la possibilità di recupero termico e produzione di vapore. Si possono pensare diverse applicazioni dei cicli combinati negli impianti di termovalorizzazione dei RSU. Infatti, si può gassificare i RSU, alimentare un impianto a gas e poi produrre acqua calda surriscaldata per alimentare una rete di teleriscaldamento.

Un'applicazione del genere è realizzata nel comune di Brescia per la centrale di alimentazione del teleriscaldamento urbano.

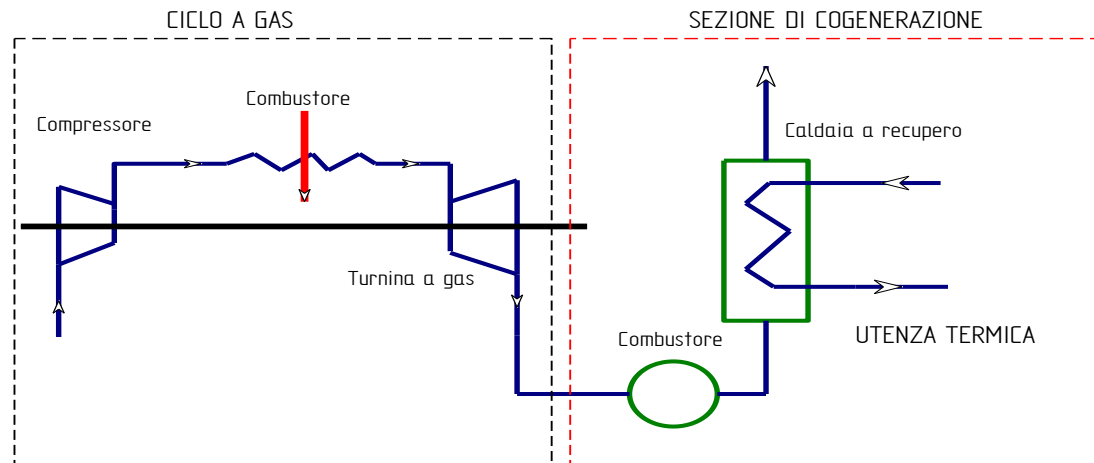


Figura 82: Ciclo combinato turbina a gas - vapore

5.6 LA MACCHINA DI CARNOT A CICLO INVERSO

Nelle applicazioni di climatizzazione degli ambienti sono molto utilizzate le macchine frigorifere a ciclo inverso e pertanto si vuole qui fornire un breve accenno a questa problematica. Una macchina di *Carnot* che operi ciclicamente in senso orario produce lavoro positivo, cioè opera in modo *diretto* assorbendo calore dal serbatoio caldo trasformandolo in lavoro e poi cedendo il restante calore al serbatoio freddo.

La stessa macchina può operare anche in senso inverso: *assorbe calore dal serbatoio freddo e lavoro dall'esterno per riversare calore nel serbatoio caldo*. In pratica si ha un funzionamento tipico del ciclo frigorifero con il quale si raffreddano i corpi a spese di energia esterna. Questi cicli sono utilizzati sia per applicazioni industriali che civili.

Nel caso della climatizzazione ambientale questi cicli sono alla base delle macchine di refrigerazione dell'acqua per il condizionamento estivo e per le *pompe di calore* (vedi nel prosieguo) nelle quali l'effetto utile considerato non è il calore sottratto al serbatoio freddo (*evaporatore*) bensì quello ceduto al serbatoio caldo (*condensatore*).

Ai fini di un più corretto utilizzo delle fonti energetiche la pompa di calore rappresenta un esempio positivo da seguire poiché consente di riequilibrare, *quasi*, le perdite di trasformazione di energia chimica in energia elettrica (nelle centrali ENEL) e da energia elettrica in energia termica (normali stufe).

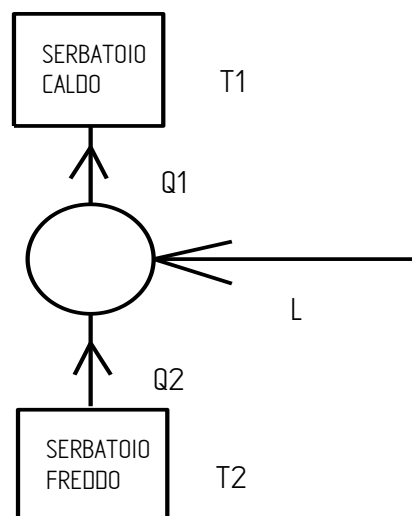


Figura 83: Ciclo inverso

In Figura 83 è data una rappresentazione schematica di quanto appena detto. Per il *ciclo frigorifero* si definisce un *coefficiente di effetto utile* dato dal rapporto :

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{L} \quad [111]$$

Mentre per la pompa di calore si definisce il COP (*Coefficient of Performance*):

$$COP = \frac{Q_1}{L} \quad [112]$$

Risulta il seguente bilancio energetico per il sistema termodinamico della stessa Figura 83:

$$Q_1 = Q_2 + L \quad [113]$$

e pertanto risulta:

$$COP = \varepsilon + 1 \quad [114]$$

Per la macchina di *Carnot* risulta essere $\varepsilon > 1$ e quindi $COP > 2$. Per le macchine a ciclo inverso reali si ha $\varepsilon > 1$ se il lavoro viene fornito dall'esterno sotto forma meccanica (cicli a compressore).

5.7 MACCHINA FRIGORIFERA A COMPRESSIONE DI VAPORI

Il ciclo inverso di *Carnot* non può essere utilizzato nelle applicazioni pratiche in quanto ciclo *ideale* e pertanto si utilizza un ciclo detto *a compressione di vapori saturi*.

I *vapori saturi* (cioè vapori in presenza del proprio liquido) hanno la caratteristica di subire le trasformazioni di cambiamento di fase (ebollizione e condensazione) a temperatura e pressione costante. Proprio l'avere le trasformazioni a temperatura costante ha dato l'idea di utilizzare questi fluidi nelle macchine termiche (cicli a vapore e cicli frigoriferi a compressione). In Figura 84 ne è data una rappresentazione schematica. Seguendo lo schema di impianto della stessa figura si ha la compressione del gas (trasformazione CD) poi la condensazione (DA), la laminazione (AB, si tratta di un'applicazione dell'effetto *Joule-Thompson*) e quindi l'evaporazione (BC). La fase frigorifera è data dall'evaporazione lungo BC, mentre la fase di riscaldamento per il funzionamento a pompa di calore è data lungo la DA.

L'energia esterna è fornita mediante il compressore (trasformazione CD) ed è la fase pagante del ciclo. Per la definizione del *coefficiente di effetto utile* e del COP si rimanda alle relazioni già indicate in precedenza.

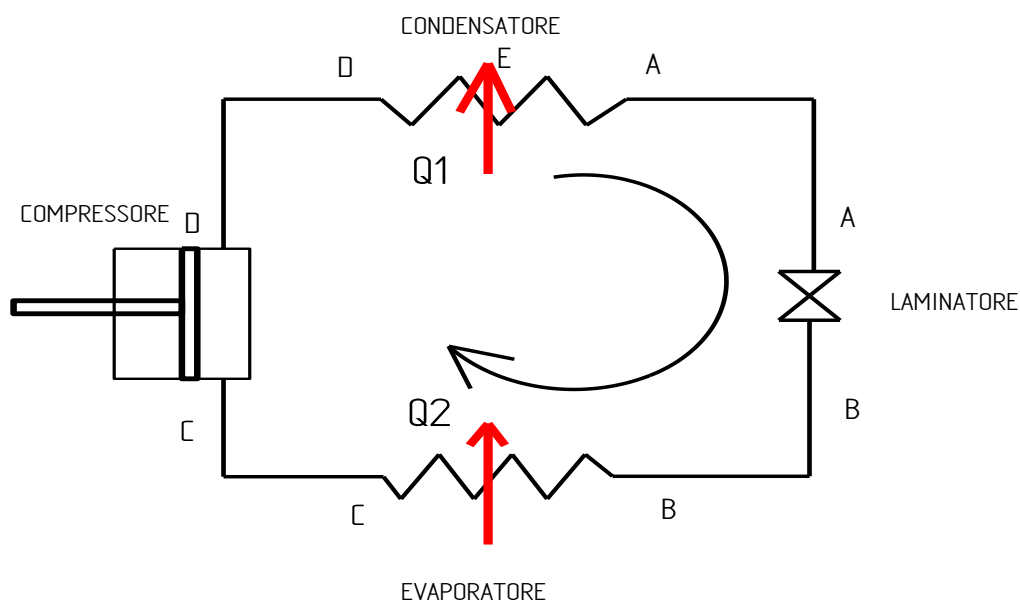


Figura 84: Ciclo inverso a compressione di vapori saturi

Nel piano di *Gibbs* si ha la rappresentazione di Figura 85. Si osservi che la laminazione isoentalpica (AB) non è reversibile.

Inoltre si sono rappresentate trasformazioni reversibili di compressione. Volendo considerare trasformazioni reali si avrebbe l'andamento della Figura 86.

La compressione CD è ora ad entropia crescente per effetto dell'irreversibilità. Ciò comporta un innalzamento del punto *D* e un maggior carico per il condensatore che deve smaltire più calore per desurriscaldare (tratto DE) e condensare (tratto EA) il fluido frigorifero.

Per i cicli inversi non si può definire un rendimento di trasformazione bensì una efficienza data dal rapporto:

$$\varepsilon = \frac{\text{Effetto}_{\text{Ottenuto}}}{\text{Energia}_{\text{Spesa}}}$$

Si possono avere due definizioni di effetti utili a seconda che ci si ponga dal lato della produzione del freddo (quindi l'effetto utile è Q_2) o dal lato della produzione del caldo (e l'effetto utile è Q_1).

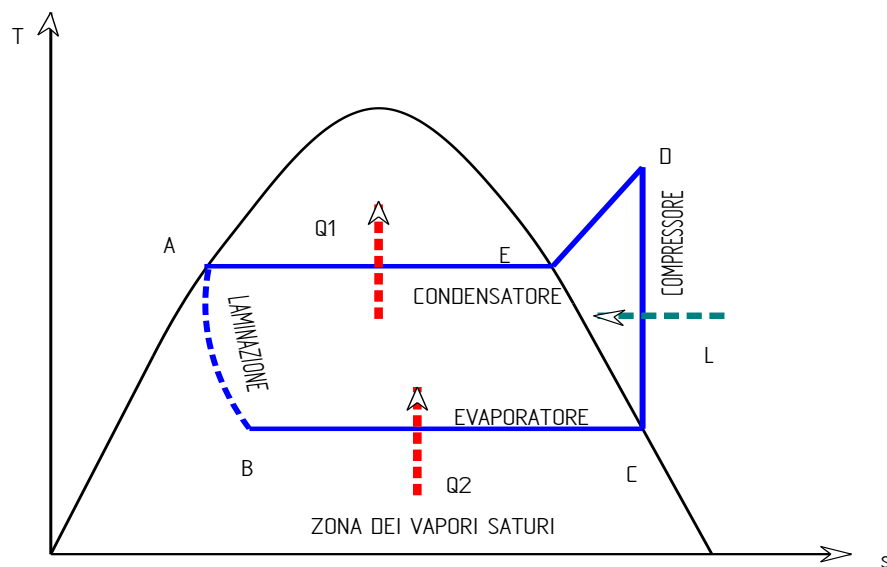


Figura 85: Ciclo frigorifero a compressione nel piano (Ts)

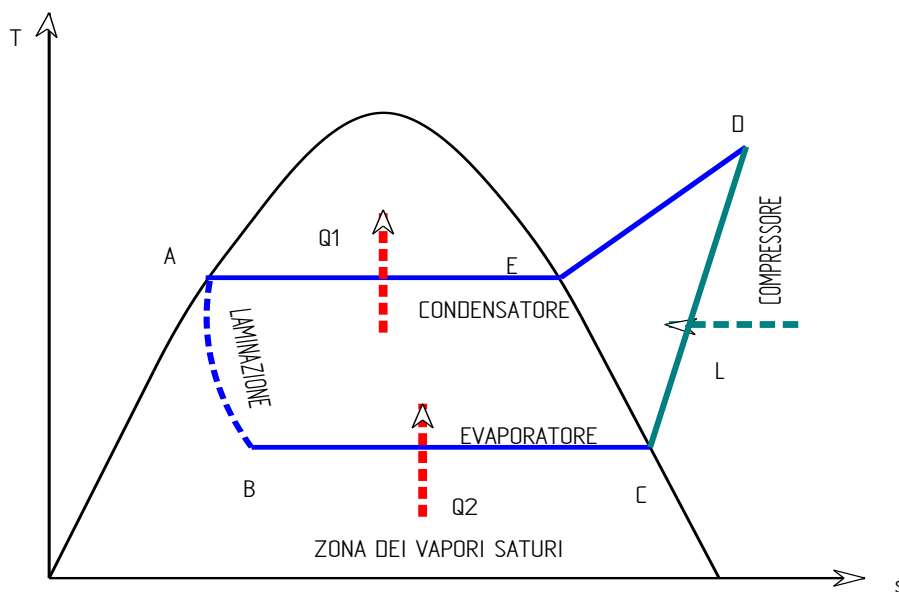


Figura 86: Ciclo frigorifero reale con compressione adiabatica

Nel primo caso, funzionamento frigorifero, si ha il *coefficiente di effetto utile frigorifero* dato dal rapporto:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{L} \quad [115]$$

Nel secondo caso, funzionamento a *pompa di calore*, si definisce il *coefficiente di effetto utile termico* (detto anche COP, *Coefficient of Performance*) dato dal rapporto:

$$\varepsilon' = \frac{Q_1}{L} \quad [116]$$

Poiché dal bilancio globale, a regime stazionario, della macchina termica di Figura 84, deve essere:

$$Q_1 = Q_2 + L \quad [117]$$

allora possiamo dire che:

$$\varepsilon' = \frac{Q_1}{L} = \frac{Q_2 + L}{L} = \varepsilon + 1 \quad [118]$$

Pertanto nel funzionamento del ciclo inverso a *pompa di calore* il coefficiente di effetto utile termico risulta, almeno teoricamente, maggiore di 1 rispetto al coefficiente di effetto utile frigorifero. In effetti nel funzionamento a *pompa di calore* si ha il contributo anche del lavoro L impegnato nel ciclo.

Quest'ultima osservazione rende interessante l'uso dei cicli inversi anche per applicazioni termiche: ad esempio, per il riscaldamento degli edifici si può utilizzare con più congruenza energetica la macchina a pompa di calore ottenendo, per ogni kW di potenza impegnata nel compressore, ε' kW di potenza termica resa.

Nei casi concreti l'efficienza della macchina a ciclo inverso dipende da quella delle batterie di scambio del condensatore e dell'evaporatore. Poiché questa efficienza è maggiore quando il fluido di scambio è in forma liquida, rispetto al caso di scambio fra gas, allora si hanno, per le applicazioni impiantistiche usuali, le seguenti tipologie di macchine:

TIPOLOGIA DI SCAMBIO	EFFICIENZA FRIGORIFERA
<i>Acqua - Acqua</i>	$3 \div 5$
<i>Acqua - Aria</i>	$3 \div 4$
<i>Aria - Acqua</i>	$3 \div 4$
<i>Aria - Aria</i>	$1.5 - 3.0$

Tabella 6: Efficienze frigorifere per varie tipologie di scambio

Nella precedente tabella la dizione *Acqua - Acqua* si intende per fluido di lavoro acqua nell'evaporatore e acqua nel condensatore, cioè si tratta di un frigorifero che raffredda acqua e che è raffreddato (al condensatore) con acqua. Analoghe considerazioni vanno fatte per le altre tre configurazioni di scambio.

Si osservi come lo scambio *Acqua - Acqua* sia molto efficiente e che è, quindi, impiantisticamente conveniente. Purtroppo per questi tipi di scambio occorre avere anche acqua a ciclo continuo per la refrigerazione al condensatore, cosa non sempre possibile.

Pertanto si usano spesso macchine con raffreddamento ad aria e cioè con condensatori nei quali il fluido frigorifero è raffreddato con scambio con aria ambiente mediante ventole per la circolazione forzata.

Data la limitatezza del Corso non si possono approfondire tutti gli aspetti impiantistici dei cicli frigoriferi. La *Tecnica del Freddo* si interessa con il dovuto approfondimento di questi argomenti e ad essa si rimanda per altre informazioni. Va qui detto che spesso si utilizzano cicli a compressione multipla, come indicato in Figura 87, per evitare il raggiungimento di temperature elevate a fine fase compressione.

Il raffreddamento intermedio (*intercooler*) consente di ottenere una temperatura finale, dopo il raggiungimento della pressione del condensatore, notevolmente inferiore rispetto al caso di compressione unica.

La fase di laminazione penalizza il ciclo frigorifero perché riduce la fase utile di evaporazione BC.

Allora si può utilizzare la tecnica del sottoraffreddamento dopo il condensatore in modo che il punto finale di laminazione si sposti verso sinistra e quindi la fase BC si incrementi. In Figura 88 si ha un esempio di sottoraffreddamento: il punto finale B è ora più spostato a sinistra rispetto al punto B' senza sottoraffreddamento. Il guadagno di effetto utile è pari ad $r \cdot \Delta x_{BB'}$, ove r è il calore di vaporizzazione del fluido frigorifero e $\Delta x_{BB'}$ è la differenza di titolo fra i punti B' e B.

Poiché il sottoraffreddamento richiede che la temperatura all'uscita dal condensatore sia inferiore rispetto a quella del punto A, si rende necessario avere un fluido di raffreddamento a temperatura inferiore a quella corrispondente al punto F.

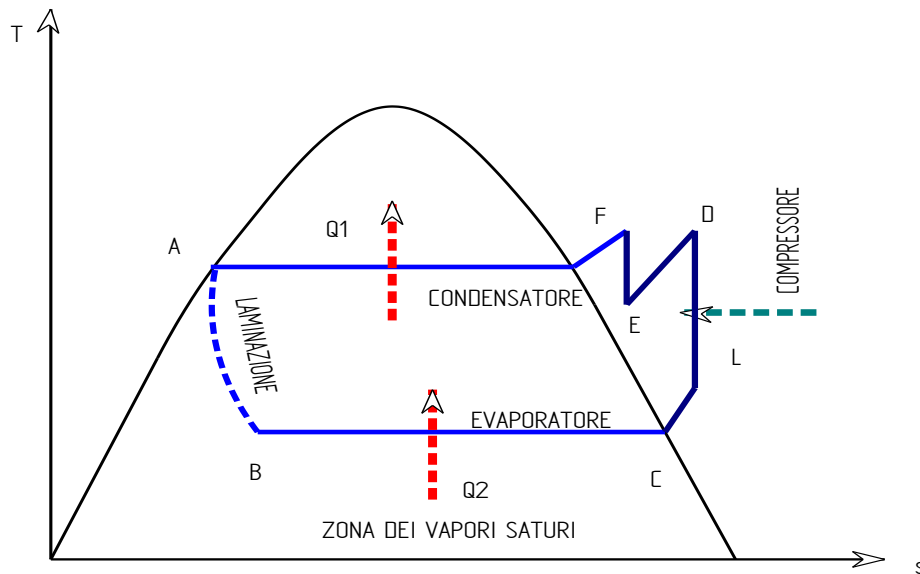


Figura 87: Ciclo frigorifero con compressione multipla

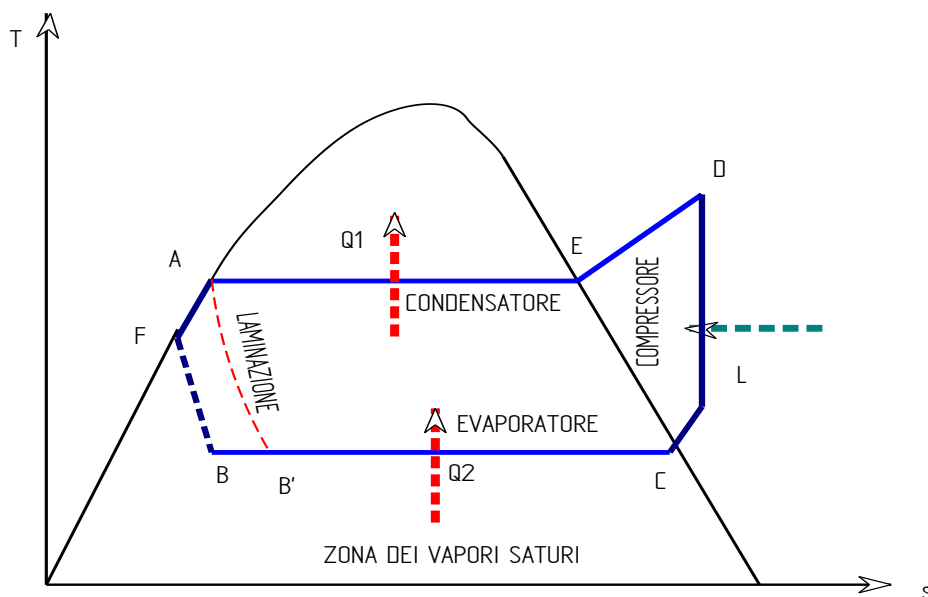


Figura 88: Ciclo frigorifero con sottoraffreddamento prima della laminazione

Ciò non è sempre facile se, ad esempio, si usa il raffreddamento con aria ambiente perché non si può controllarne il valore.

Pertanto si utilizzano forme di scambio intermedie, ad esempio surriscaldando il fluido a fine fase evaporazione a spese del calore sottratto al fluido da sottoraffreddare, come illustrato in Figura 89.

Il layout corrispondente a queste modifiche è facilmente desumibile dall'esame delle fasi costituenti il ciclo inverso. I frigoristi usano spesso un piano di lavoro diverso dal (T,s) o (h,s) prima visti e più precisamente il piano (h,p) del tipo raffigurato in Figura 90.

Questo piano ha le pressioni in ordinate e le entalpie in ascisse. La curva di Andrews è del tipo segnato in Figura 90.

Su questo piano il ciclo a vapori saturi si traccia facilmente. Fra le due isobare p_1 e p_2 si traccia la isoentalpica di laminazione DE, poi la fase di evaporazione EA, quindi la compressione AB a cui segue la fase di desurriscaldamento BC e condensazione CD.

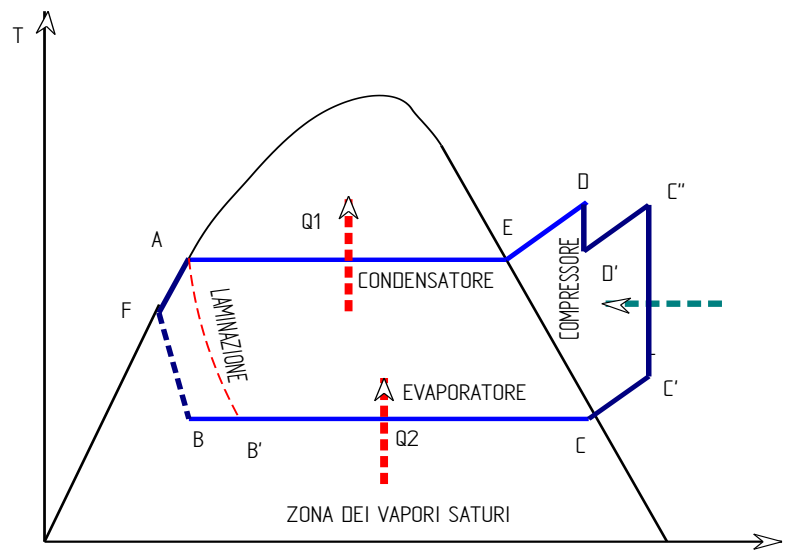


Figura 89: Ciclo frigorifero con sottoraffreddamento e surriscaldamento

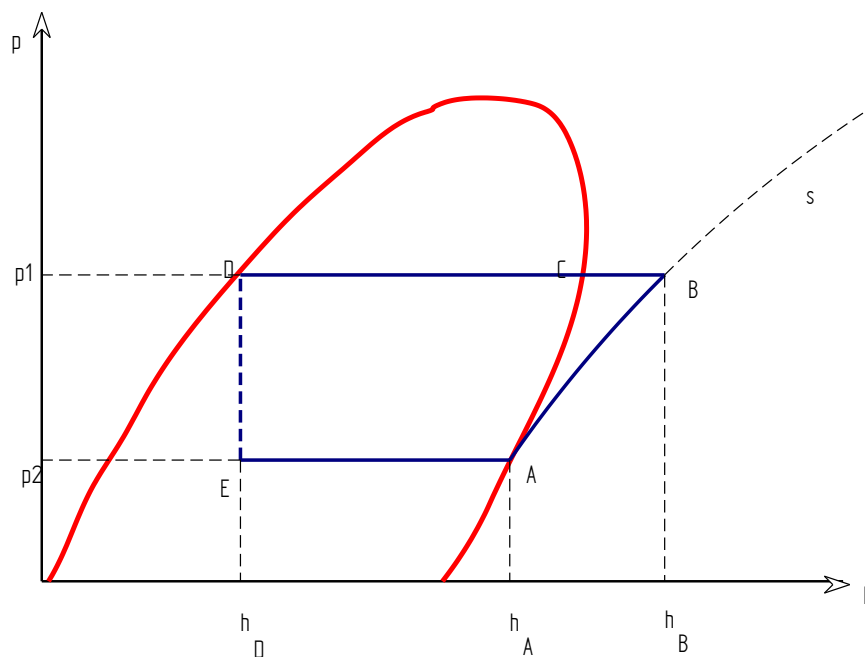


Figura 90: Ciclo frigorifero nel piano (h,p)

Oltre alla comodità di tracciamento sopra vista questo piano offre un facile modo di calcolare l'efficienza frigorifera.

Infatti si ha, con riferimento alla stessa figura:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{L} = \frac{h_A - h_E}{h_B - h_A}$$

che a scala grafica è dato dal rapporto dei segmenti rappresentativi sull'asse delle ascisse. Nel prosieguo si vedranno i diagrammi (h,p) per i fluidi di lavoro più utilizzati nelle applicazioni frigoristiche.

5.7.1 IMPIANTI FRIGORIFERI

Gli impianti frigoriferi e in generale la *Tecnica del Freddo* rivestono oggi un'importanza fondamentale nella vita moderna industriale e civile. Essi infatti debbono garantire temperature di processo negli impianti industriali, la conservazione di derrate alimentari nell'industria alimentare (*catena del freddo*) e debbono produrre fluidi di lavoro (acqua, aria, freon,...) a bassa temperatura per gli impianti di climatizzazione. Possiamo classificare gli impianti frigoriferi a seconda della temperatura minima che consentono di raggiungere e della potenza impegnata, secondo la Tabella 7.

<i>Tipo di Impianto</i>	<i>Temperatura minima (°C)</i>	<i>Pressione lavoro (Bar)</i>	<i>Potenza frigorifera (kW)</i>
<i>Compressione di vapore</i>	-25 <i>ciclo semplice</i> - 60 <i>ciclo a doppia compressione e doppia laminazione</i> -150 <i>cicli in cascata</i>	>1	<i>Con compressore volumetrico:</i> 0.1 ÷ 30 <i>ermetico</i> 3 ÷ 300 <i>rotativo</i> 30 ÷ 250 <i>semiermetico</i> 250 ÷ 500 <i>aperto</i> 400 ÷ 3000 <i>a vite</i> <i>Con compressore centrifugo</i> 300 ÷ 6000 <i>chiuso</i> 300 ÷ 30000 <i>aperto</i>
<i>Assorbimento (fluido frigorifero/ solvente)</i>	0 (H ₂ O-BrLi) -60 (NH ₃ /H ₂ O)	0.01 0.2	350 ÷ 5000 5000 ÷ 10000
<i>Vapore d'acqua</i>	0 -20 <i>salamoia</i>	0.006 0.0013	30 ÷ 3000
<i>Compressione di gas</i>	-25 (<i>aria</i>)	1	10
<i>Effetto termoelettrico</i>	-33 -103	-	<7

Tabella 7: Classificazione degli impianti frigoriferi

Impianti Frigoriferi a ciclo Joule – Bryton inverso

Gli impianti a *compressione di gas* (ciclo *Joule inverso*, vedi Figura 91) sono utilizzati soprattutto in aeronautica. L'efficienza di questi cicli è data da:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{L}$$

che in questo caso diviene, con riferimento alla Figura 92:

$$\varepsilon = \frac{\dot{m}q_2}{\dot{m}L} = \frac{q_2}{q_1 - q_2} = \frac{1}{\frac{c_p(T_B - T_C)}{c_p(T_A - T_D)} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1} \quad [119]$$

ove si ha:

- \dot{m} portata massica del fluido frigorifero di lavoro
- q_1 calore massico ceduto all'esterno lungo l'isobara BC (in valore assoluto)
- q_2 calore massico ricevuto dall'esterno (cioè sottratto all'ambiente a t_2) lungo la isobara DA
- L lavoro massico netto fornito dall'esterno al ciclo (in valore assoluto)
- c_p calore specifico dell'aria a pressione costante
- k rapporto di adiabacità dell'aria.

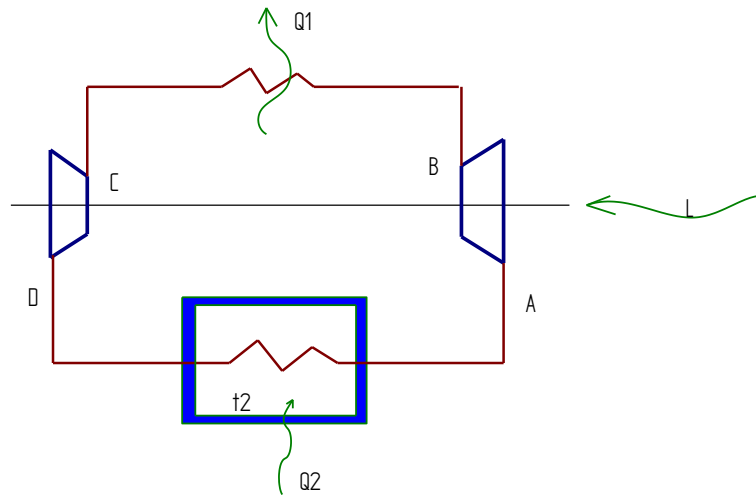


Figura 91: Layout del ciclo Joule inverso

Gli impianti termoelettrici (senza fluido di lavoro) sono utilizzati in campo elettronico e spaziale.

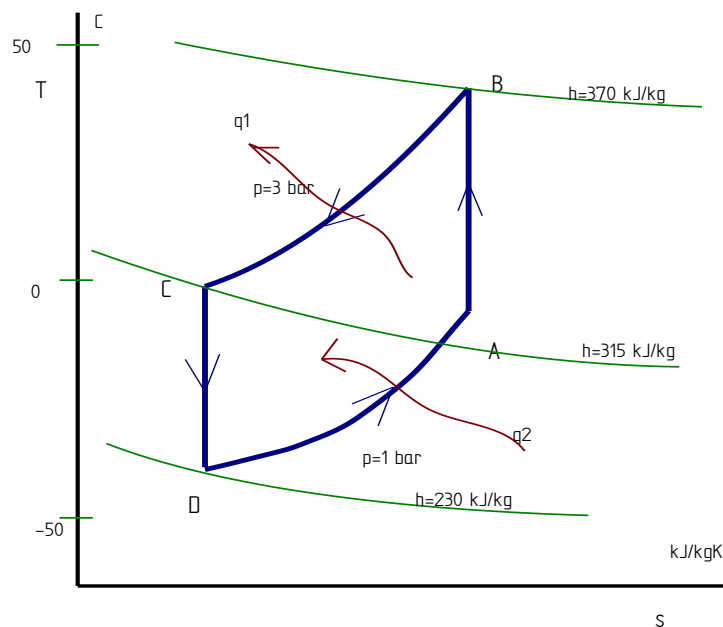


Figura 92: Ciclo Joule inverso per frigoriferi a gas

5.7.2 LAMINAZIONE

La laminazione è una applicazione dell'effetto *Joule Thompson* con il quale si fa passare un fluido da una pressione maggiore ad una minore attraverso uno strozzamento del condotto o mediante una valvola di laminazione appositamente predisposta. L'effetto *Joule Thompson* è caratterizzato dal coefficiente definito da:

$$\xi = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_h \quad [120]$$

che può essere positivo, negativo o nullo a seconda delle proprietà del fluido e il campo di temperature e pressioni iniziali. Dal punto di vista impiantistico interessa definire la differenza di temperatura che subisce il fluido:

$$T_u - T_i = \int_{p_i}^{p_u} \xi dp \quad [121]$$

Se $\xi > 0$ allora si ha una diminuzione di temperatura mentre se è $\xi < 0$ si ha un aumento di temperatura. La laminazione viene realizzata con speciali organi, detti di laminazione, che rivestono notevole importanza negli impianti frigoriferi.

Valvola Termostatica

Le batterie evaporatrici sono dotate di *valvola termostatica* che provvede a diverse funzioni quali:

- *Laminazione* del fluido frigorifero per portarlo dall'alta alla bassa pressione;
- Regolazione automatica del ciclo frigorifero;
- Separazione e blocco di liquido in modo da preservare il compressore.

In Figura 94 si ha l'effetto di abbassamento della pressione del bulbo associato alla valvola termostatica sul diagramma entropico. In Figura 95 si ha il layout della valvola termostatica che è una comune valvola a funzionamento automatico regolata dalla temperatura all'evaporatore.

In funzione della temperatura di questo si ha una pressione nel bulbo, indicato con 6, che produce sulla parte superiore della membrana, indicata con 1, la forza f_b .

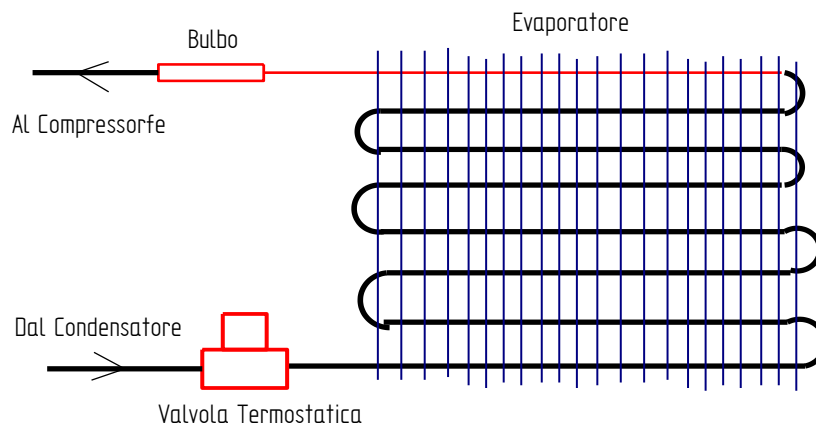


Figura 93: batteria evaporatrice con valvola termostatica

Se, ad esempio, la temperatura sale, allora aumenta la pressione del fluido contenuto nel bulbo che esercita sulla membrana una forza verso il basso.

Lo stelo, indicato con 2, trasla verticalmente e l'otturatore, indicato con 3, scende rispetto alla sede, indicata con 7, che rimane fissa fino, all'equilibrio con la forza della molla, f_m , e la forza dovuta alla pressione all'evaporatore, f_e . La molla di taratura è regolabile con la vite indicata con 5.

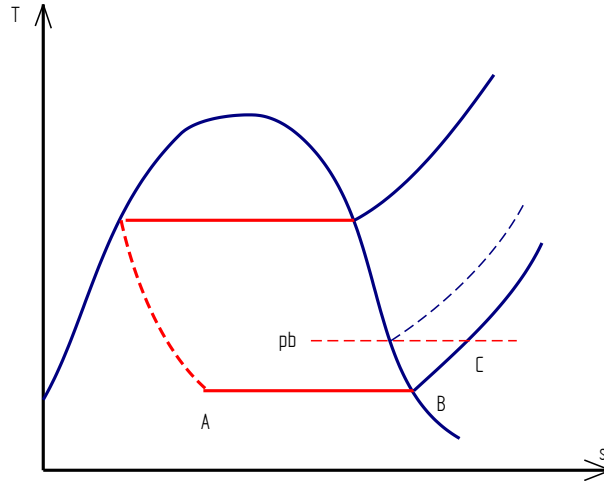


Figura 94: Azione della valvola Termostatica

Possiamo fare un bilancio del forze sul diaframma della valvola termostatica. Con riferimento alla Figura 95 si ha:

$$p_A + p_m = p_b \equiv p_D \quad [122]$$

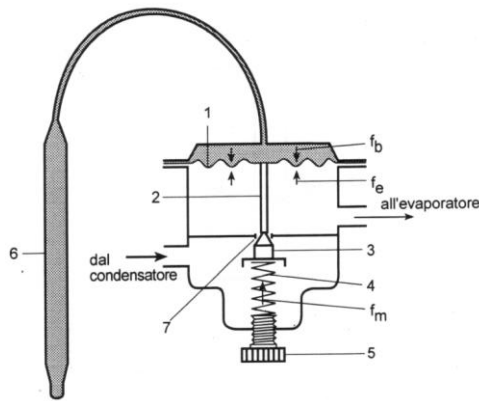


Figura 95: Layout della valvola termostatica

Sommando e sottraendo p_B si ottiene:

$$\underbrace{(p_A - p_B)}_{\Delta p_\xi} - \underbrace{(p_D - p_B)}_{\Delta p_{suff}} + p_m = 0 \quad [123]$$

Possiamo allora scrivere:

$$\Delta p_\xi - \Delta p_{suff} + p_m = 0 \quad [124]$$

ove si ha:

- Δp_ξ perdite di carico sull'evaporatore
- $\Delta p_{suff} = f(\Delta T_s)$ con $\Delta T_s = 4 \div 7 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Per dimensionare la molla di spinta occorre avere:

$$p_m = \Delta p_{suff} - \delta p_\xi \quad [125]$$

5.7.3 FLUIDI FRIGORIGENI

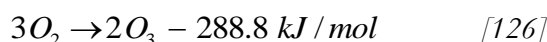
I fluidi di lavoro degli impianti frigoriferi sono detti *fluidi frigoriferi*. Questi fino all'inizio del 1900 erano naturali ma sono stati poi rimpiazzati con fluidi artificiali quali gli idrocarburi alogenati (CFC e CHFC) della serie Freon F11, F12, F22, F13 (o gli equivalenti con sigle internazionali R11, R12, R22, R13).

Gli idrocarburi alogenati presentano proprietà termofisiche interessanti che li hanno reso prevalenti sugli altri fluidi frigorigeni: essi sono stabili chimicamente, non infiammabili, non tossici, inodori e insapori, hanno un buon calore latente di vaporizzazione e un accettabilmente basso lavoro specifico di compressione.

Purtroppo la recente scoperta della pericolosità del fluoro e del Cloro per la fascia di ozono nell'atmosfera ha cambiato tutti i giudizi su questi fluidi refrigeranti ed anzi sono state approvate convenzioni internazionali per la totale messa al bando degli HCFC entro un breve lasso di tempo.

Il Problema dell'Ozono

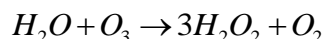
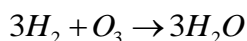
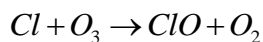
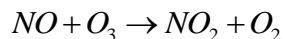
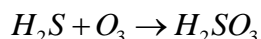
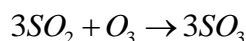
L'ozono, O_3 , ha la caratteristica di assorbire le radiazioni solari ultraviolette (nell'infrarosso di $0.25 \mu m$) e quindi di esercitare una vitale funzione protettiva sull'Uomo. Esso si forma dalle molecole di O_2 mediante la reazione endotermica:



L'ozono è uno stato allotropico dell' O_2 ed è piuttosto instabile. La costante di equilibrio della precedente reazione è $K=10^{-54}$.

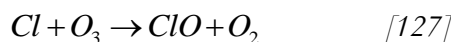
L'input energetico è fornito sia dalla radiazione solare che dalle scariche elettriche atmosferiche. La radiazione solare è molto intensa ad alta quota (stratosfera, da 25 a 50 km s.l.m) e in corrispondenza dell'equatore.

La maggior quantità di ozono si ha ai poli per effetto del trasporto dovuto ai moti planetari dell'aria. La concentrazione dell'ozono nell'aria è molto bassa e pari a 0.375 ppm. I processi che possono provocare la formazione e la distruzione dell'ozono possono essere molteplici e in particolare si segnalano le seguenti reazioni:



Si vede, quindi, che alla distruzione dell' O_3 concorrono anche alcuni inquinanti atmosferici quali SO_2 , H_2S , NO ,....

A queste reazioni si aggiunge anche quella di attacco dei CFC secondo il seguente schema:



Pertanto il cloro (ma è presente anche un'analogia reazione per il fluoro presente in minor quantità) attacca l'ozono eliminandolo dall'atmosfera.

Le intuizioni dei ricercatori *Rowland e Molina (1974)* sull'azione dei CFC è stata confermata dalle osservazioni fatte dal 1978 al 1989 che hanno mostrato una riduzione del 9% di ozono nell'emisfero Sud e 4% nell'emisfero Nord.

I CFC più aggressivi sono quelli più stabili, cioè con una molecola priva di legami deboli. L'R12 è una molecola composta da CCl_2F_2 e quindi molto stabile: è questa la molecola più aggressiva.

Per destabilizzare i CFC (*clorofluoro carburi*) si preferisce usare molecole con presenza del legame a idrogeno, come avviene nelle molecole HCFC (*idroclorefluoro carburi*). Si definisce *indice di distruzione dell'ozono (Ozone Depletion Index)*, ODP, l'effetto sull'ozono valutato in rapporto a quello dell'R11.

Si ha la seguente tabella comparativa:

Composto	Formula	ODP	Stabilità (anni)	Utilizzazione
R11	CCl_3F	1	60	FF AE SL PS
R12	CCl_2F_2	0.86	120	FF AE CD PS
R114	$CClF_2-CClF_2$	0.8	250	FF
Halon		$3 \div 10$		EI

Tabella 8: Indici ODP per alcuni CFC

Ove vale il seguente simbolismo:

- FF Fluido frigorifero
- PS Propellente spray
- EI Estinzione incendi
- AE Agente espandente
- SL Solvente – Detergente
- CD Congelamento derrate alimentari.

Dall'esame della tabella si osserva la grande flessibilità d'uso dei CFC. Con riferimento all'Occidente (esclusa la Cina e l'India che pure sono oggi grandi produttrici di CFC) si hanno i diagrammi indicati in Figura 96 per l'R11, in Figura 97 per l'R12 e in Figura 98 per l'uso combinato di R11 ed R12.

Rilascio dei CFC in ambiente

I CFC vengono rilasciati nell'ambiente attraverso vari processi che qui si elencano:

- Manipolazione dei CFC nei processi di produzione e lavorazione
- Fughe accidentali dagli impianti

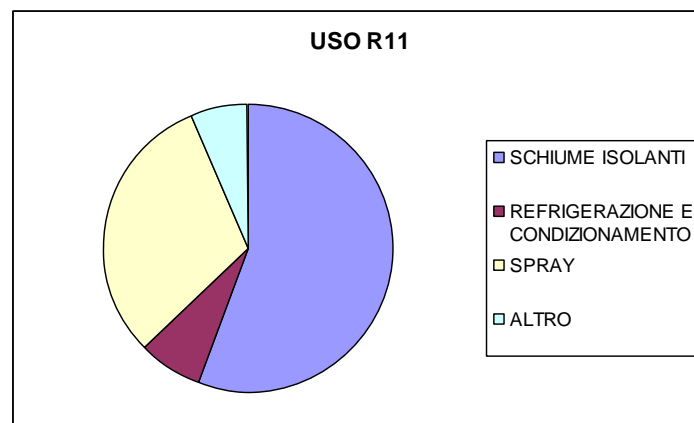


Figura 96: Uso di R11 in Occidente

- Smantellamento di impianti esistenti (frigoriferi, pompe di calore,)
- Collaudo degli impianti
- Estinzione incendi
- Uso di bombolette spray.

Pertanto i processi di scarico in atmosfera sono diversi e non sempre controllabili. Nel 1987 è stato firmato il *Protocollo di Montreal*, con l'adesione di 24 paesi industrializzati, con il quale si prevede:

- Il congelamento della produzione dei CFC ai livelli del 1986 e fino al 1993
- Riduzione all'80% entro il 1998
- Riduzione al 50% entro il 2000.

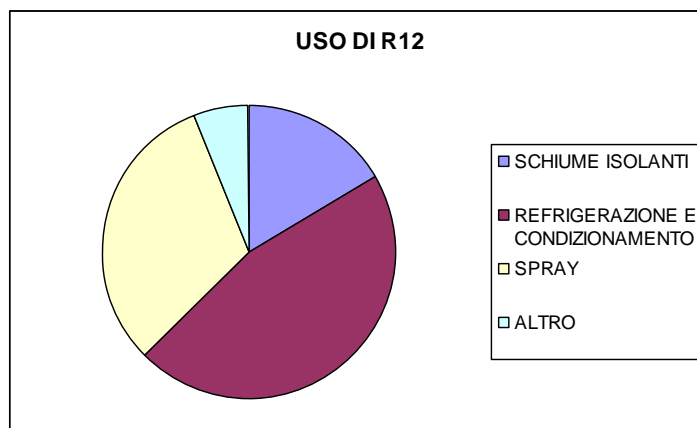


Figura 97: Uso di R12 in Occidente

Sono stati proposti riduzioni ancora più radicali. In ogni caso occorre ottimizzare i processi tecnologici e produttivi in modo da minimizzare i rilasci, ridisegnare agli organi di tenuta e giunzioni degli impianti esistenti.

Per la sostituzione completa dei CFC occorre trovare nuovi fluidi frigorigeni che abbiano caratteristiche chimico – fisiche ottimali: non devono inquinare, non essere volatili, essere chimicamente stabili, non corrodere i metalli costitutivi degli impianti, non essere infiammabili, avere buona capacità di trasporto termico e quindi elevato calore latente di vaporizzazione, basso costo, possibilità di adattarsi ai compressori e alle attuali tecnologie del freddo.

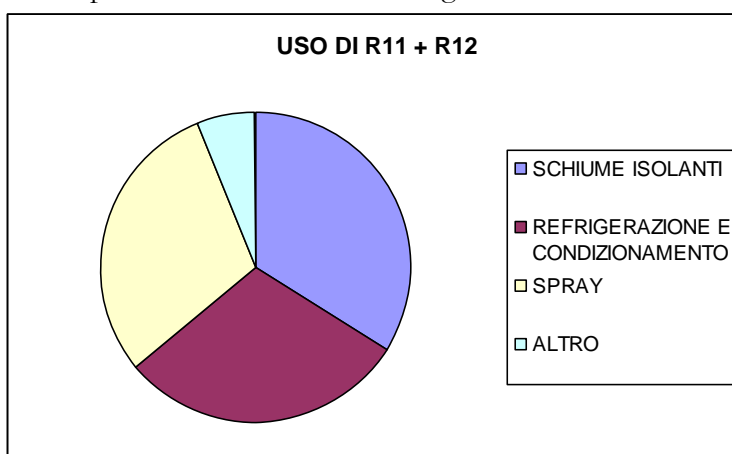


Figura 98: Uso combinato di R11 ed R12 in Occidente

Possibili sostituti dei CFC sono: solo in fase transitoria gli idrocarburi alogenati insaturi, HCHFC, gli *Idro fluoro Alcani*, HFA, come R123, R124, R134a, R141b. S

i tenga presente che il problema della sostituzione dei CFC è di enormi proporzioni sia per la ormai grandissima produzione industriale attuale di questi fluidi, sia per il necessario lavoro di adattamento della meccanica (compressori) alle mutate caratteristiche termofisiche e infine per il problema posto dai nuovi componenti (R123, R134a,...) di essere diluenti delle guarnizioni utilizzate nella costruzione degli stessi compressori.

Caratteristiche Termofisiche dei Fluidi Frigorigeni

Al fine di dimensionare gli impianti frigoriferi è necessario conoscere le caratteristiche termofisiche dei fluidi di lavoro oggi più utilizzati, quali l'R22, l'R134a e l'ammoniaca (R717).

Nelle tabelle nelle figure seguenti si riportano queste caratteristiche, per altro reperibili nei manuali specializzati per impianti frigoriferi e nel manuale ASHRAE.

Per ulteriori approfondimenti si rimanda ai manuali specializzati.

fluido	p.e.n. (glide) [°C]	t. critica [°C]	ODP R11=1	vita media atmosferica [anni]	GWP CO ₂ = 1 100 anni	gruppo sicurezza ASHRAE ²
R12	-29,8	111,8	0,9	102	8100	A1
R134a	-26,1	101,1	0	15	1300	A1
R600a	-11,8	135,0	0	3	3	A3
R22	-40,8	96,2	0,05	12	1500	A1
R717	-33,3	133,0	0	1	<1	B2
R407C R32/125/134a (23/25/52)	-43,6 (7,0)	86,7	0	6/33/15	1530	A1/A1
R410A R32/125 (50/50)	-51,4 (<0,1)	72,5	0	6/33	1730	A1/A1
R290	-42,1	96,8	0	3	20	A3
R502 R22/115 (48,8/51,2)	-45,4	82,2	0,3	12/1700	5490	A1
R404A R125/143a/134a (44/52/4)	-46,4 (0,9)	72,1	0	33/49/15	3260	A1/A1
R507 R125/143a (50/50)	-46,7	70,9	0	33/49	3300	A1

Legenda: ODP: potenziale distruttivo dell'ozono stratosferico, riferito a R11=1.

GWP: potenziale di effetto serra, con tempo di integrazione 100 anni, riferito a CO₂=1.

Tabella 9: Proprietà termofisiche di alcuni fluidi frigoriferi

fluido	p. cond. [bar]	p. evap. [bar]	COP	Q _{ov} [kJ/m ³]	t _{fc} [°C]
R12	7,5	1,5	4,07	1053	39,9
R134a	7,7	1,3	3,98	980	36,9
R600a	4,04	0,72	4,03	529	30 (vap. umido)
R22	11,9	2,4	4,04	1724	56,5
R717	11,7	1,9	4,10	1759	112,0
R407C R32/125/134a (23/25/52)	12,7	2,4	3,88	1667	49,2
R410A R32/125 (50/50)	18,9	4,0	3,76	2564	56,1
R290	10,5	2,39	3,95	1477	37,3
R502 R22/115 (48,8/51,2)	13,2	2,9	3,78	1754	38,9
R404A R125/143a/134a (44/52/4)	14,3	3,1	3,60	1756	35,5
R507 R125/143a (50/50)	14,7	3,2	3,57	1786	34,8

Tabella 10: Confronto delle efficienze per funzionamento standard -10, +30 °C

t [°C]	p [kPa]	ρ_l [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	v_v [$\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$]	h_l [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$]	h_v [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$]	cp_l [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$]	cp_v [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$]	μ_l [$\mu\text{Pa} \cdot \text{s}$]	μ_v [$\mu\text{Pa} \cdot \text{s}$]	λ_l [$\frac{\text{mW}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$]	λ_v [$\frac{\text{mW}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$]
-40	105,2	1407	0,20450	156,4	385,9	1,106	0,619	332,4	9,85	115,40	7,85
-35	132,0	1392	0,16530	161,6	388,1	1,114	0,633	313,9	10,07	113,10	8,11
-30	163,9	1377	0,13490	166,9	390,3	1,123	0,648	297,0	10,29	110,80	8,37
-25	201,4	1362	0,11110	172,3	392,5	1,132	0,664	281,5	10,52	108,50	8,63
-20	245,3	1346	0,09215	177,7	394,6	1,143	0,681	267,2	10,74	106,20	8,90
-15	296,2	1331	0,07703	183,2	396,7	1,154	0,699	254,0	10,97	103,80	9,17
-10	354,8	1315	0,06482	188,7	398,7	1,166	0,719	241,7	11,20	101,50	9,44
-5	421,8	1298	0,05488	194,3	400,6	1,180	0,739	230,2	11,43	99,09	9,72
0	498,0	1282	0,04672	200,0	402,4	1,194	0,761	219,4	11,66	96,71	10,01
5	584,1	1264	0,03998	205,8	404,2	1,209	0,785	209,1	11,90	94,34	10,30
10	680,9	1247	0,03437	211,6	405,8	1,226	0,811	199,3	12,15	91,97	10,60
15	789,3	1229	0,02966	217,6	407,4	1,245	0,839	189,9	12,39	89,61	10,90
20	909,9	1210	0,02570	223,7	408,8	1,265	0,870	180,8	12,65	87,25	11,22
25	1044	1191	0,02233	229,8	410,1	1,288	0,905	171,9	12,92	84,91	11,54
30	1192	1171	0,01946	236,1	411,3	1,314	0,944	163,3	13,19	82,58	11,88
35	1355	1150	0,01700	242,5	412,3	1,343	0,988	154,7	13,48	80,28	12,23
40	1534	1129	0,01487	249,1	413,1	1,376	1,038	146,3	13,78	78,01	12,60
45	1729	1106	0,01302	255,8	413,7	1,416	1,098	137,9	14,11	75,78	13,00
50	1943	1082	0,01141	262,7	414,1	1,463	1,170	129,5	14,46	73,61	13,43
55	2175	1057	0,01000	269,8	414,1	1,521	1,258	121,1	14,84	71,52	13,90
60	2428	1030	0,00875	277,1	413,8	1,595	1,370	112,6	15,26	69,54	14,43

Tabella 11: Grandezze termodinamiche per R22

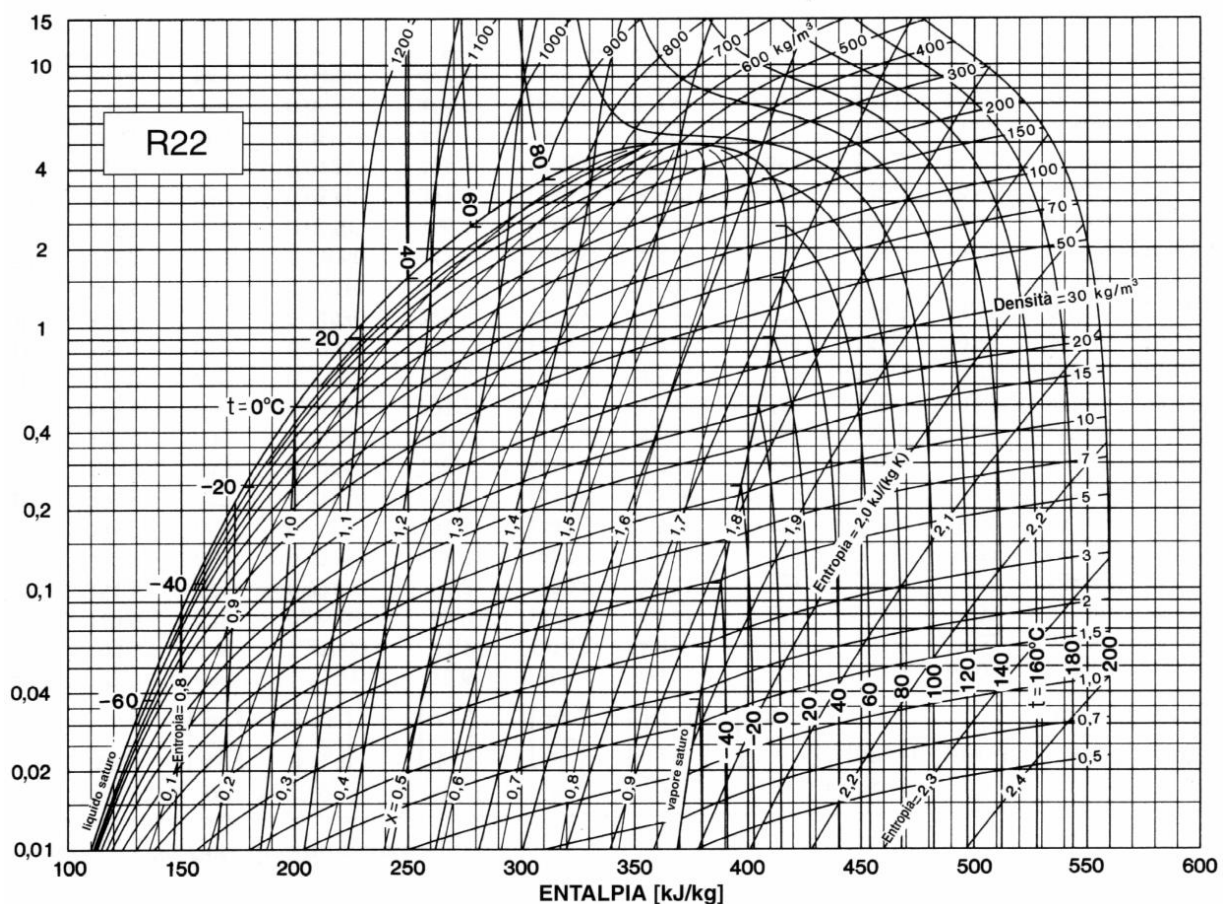


Figura 99: Diagramma h-p per R22

t [°C]	p [kPa]	ρ_l [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	v_v [$\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$]	h_l [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$]	h_v [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$]	cp_l [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^\circ\text{C}}$]	cp_v [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^\circ\text{C}}$]	μ_l [$\mu\text{Pa s}$]	μ_v [$\mu\text{Pa s}$]	λ_l [$\frac{\text{mW}}{\text{m } ^\circ\text{C}}$]	λ_v [$\frac{\text{mW}}{\text{m } ^\circ\text{C}}$]
-40	51,2	1415	0,36090	148,6	374,2	1,243	0,740	501,4	9,20	114,00	8,06
-35	66,1	1400	0,28400	154,8	377,3	1,251	0,756	465,0	9,41	111,60	8,55
-30	84,4	1386	0,22600	161,1	380,4	1,260	0,771	432,3	9,62	109,10	9,04
-25	106,4	1371	0,18170	167,4	383,6	1,270	0,788	402,7	9,83	106,60	9,53
-20	132,7	1356	0,14740	173,8	386,7	1,282	0,805	375,7	10,05	104,10	10,00
-15	163,9	1341	0,12070	180,3	389,7	1,293	0,823	351,0	10,26	101,50	10,47
-10	200,5	1326	0,09963	186,8	392,8	1,306	0,842	328,3	10,48	98,92	10,94
-5	243,2	1310	0,08284	193,4	395,7	1,320	0,862	307,3	10,70	96,41	11,40
0	292,7	1294	0,06935	200,0	398,7	1,335	0,883	287,9	10,92	93,89	11,85
5	349,5	1277	0,05841	206,7	401,6	1,350	0,906	269,8	11,14	91,34	12,31
10	414,5	1260	0,04948	213,5	404,4	1,367	0,930	252,9	11,37	88,79	12,76
15	488,3	1243	0,04212	220,4	407,2	1,385	0,955	237,1	11,60	86,23	13,21
20	571,6	1225	0,03603	227,4	409,8	1,404	0,982	222,2	11,84	83,69	13,66
25	665,3	1206	0,03094	234,5	412,4	1,425	1,012	208,2	12,08	81,16	14,12
30	770,1	1187	0,02667	241,6	414,9	1,447	1,044	195,0	12,33	78,63	14,58
35	886,9	1167	0,02306	248,9	417,3	1,472	1,080	182,4	12,58	76,13	15,05
40	1016	1147	0,01999	256,4	419,6	1,500	1,120	170,5	12,85	73,64	15,54
45	1160	1125	0,01737	263,9	421,7	1,532	1,166	159,1	13,13	71,17	16,05
50	1318	1102	0,01511	271,6	423,6	1,569	1,218	148,2	13,42	68,71	16,59
55	1491	1078	0,01316	279,4	425,4	1,611	1,280	137,7	13,74	66,27	17,17
60	1682	1052	0,01146	287,5	426,9	1,663	1,354	127,6	14,09	63,85	17,80

Tabella 12: Grandezze termodinamiche per R134a

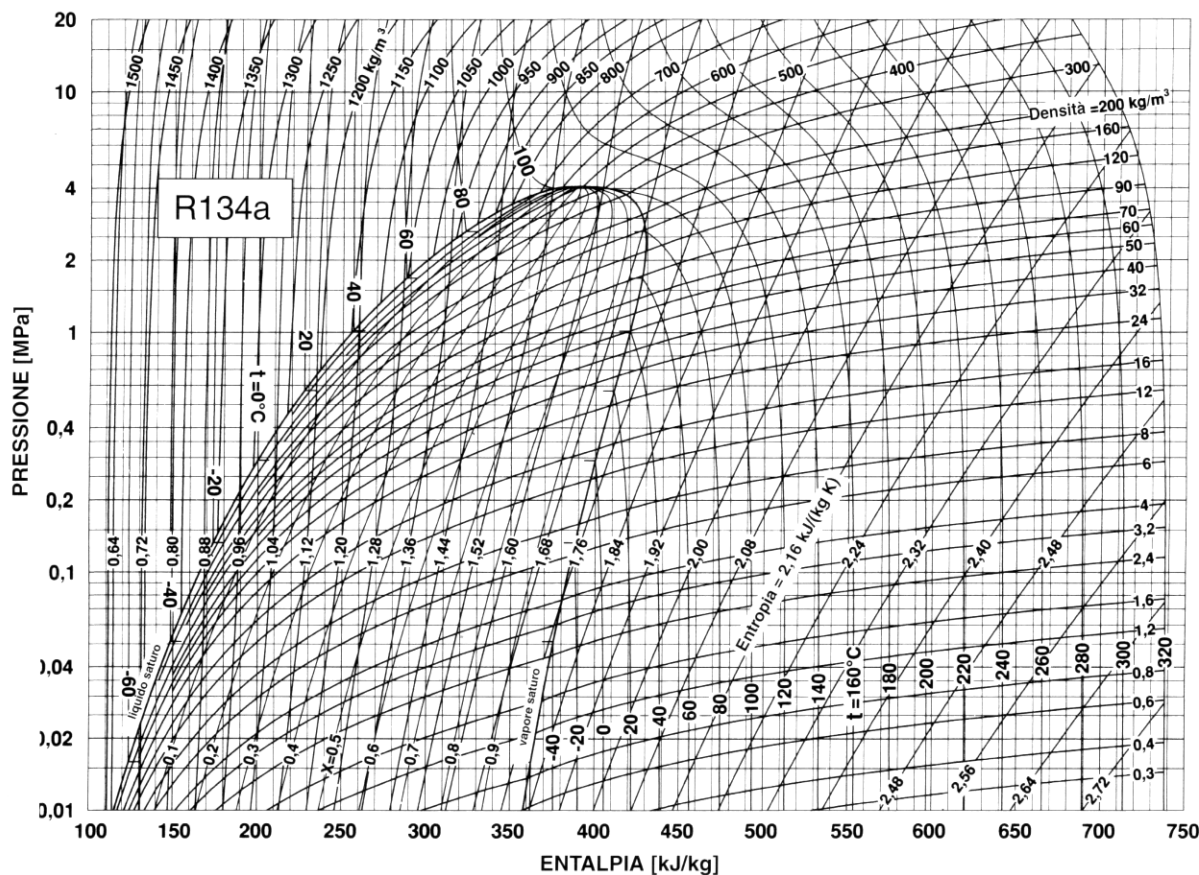


Figura 100: Diagramma b-p per R134a

t [°C]	p [kPa]	ρ_l [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	v_v [$\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$]	h_l [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$]	h_v [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$]	cp_l [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$]	cp_v [$\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$]	μ_l [$\mu\text{Pa} \cdot \text{s}$]	μ_v [$\mu\text{Pa} \cdot \text{s}$]	λ_l [$\frac{\text{mW}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$]	λ_v [$\frac{\text{mW}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$]
-40	71,7	690	1,55300	19,6	1408,4	4,396	2,176	302,4	8,06	592,10	23,13
-35	93,1	684	1,21600	41,7	1416,2	4,421	2,219	285,3	8,22	584,70	23,65
-30	119,5	678	0,96350	63,9	1423,6	4,447	2,268	268,5	8,39	576,90	24,18
-25	151,5	671	0,77130	86,2	1430,8	4,474	2,321	252,4	8,56	568,80	24,72
-20	190,1	665	0,62350	108,7	1437,6	4,501	2,379	237,4	8,73	560,40	25,26
-15	236,2	658	0,50850	131,3	1444,2	4,528	2,442	223,4	8,90	551,60	25,80
-10	290,8	652	0,41820	154,0	1450,4	4,556	2,510	210,5	9,07	542,50	26,36
-5	354,8	645	0,34660	176,9	1456,3	4,586	2,582	198,4	9,25	533,10	26,91
0	429,4	639	0,28930	200,0	1461,8	4,617	2,660	187,2	9,43	523,30	27,47
5	515,7	632	0,24310	223,2	1466,9	4,649	2,743	176,7	9,60	513,20	28,04
10	615,0	625	0,20550	246,6	1471,7	4,683	2,831	166,9	9,78	508,80	28,61
15	728,4	618	0,17470	270,2	1475,9	4,720	2,926	157,8	9,96	499,40	29,18
20	857,3	611	0,14930	293,9	1479,8	4,758	3,027	149,3	10,15	489,40	29,76
25	1003	603	0,12810	317,9	1483,1	4,799	3,135	141,3	10,34	479,00	30,35
30	1167	595	0,11050	342,0	1485,9	4,843	3,252	133,9	10,53	468,20	30,94
35	1350	588	0,09567	366,4	1488,2	4,891	3,378	126,9	10,72	454,60	31,54
40	1555	580	0,08313	391,1	1489,8	4,943	3,515	120,3	10,92	441,00	32,14
45	1782	571	0,07247	415,9	1490,8	5,001	3,666	114,2	11,12	427,40	32,74
50	2033	563	0,06336	441,1	1491,1	5,066	3,831	108,4	11,32	414,10	33,36
55	2310	554	0,05554	466,6	1490,6	5,140	4,015	103,0	11,53	384,80	33,98
60	2614	545	0,04880	492,4	1489,3	5,225	4,220	97,9	11,75	370,30	34,61

Tabella 13: Grandezze termodinamiche per R717 (Ammoniaca)

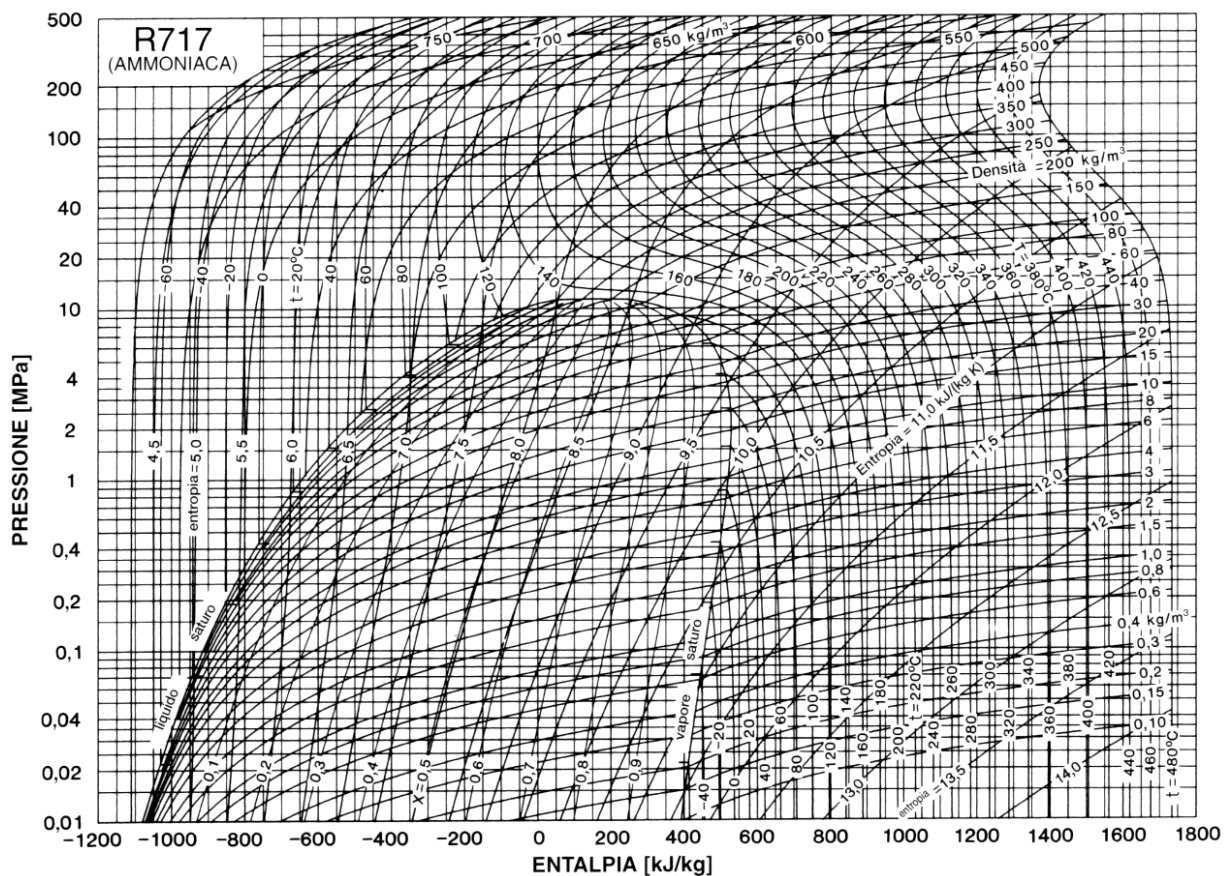


Figura 101: Diagramma b-p per R717 (Ammoniaca)

5.8 MACCHINE FRIGORIFERE AD ASSORBIMENTO

In Figura 84 si vede che l'organo meccanico che assorbe lavoro dall'esterno è il compressore. Solitamente l'energia viene fornita ad un motore elettrico che provvede a far muovere i componenti di un compressore meccanico del tipo a pistoni, a vite o centrifugo. E' possibile sostituire quest'organo meccanico con un sistema alimentato con energia termica? La risposta è positiva e il ciclo viene detto *ad assorbimento*. In Figura 102 ne è indicato lo schema impiantistico per una macchina del tipo *acqua-ammoniaca*. La miscela *acqua-ammoniaca* si compone di acqua che fa da solvente e di ammoniaca che fa da soluto (e quindi più volatile). Per effetto del calore Q_4 ceduto al serbatoio superiore (detto *generatore*) si libera NH_3 allo stato quasi puro e ad alta pressione.

L' NH_3 inizia il ciclo classico di condensazione, laminazione ed evaporazione (presente anche nel ciclo frigorifero classico a compressione di vapori saturi). All'uscita dell'evaporatore l' NH_3 si ricombina nel serbatoio inferiore, detto *assorbitore*, con la miscela di acqua-ammoniaca impoverita di ammoniaca e proveniente dal serbatoio superiore (tramite una valvola di laminazione perché in basso c'è una pressione inferiore a quella presente in alto). La reazione di assorbimento è *esotermica* e quindi cede calore Q_4 all'esterno. Una pompa provvede a riportare la miscela di acqua e ammoniaca ricomposta al serbatoio superiore (generatore) e si riprende il ciclo. In conclusione si hanno due cicli:

- uno interno fra generatore e assorbitore;
- uno esterno che produce nell'evaporatore l'effetto frigorifero.

Le temperature tipiche di utilizzo della macchina ad assorbimento dipendono dal fluido di lavoro. Per acqua ed ammoniaca si hanno circa $130\div150\text{ }^\circ\text{C}$ al generatore e circa $45\div55\text{ }^\circ\text{C}$ all'assorbitore e al condensatore. La temperatura all'evaporatore è funzione della pressione di esercizio ed è di qualche grado sotto lo zero. Oltre alla miscela acqua-ammoniaca si utilizzano oggi anche miscele *acqua-bromuro di litio* o anche *acqua-fluoruro di litio*: in questi casi è l'acqua il componente più volatile.

Queste macchine hanno il pregio di funzionare a temperatura inferiore (circa $80\text{ }^\circ\text{C}$) rispetto a quella ad ammoniaca ($130\div150\text{ }^\circ\text{C}$). In alcuni casi si è anche utilizzata l'energia solare per alimentare il generatore (Q_3). Le macchine ad assorbimento possono essere utilizzate anche con *cascami termici* (termine usato per indicare i rifiuti termici nei processi di lavorazione industriale).

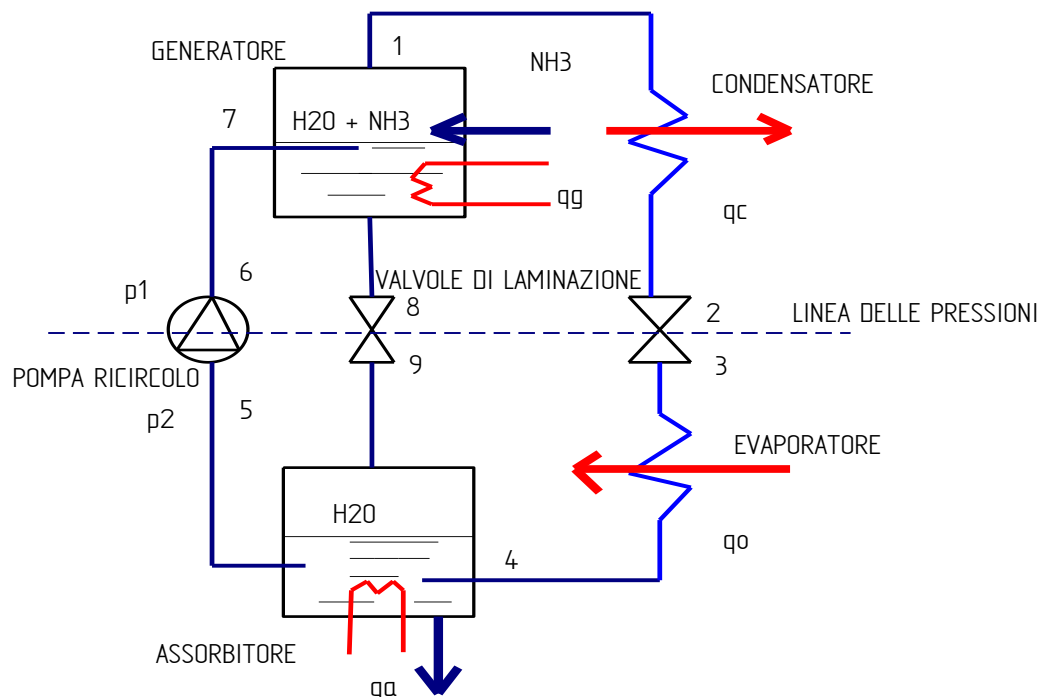


Figura 102: Schema di una macchina frigorifera ad assorbimento

$$\varepsilon = \frac{q_0}{q_g} = \frac{\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_g}}{\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_a}} \quad [128]$$

Osservando la Figura 103 si può anche scrivere:

$$\varepsilon = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad [129]$$

e quindi il coefficiente di effetto utile è immediatamente calcolabile graficamente dallo stesso diagramma termodinamico.

5.9 RICHIAMI DI TERMODINAMICA DELLE SOLUZIONI

E' noto dalla teoria delle soluzioni che per liberare NH_3 da una miscela con acqua occorre fornire calore mentre corre raffreddare la miscela per assorbirla. Quanto detto viene riportato in abachi aventi in ascissa la concentrazione ξ (massa di soluto per kg di miscela) e la temperatura T . In Figura 104 si ha un esempio per curve *vaporus* – *Liquidus* relative a due pressioni. Le due curve separano tre campi di esistenza della soluzione: **liquido** – **vapore saturo** – **vapore surriscaldato**.

Applicando la regola delle fasi di Gibbs si possono determinare i gradi di libertà del sistema nei tre campi di esistenza anzidetti e sulle curve di equilibrio. Nelle applicazioni impiantistiche relative agli impianti frigoriferi risulta più agevole riferirsi al piano (h, ξ) , aventi in ordinate le entalpie specifiche e in ascisse le concentrazioni del soluto (ammoniaca). Si ha quindi la modifica dell'abaco di Figura 104 che diviene quello di Figura 105.

In questi abachi, oltre alle curve di equilibrio, vi sono le curve *ausiliarie* che servono per determinare il punto corrispondente del vapore in equilibrio con il liquido di cui sono note $(\xi \text{ e } T)$ o $(\xi \text{ e } p)$. Nella stessa figura si vede come il liquido segnato con A stia in equilibrio con il vapore B determinato dall'intersezione della AA' (con A' sull'ausiliaria di pari pressione) e con la A'B (con B sulla curva *vaporus* alla pressione del liquido). L'abaco così strutturato prende il nome di *Merkel – Bosnjakovic* ed è riportato, per la miscela acqua – ammoniaca, in Figura 106.

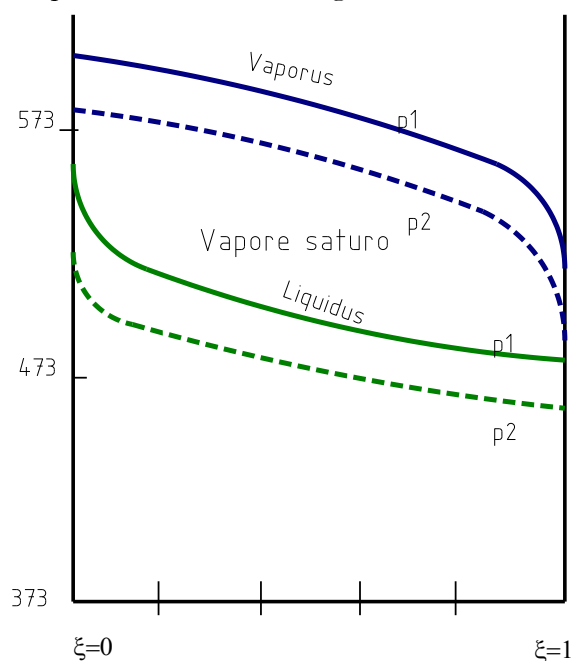


Figura 104: Esempio di curve *Vaporus* – *Liquidus*

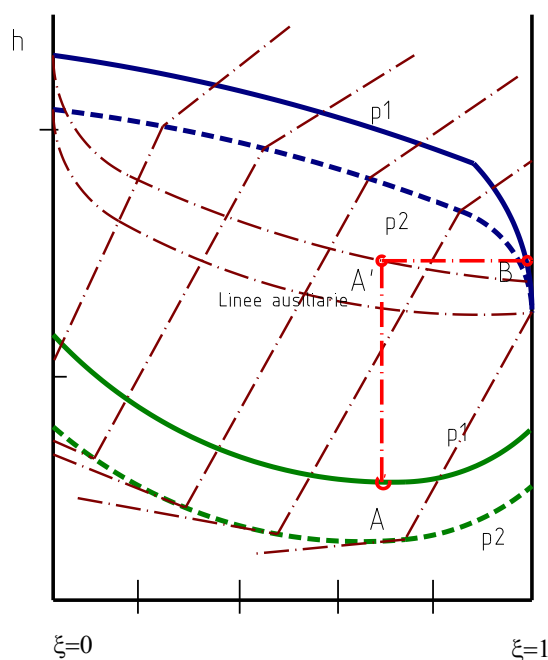


Figura 105: Esempio di curve (h, ξ)

5.10 PROGETTO DI UN IMPIANTO AD ASSORBIMENTO

Il ciclo ad assorbimento visto in precedenza si può ulteriormente migliorare osservando che la miscela impoverita che dal generatore scende nell'assorbitore è ad una temperatura maggiore di quest'ultimo (che fra l'altro deve essere raffreddato poiché la reazione di assorbimento è esotermica) e pertanto si può recuperare il calore come indicato in Figura 107 ove lo scambiatore consente di preriscaldare la miscela arricchita in entrata al generatore.

In Figura 108 si ha la schematizzazione del ciclo ad assorbimento nel piano (h, ξ) di Bosnjakovic. In essa sono segnati alcuni valori della temperatura e di pressione usuali. Il liquido ricco (a concentrazione ξ_r) entra nel generatore Ge a pressione $p_1=12$ bar. Dopo l'evaporazione di parte di NH_3 la miscela impoverita (a concentrazione ξ_p) esce da Ge.

Il processo di impoverimento (o di rilascio di NH_3 dal generatore) si può ritenere isobaro e in figura è segnata come 12. Il punto 3 di Figura 107 ha la stessa entalpia del punto 2 per effetto della laminazione.

Per effetto dello scambiatore di calore il liquido impoverito cede calore al liquido arricchito proveniente dall'assorbitore; l'entalpia del punto 3 diminuisce e la concentrazione si mantiene costante per cui si ha la trasformazione 33' di figura.

Nell'assorbitore il liquido povero assorbe vapore condensato dall'evaporatore: il processo avviene a pressione costante portando la concentrazione da ξ_p ad ξ_r lungo la trasformazione 3'4 di figura.

Il liquido ormai arricchito di NH_3 viene preriscaldato dallo scambiatore di calore e portato alla pressione maggiore p_1 .

Trascurando il lavoro di compressione della pompa di trasferimento, possiamo dire che il punto 4 coincide con il punto 1. Quanto detto descrive il ciclo del liquido. Vediamo adesso il ciclo del vapore o dell' NH_3 .

Questo esce dal generatore in condizioni relative a punto 5 e alla pressione p_1 . Per mezzo della curva ausiliaria per la pressione p_1 si determina il punto 5 sulla curva di equilibrio del vapore, come indicato in Figura 108.

Il vapore di NH_3 (che è ad elevata concentrazione, come si può osservare dalla stessa figura, passa allo stato corrispondente al punto 6 all'uscita del condensatore.

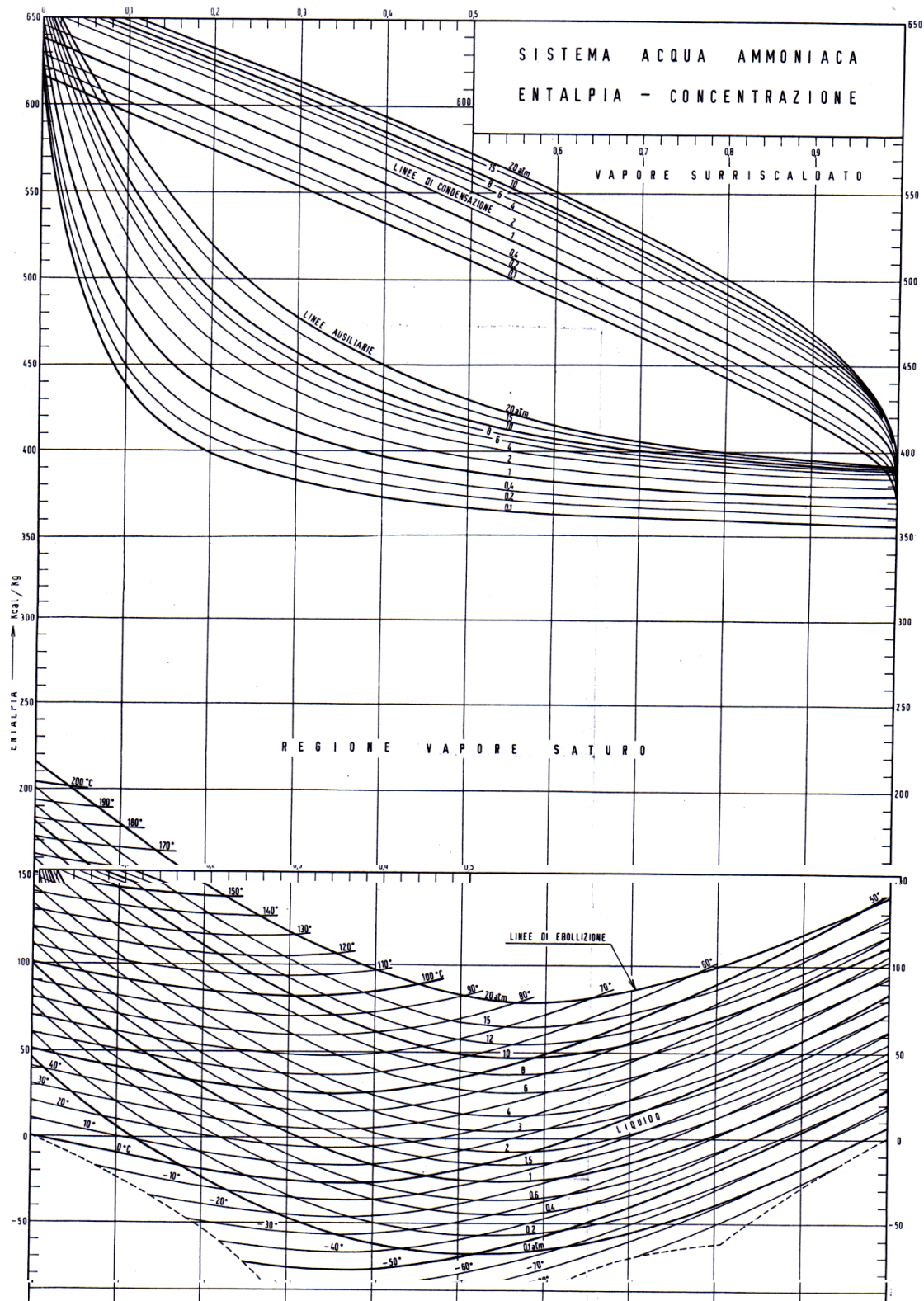


Figura 106: Abaco di Bosnjacovic per la miscela Acqua - Ammoniaca

La trasformazione 56 avviene a ξ_v costante fino alla temperatura di uscita alla pressione p_1 . Il liquido condensato è formato da NH_3 quasi pura ed attraversa la valvola di laminazione (trasformazione isoentalpica) fino al punto 7 (trasformazione $\xi = \text{costante}$ e $h = \text{costante}$) coincidente con il punto 6 prima trovato.

Il liquido laminato viene poi vaporizzato nell'evaporatore nelle condizioni relative al punto 8. A seconda della temperatura di inizio e di fine evaporazione (si osservi che si ha sempre una miscela di due componenti e che, per conseguenza, non si ha temperatura costante durante il passaggio di stato di evaporazione) il punto 8 può ricadere nella zona dei vapori saturi.

Per determinarlo occorre conoscere le condizioni della miscela tutta liquida alla temperatura di inizio vaporizzazione (L) e di quella tutta vapore nelle stesse condizioni, (V), come indicato in figura con l'ausilio delle curve ausiliarie, vedi il particolare in Figura 109.

La miscela avrà le condizioni 8 date dalla intersezione del $\xi_v = \text{costante}$ (in quanto la percentuale di NH_3 rimane costante nella miscela) con la retta LV dianzi determinata.

Il fluido nelle condizioni del punto 8 entra nell'assorbitore e il ciclo riprende nuovamente con la miscela arricchita che esce nelle condizioni del punto 4 dall'assorbitore.

La portata di fluido frigorifero all'evaporatore si determina con il rapporto:

$$\dot{m}_v = \frac{P_0}{h_8 - h_7}$$

ove si ha:

- P_0 potenzialità frigorifera, kW;
- $h_8 - h_7$ differenza di entalpia all'evaporatore, kJ(kg.

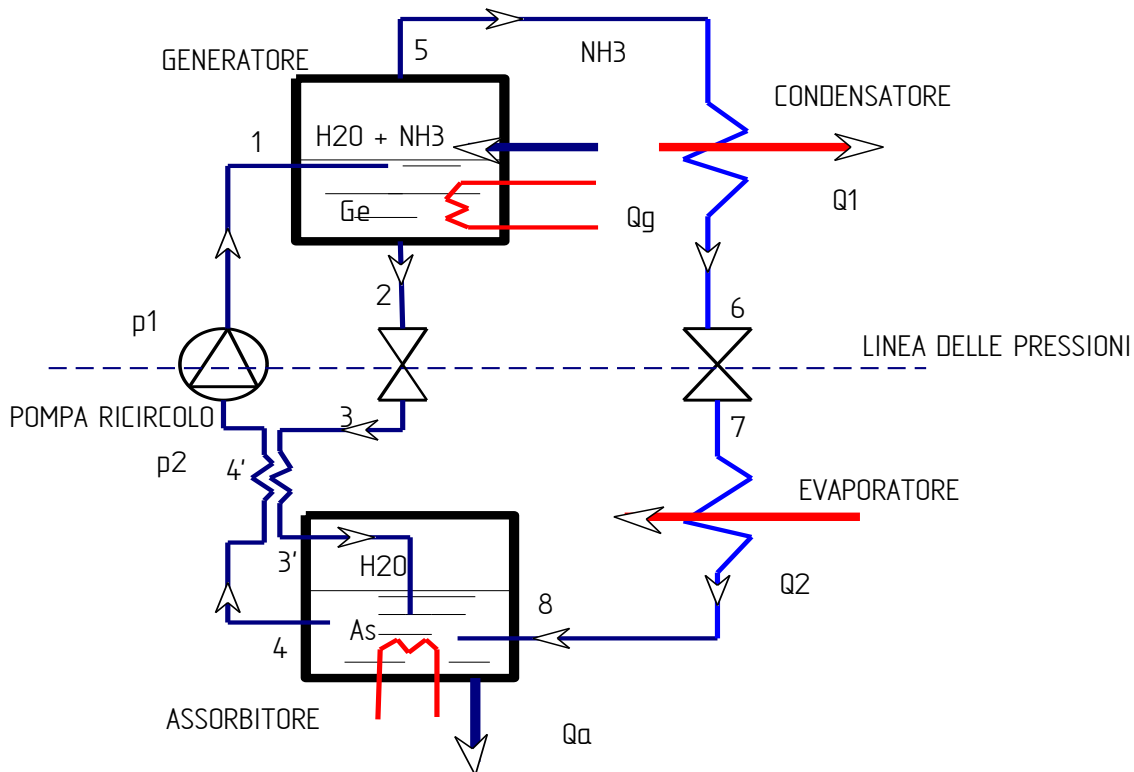


Figura 107: Ciclo ad assorbimento con recupero di calore

La portata di liquido impoverito è in rapporto ben determinato con quella del vapore nell'evaporatore e per determinarla occorre fare un bilancio delle masse di NH_3 entranti ed uscenti dal generatore, Ge. A tale scopo indichiamo con f il numero di kg di soluzione ricca da far circolare per ogni kg di vapore necessario all'evaporatore. Con riferimento alla Figura 110 si ha il seguente bilancio delle masse:

$$f \cdot \xi_r = 1 \cdot \xi_v + (f - 1) \cdot \xi_p$$

da cui ricaviamo:

$$f = \frac{\xi_v - \xi_p}{\xi_r - \xi_p}$$

espressa come $kg_{soluzione}/kg_{vapore}$

La portata totale della soluzione è:

$$\dot{m}_r = f \cdot \dot{m}_v$$

Il calore da fornire al generatore, Q_g , può essere determinato dal bilancio energetico allo stesso generatore. Dalla Figura 110 si ha:

$$\underbrace{1 \cdot h_5 + (f-1) \cdot h_2}_{\text{Energia uscente}} = \underbrace{f \cdot h_1 + Q_g}_{\text{Energia entrante}}$$

ponendo, nel caso di recupero di calore, $h_1 = h_4$ (trascurando l'incremento di entalpia dovuto alla pompa di trasferimento del liquido) allora si ha:

$$Q_g = f \cdot (h_2 - h_4) + (h_5 - h_2)$$

Assume una certa importanza, in questo tipo di impianti, il rapporto fra il calore asportato all'evaporatore e quello fornito al generatore. Questo viene detto **rapporto termico**, R , e coincide con il coefficiente di effetto utile se si trascura il lavoro della pompa. Risulta:

$$R = \frac{Q_{ev}}{Q_g} = \frac{h_8 - h_7}{Q_g}$$

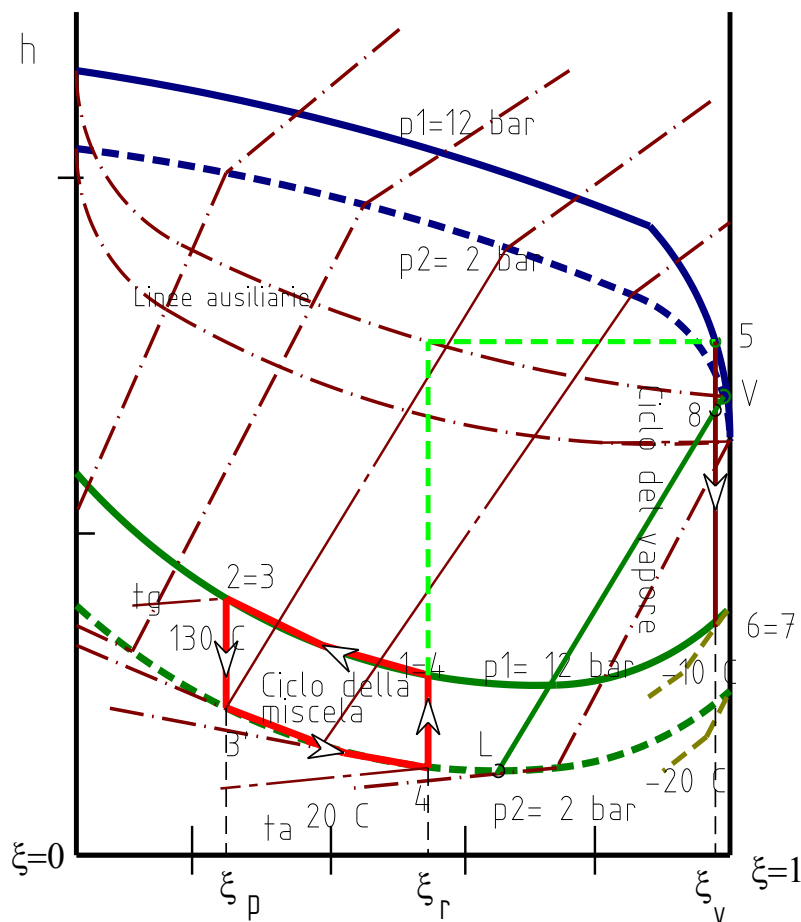


Figura 108: Ciclo ad assorbimento nel piano (h, ξ)

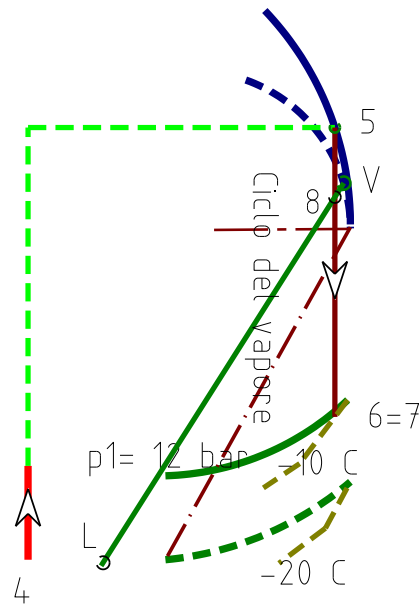


Figura 109: Particolare del ciclo del vapore

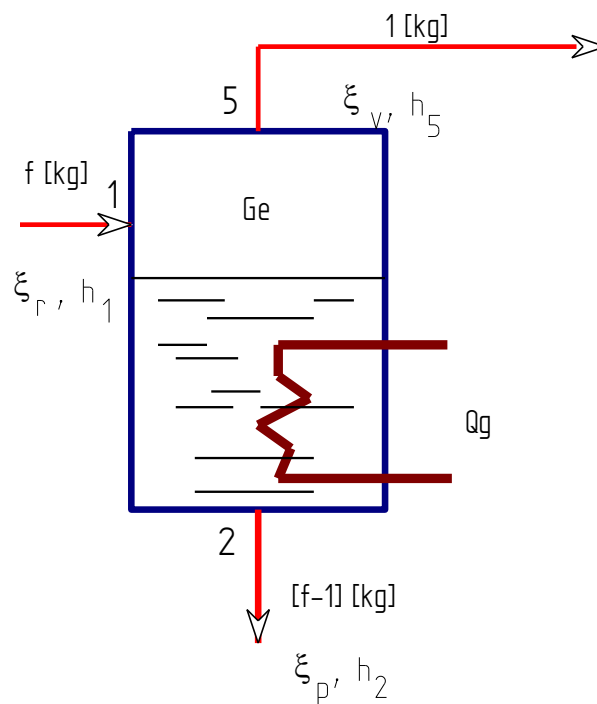


Figura 110: Bilancio delle portate al generatore

La potenza teorica della pompa di alimento del generatore vale:

$$P_p = \dot{m}_r \cdot v_r \cdot (p_1 - p_2)$$

ove si ha:

- \dot{m}_r è la portata di miscela ricircolata, (kg/s)
- v_r volume specifico della miscela, (m³/kg)
- $p_1 - p_2$ salto di pressione fra assorbitore e generatore, (Pa).

5.11 DETERMINAZIONE DEL CICLO AD ASSORBIMENTO

Per la determinazione del ciclo di Figura 108 occorre conoscere, quali dati di progetto, la temperatura di evaporazione iniziale, t'_{ev} , e finale, t''_{ev} , la temperatura del generatore, t_g , la temperatura di uscita della soluzione ricca dall'assorbitore, t_a , e la temperatura finale di condensazione, t_c . Si determina, in primo luogo, la pressione di esercizio del condensatore, p_1 , nonché la pressione di esercizio dell'evaporatore, p_2 . Per far ciò supponiamo, inizialmente, che l' NH_3 lasci il generatore pressoché puro ($\xi_v = 1$); in questo modo sull'asse verticale a destra della Figura 106 è possibile trovare l'intersezione la $\xi = 1$ e le isoterme t'_{ev} e t_c determinando le due isobare di equilibrio p_2 e p_1 . Noti questi valori, dall'intersezione della isobara p_1 con la isoterma t_g si ottiene il punto 2 di equilibrio all'uscita dal generatore e dall'intersezione dell'isobara p_2 con l'isoterma t_a si ottiene il punto 4 di equilibrio all'uscita dall'assorbitore.

Qualora non ci sia lo scambiatore di calore di recupero si traccia il ciclo di liquido, come indicato in Figura 108. Sono così determinati i valori delle concentrazioni ξ_r e ξ_p delle soluzioni ricca e povera. Con l'uso delle curve ausiliarie a pressione p_1 si può determinare il punto 5 rappresentativo del vapore all'uscita dal generatore. Il punto 6 di fine condensazione si determina dall'intersezione dell'isoterma t_c e della ξ_v . Il punto 7, a valle della laminazione, coincide (almeno per questo tipo di abachi) con il punto 6, per quanto già detto in precedenza. Il punto 8 si determina mediante l'intersezione fra la LV con la $\xi_v = \text{costante}$. Se si ha lo scambiatore di calore allora si procede come sopra detto per la determinazione delle pressioni e dei punti 4, 2, 5, 6, 7, 8.

Il punto 3' di uscita dallo scambiatore di calore si determina intersecando la $\xi_p = 0$ cost con la isoterma t_c . L'entalpia del liquido nelle condizioni del punto 1' si determina con un semplice bilancio energetico allo scambiatore di calore. Con il simbolismo di Figura 110 si ha:

$$f \cdot (h_1 - h_4) = (f - 1) \cdot (h_3 - h_{3'})$$

ovvero:

$$h_{4'} = h_4 + \frac{f-1}{f} (h_3 - h_{3'})$$

In genere si può considerare $h_{4'} = h_1$ e segnare il punto 1 lungo la $\xi = \xi_r$ nel diagramma di Figura 108. Il flusso termico che lo scambiatore deve trasmettere vale:

$$Q_{sc} = \dot{m}_v \cdot f \cdot (h_{4'} - h_4)$$

In questo modo resta completamente tracciato il ciclo ad assorbimento nel piano (h, ξ).

5.12 POMPA DI CALORE E SUE APPLICAZIONI

Si è detto che una macchina frigorifera può essere usata anche per produrre calore: in questo caso più che interessarci del serbatoio freddo ci si interessa del serbatoio caldo. In Figura 84 è indicato anche il lato *pompa di calore* nello schema di impianto a destra della stessa figura. Quando la macchina è alimentata elettricamente l'utilizzo come *pompa di calore* risulta decisamente conveniente essendo il COP maggiore di 2 e variabile fra 2 e 5 a seconda dei casi. In effetti il valore del COP dipende soprattutto dal meccanismo di scambio di calore utilizzato nei due serbatoi.

L'uso delle pompe di calore è da preferire all'uso diretto dell'energia elettrica su resistenze elettriche (*effetto Joule*). In quest'ultimo caso si ha una conversione 1:1 di energia elettrica in energia termica mentre con una pompa di calore si ha una conversione con rapporto $1:\text{COP}$ e quindi con un migliore utilizzo della stessa energia. Attualmente l'utilizzo e l'installazione delle pompe di calore sono favoriti dalla legislazione vigente mediante finanziamenti in parte a fondo perduto e con agevolazioni negli interessi e nel pagamento. Inoltre l'introduzione della tariffazione dell'energia elettrica differenziata fra giorno e notte può consentire notevoli risparmi e benefici economici potendosi, ad esempio, accumulare energia di notte (ad un costo più basso) e utilizzarla di giorno.

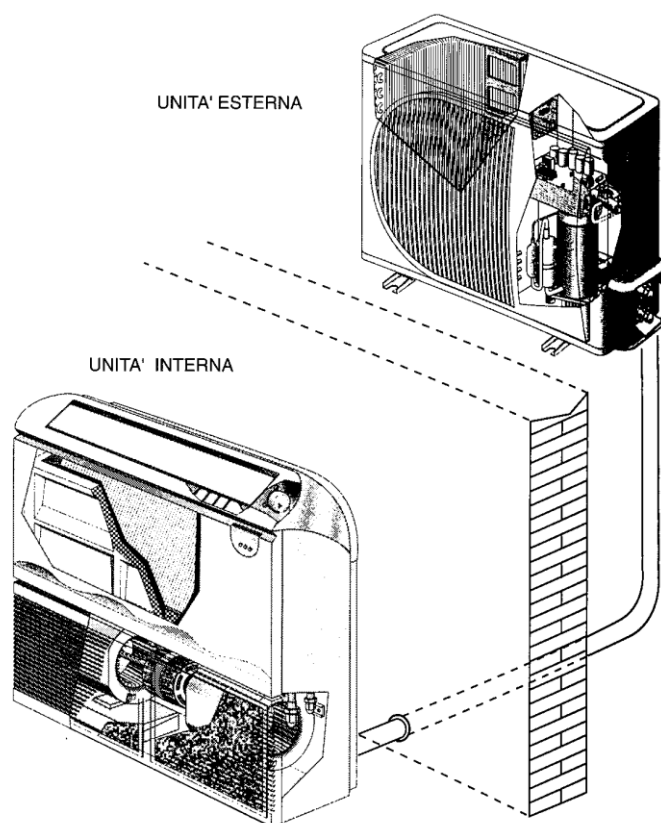


Figura 111: Schema di un sistema di tipo Split

I serbatoi freddi da cui prelevare l'energia termica sono di solito costituiti da bacini ambientali di grandi capacità, quali l'aria, l'acqua del mare o di laghi o di fiumi di grande portata. Il funzionamento delle macchine frigorifere può essere reso reversibile a pompa di calore mediante inversione delle funzioni del condensatore e dell'evaporatore.

Ciò è oggi effettuato elettronicamente mediante elettrovalvole servocomandate. In questo modo gli impianti frigoriferi (che prima venivano utilizzati solamente per il condizionamento estivo) possono essere utilizzati anche per il riscaldamento invernale con beneficio economico notevole: il costo del contratto di fornitura dell'energia elettrica non è più suddiviso nei soli mesi estivi ma in tutto l'arco dell'anno.

Alcuni costruttori hanno introdotto nel mercato pompe ad assorbimento del tipo acqua-BrLi (bromuro di litio) o FLi (Fluoruro di litio) che presentano interessanti vantaggi rispetto a quelle acqua-ammoniaca prima illustrate. Le nuove macchine, infatti richiedono una temperatura al generatore di circa 80 °C e quindi possono essere alimentate con caldaie tradizionali ovvero anche, ed è questo l'aspetto più interessante, con energia solare.

Infatti con una opportuna scelta di collettori ad alto rendimento (magari del tipo a tubi di vetro o debolmente concentranti per avere temperature di esercizio vicine agli 80 °C) si può pensare di alimentare il generatore di una macchina ad assorbimento e quindi di ottenere fresco per il raffrescamento ambientale utilizzando il calore solare.

Purtroppo queste nuove macchine hanno ancora costi elevati e pertanto la loro diffusione è ancora limitata a soli prototipi di studio.

In Figura 111 si ha un esempio di sistema *split* che in estate ha all'esterno il gruppo moto condensante e all'interno quello evaporante. In estate è possibile invertire le due funzioni e quindi si ha il condensatore all'interno e l'evaporatore all'esterno.

6 TERMOELETTTRICITÀ

A completamento di questo volume sulla *Termodinamica Applicata*, vogliamo presentare una applicazione importante che lega gli effetti elettrici e quelli termici e fornisce un importante contributo alla comprensione del fenomeno delle irreversibilità. Prima di procedere alla discussione delle applicazioni vere e proprie dobbiamo introdurre alcuni concetti relativi a tre effetti termoelettrici fondamentali.

6.1 EFFETTO SEEBECK

Se due materiali diversi, A e B come indicato in Figura 112, sono posti a contatto formando due giunzioni e se ciascuna giunzione è posta a temperatura T e T_0 allora ai capi del circuito si sviluppa una f.e.m. data dalla relazione:

$$E = \alpha_{AB}(T - T_0) \quad (130)$$

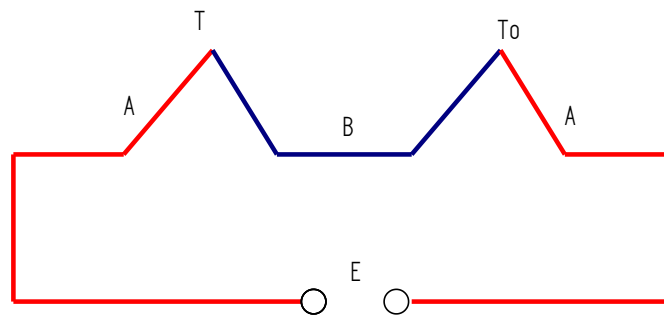


Figura 112: Effetto Seebeck

Il coefficiente α_{AB} è detto *coefficiente di Seebeck relativo* fra i due materiali considerati A e B. La *Termodinamica Irreversibile* (Onsager, Callen) dimostra che è possibile definire i poteri termoelettrici assoluti α_A e α_B di ciascuno dei due materiali dato dal rapporto (*cambiato di segno*) tra il gradiente di potenziale elettrico ed il gradiente di temperatura nel materiale considerato a corrente nulla. Il potenziale termoelettrico assoluto può essere positivo e negativo e risulta, inoltre:

$$\alpha_{AB} = \alpha_A - \alpha_B \quad (131)$$

Il *potere termoelettrico* è definito, in forma differenziale, dalla relazione:

$$\alpha_{AB} = \left. \frac{dE}{dT} \right|_{T_0(\text{costante})} \quad (132)$$

In genere si utilizza un valore medio di α_{AB} nell'intervallo $T \div T_0$, come illustrato in Figura 113. I valori usuali del potere termoelettrico è dell'ordine di $50 \mu V/K$ per materiali metallici e $200 \div 300 \mu V/K$ per i materiali semiconduttori. L'effetto sopra descritto è detto *Effetto Seebeck* e risulta di grandissima importanza nella applicazioni elettroniche e nel campo delle misure termiche. Esso, infatti, rappresenta il legame fra campi termici e fenomeni elettrici.

Scegliendo opportunamente l'intervallo ΔT si può utilizzare un valore medio che è sensibilmente vicino al valore puntuale di α_{AB} e pertanto si può immaginare una legame funzionale lineare che lega ΔT con la forza elettromotrice E che si manifesta ai capi dei morsetti. Se una coppia si mantiene a temperatura nota (*ad esempio* T_0) allora la (130) lega univocamente la E con la T e quindi, dopo una opportuna taratura, mediante un voltmetro sufficientemente sensibile, si può conoscere il valore della temperatura T .

Si osservi che le *termocoppie* non solo risolvono il problema della misura della temperatura senza dover fare ricorso a termometri a fluido di tipo convenzionale, esse consentono anche di avere un segnale elettrico di tipo analogico che può essere utilizzato in campo controllistico (*dispositivi elettromeccanici*) con elevate precisioni e rapidità di risposta.

Oggi le termocoppie sono strumenti standard nel campo delle misure termiche e gli stessi dispositivi di raccolta dati (*Data Logger*) provvedono a correggere le misure con riferimento ad un giunto *freddo* convenzionale a 0 °C.

Le dimensioni delle termocoppie possono essere davvero piccole potendosi oggi costruire giunzioni con diametri inferiori a 0.2 mm e quindi inseribili in punti di misura tanto piccoli da disturbare molto poco il campo di misura.

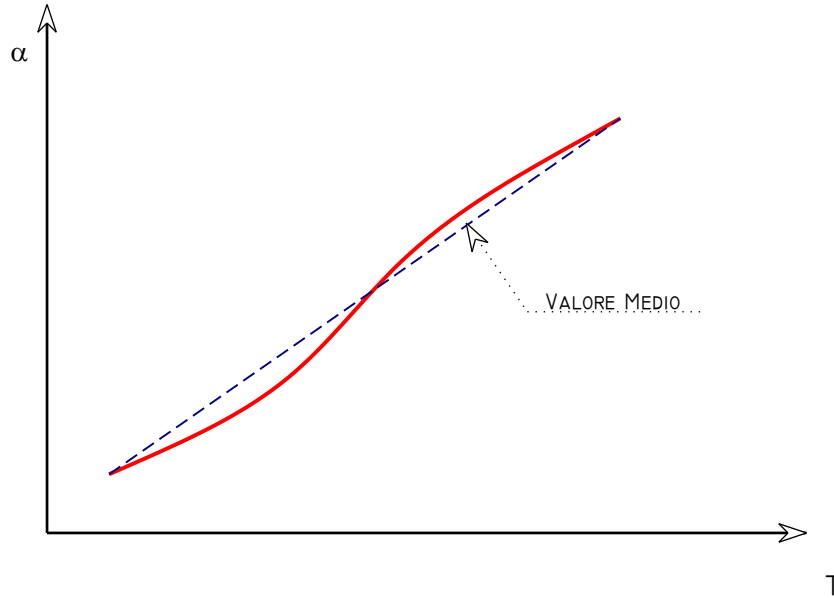


Figura 113: Andamento del potere termoelettrico al variare della temperatura

Le coppie di metalli usate sono *Ferro – Stagno*, *Ferro – Costantina*, ed altre ancora.

6.2 EFFETTO PELTIER

Si consideri adesso il circuito di Figura 114 nel quale le due giunzioni composte dai materiali A e B sono mantenute alle temperature T e T_1 con circuito chiuso e con una corrente circolante I . Si dimostra che allora in corrispondenza delle due giunzioni si ha cessione ed assorbimento di flussi termici dati dalla relazione:

$$|q_P| = |\pi_{AB} I| \quad (133)$$

ove π_{AB} è detto *coefficiente relativo di Peltier* tra i materiali A e B. Le dimensioni di questo coefficiente sono di $[W/A] = [V]$. Il coefficiente di Peltier deve essere valutato alla temperatura del giunto a cui si riferisce.

Anche l'effetto Peltier è reversibile per cui invertendo le polarità della generatore di tensione, e quindi il verso della corrente, si ha l'inversione dei flussi termici.

Fra i coefficienti di Seebeck e quello di Peltier si dimostra (vedi *Onsager*) valere la seguente relazione:

$$\pi_{AB} = \alpha_{AB} T \quad (134)$$

Ove T è la temperatura del giunto considerato. Pertanto l'effetto Peltier si può anche scrivere nella forma:

$$q_P = \alpha_{AB} \cdot T \cdot I = (\alpha_A - \alpha_B) \cdot T \cdot I \quad (135)$$

Si osservi che oltre ai flussi termici di *Peltier* si hanno contemporaneamente i flussi *Joule* (per effetto della resistenza elettrica dei materiali) e *Fourier* (di conduzione termica per effetto della differenza di temperatura fra i due giunti).

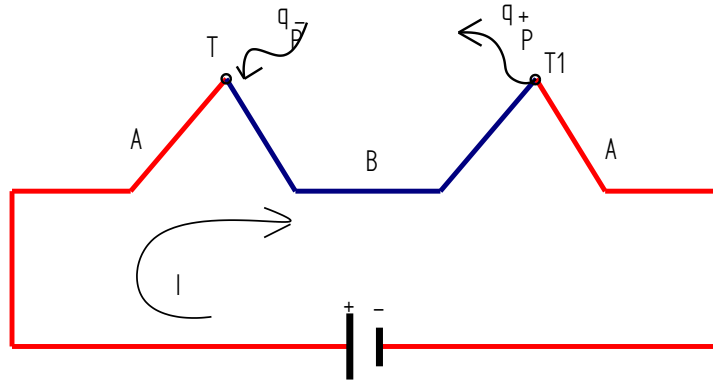


Figura 114: Effetto Peltier

Questo effetto risulta di grande importanza perché consente di costruire dispositivi termoelettrici (*frigoriferi termoelettrici, generatori termici*) di grande importanza nelle applicazioni.

6.3 EFFETTO THOMSON

Questo effetto si manifesta quando un conduttore è attraversato da corrente. In esso si sviluppa (*o si assorbe, a seconda del verso della corrente*) una potenza termica data dalla relazione:

$$|dq_T| = \left| \tau I \frac{dT}{dx} dx \right| \quad (136)$$

con τ detto *coefficiente di Thomson* (espresso nel S.I. in $[V/K]$), dT/dx il gradiente di temperatura. Si dimostra ancora (vedi *Onsager*) che vale la relazione:

$$\tau = T \frac{d\alpha}{dT} \quad (137)$$

Anche l'effetto *Thomson* è reversibile, come gli altri due effetti sopra indicati.

Si osservi che questo flusso termico è spesso mascherato da quello generato dall'effetto Joule e si somma (con il suo segno) ad esso nelle normali operazioni.

6.4 REFRIGERAZIONE TERMOELETTRICA

Una applicazione interessantissima degli effetti termoelettrici sopra descritti è la refrigerazione per effetto *Peltier* che sta trovando oggi notevoli applicazioni nel campo elettronico ed astronautico.

Consideriamo lo schema di Figura 115 nel quale una coppia di semiconduttori di tipo, rispettivamente p^{20} ed n^{21} (*giustificeremo fra breve il motivo di questa scelta*) uniti in modo da formare due giunti, quello caldo in alto e quello freddo in basso. Il circuito è chiuso e circola una corrente di intensità I alimentata da un generatore di tensione ΔV .

Il bilancio di energia al giunto freddo è dato da:

$$q_P = q_0 + q_i \quad (138)$$

ove si ha:

- q_P calore generato o assorbito per effetto *Peltier*;
- q_0 calore assorbito al giunto freddo,

²⁰ Un semiconduttore di tipo p è drogato con elementi positivi e quindi si hanno lacune elettriche positive disponibili.

²¹ Un semiconduttore di tipo n è drogato con elementi negativi e quindi si hanno elettroni liberi che sono caricati negativamente.

q_i calore generato internamente per effetto *Joule* e per conduzione termica fra i giunti.

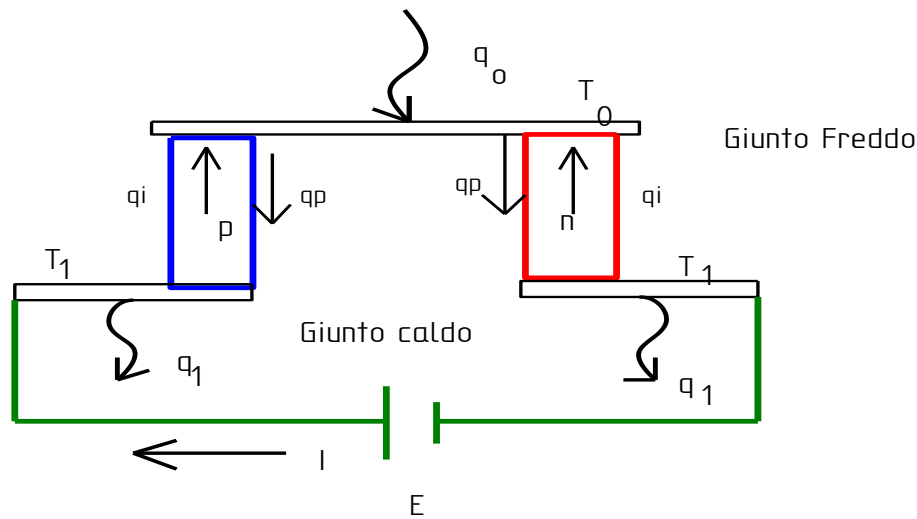


Figura 115: Schema di un frigorifero termoelettrico

Il calore interno può essere esplicitato dalla relazione:

$$q_i = K(T_1 - T_0) + 0.5RI^2 \quad (139)$$

ove si è supposto, per semplicità (*ma con buona approssimazione*) che il calore prodotto per effetto *Joule* si suddivida in parti eguali verso i due giunti. Nella precedente relazione K è la trasmittanza termica totale che dipende dai materiali utilizzati per i due componenti p ed n .

Inoltre R è la resistenza elettrica totale del circuito. Sostituendo le espressioni del calore di *Peltier* dato dalla (135) nella (138) si ha:

$$q_0 = (\alpha_p - \alpha_n)T_0I - [K(T_1 - T_0) + 0.5RI^2] \quad (140)$$

Questo è l'effetto frigorifero prodotto da questo circuito. Esso dipende dai materiali (tramite α_{pn}) e dalle loro proprietà termofisiche (K) ed elettriche (R). Di un frigorifero si suole calcolare l'efficienza frigorifera definita dal rapporto fra l'effetto frigorifero ottenuto e la potenza elettrica impegnata, cioè:

$$\varepsilon = \frac{q_0}{P} \quad (141)$$

Osserviamo ora che la caduta di tensione nel circuito è la somma della caduta ohmica e di quella per effetto *Seebeck*, cioè si ha:

$$\Delta V = \alpha_{pn}(T_1 - T_0) + RI \quad (142)$$

Pertanto la potenza elettrica spesa vale:

$$P = \Delta V \cdot I = \alpha_{pn}(T_1 - T_0)I + RI^2 \quad (143)$$

L'efficienza frigorifera risulta allora data dal rapporto (per la (140) e la (143) sopra scritte):

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{pn}T_0I - K(T_1 - T_0) - 0.5RI^2}{\alpha_{pn}(T_1 - T_0)I + RI^2} \quad (144)$$

Questa relazione è interessante poiché ci consente di osservare che in assenza di perdite irreversibili dovute alla *conduzione termica* e all'effetto *Joule* avremmo ottenuto una efficienza pari a:

$$\varepsilon = \frac{\alpha_{pn}T_0I}{\alpha_{pn}(T_1 - T_0)I} = \frac{T_0}{T_1 - T_0}$$

che è l'efficienza massima ottenibile da un ciclo di Carnot inverso. Le irreversibilità, quindi, riducono l'effetto frigorifero e quindi occorre ridurle al massimo. In pratica si può dimostrare che occorre massimizzare il parametro:

$$z = \frac{\alpha_{pn}^2}{KR} \quad (145)$$

detto *figura di merito* della coppia di materiali utilizzati. Si osservi come in questo rapporto siano comprese sia le proprietà termoelettriche (α_{pn}) che quelle elettriche (R) e termiche (K). Attualmente sono disponibili materiali aventi figura di merito pari a $z=0.003 \text{ K}^{-1}$ ed aventi le seguenti caratteristiche:

- potere termoelettrico assoluto: $\alpha=0.00021 \text{ V/K}$
- resistività elettrica: $\rho=0.00001 \text{ }\Omega\text{m}$
- conducibilità termica: $\lambda=1.5 \text{ W/(mK)}$.

Si tratta di leghe di *bismuto – tellurio – antimonio* per gli elementi di tipo *p* e di *bismuto – tellurio – selenio* per gli elementi di tipo *n*.

In Figura 116 si ha un abaco che indica l'andamento dell'efficienza frigorifera ε in funzione della differenza di temperatura (T_1-T_0) in ascissa e della figura di merito z (assumendo che la temperatura del giunto caldo sia pari a quella atmosferica $T_1=300 \text{ K}$).

Come si può osservare per una figura di merito $z=0.003 \text{ K}^{-1}$ si possono avere efficienze comprese fra 2 e 4 per ΔT compresi fra 10 e 20 °C.

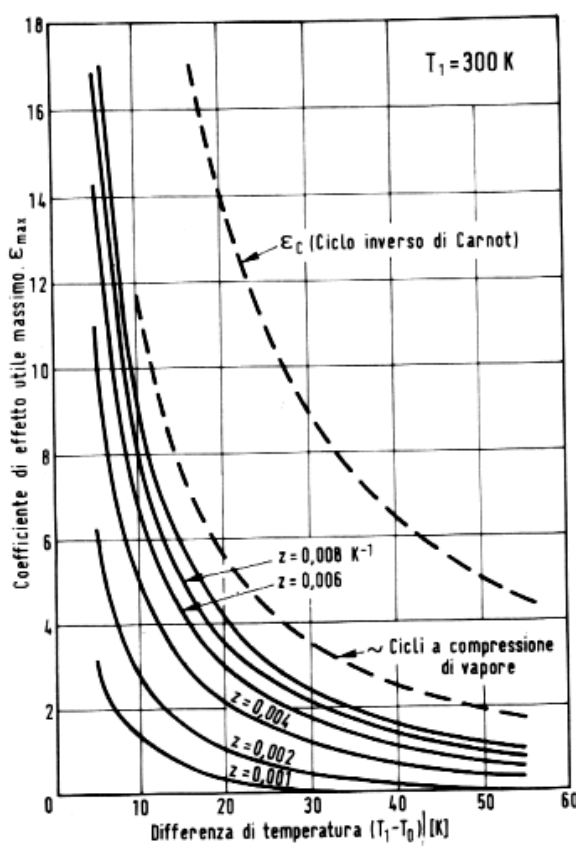


Figura 116: Efficienza di frigorifero termoelettrico in funzione delle figura di merito

Questi valori sono del tutto comparabili a quelli dei frigoriferi a compressione di vapori saturi ma con l'indubbio vantaggio di non avere organi meccanici in movimento e quindi di potere avere effetti frigoriferi anche in assenza di gravità o in condizioni operative di particolare disagio. In Figura 117 si ha lo schema costruttivo di un frigorifero ad effetto *Peltier*.

Ecco spiegato, quindi, l'interesse di questo dispositivo per applicazioni aeronautiche e spaziali e in questi ultimi anni anche per alcune applicazioni elettroniche.

Sono infatti disponibili (*ad un costo contenuto di circa 5 €/W*) piccoli frigoriferi *Peltier* da applicare al di sopra di microprocessori per mantenerli a temperatura accettabile.

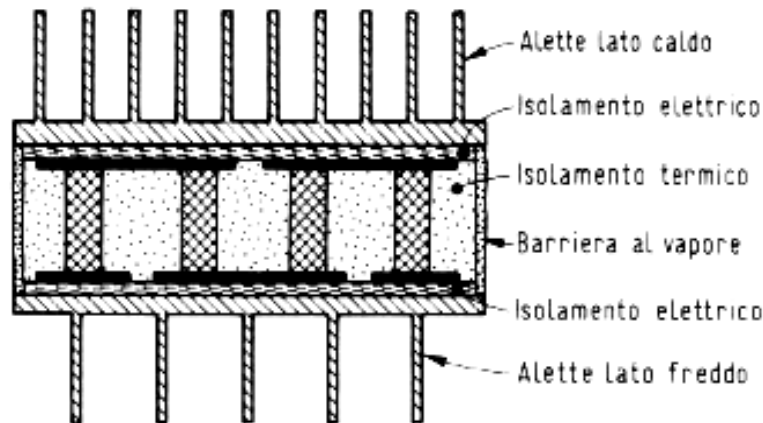


Figura 117: Schema costruttivo di un frigorifero Peltier

Questi componenti, infatti, presentano forti dissipazioni termiche ($20 \div 90 \text{ W}$ per una superficie di scambio effettiva di qualche cm^2) e richiedono un accoppiamento con opportuni sistemi di dispersione.

Solitamente si utilizzano le piastre con alette di alluminio ma per potenze specifiche elevate queste possono non essere sufficienti.

Inoltre se manca la circolazione dell'aria le piastre alettate non possono lavorare correttamente (*vedi computer portatili*).

Quando si vuole ottenere un raffreddamento certo e maggiore che nei casi normali le piastre *Peltier* sono una valida alternativa.

6.5 GENERATORI TERMO ELETTRICI

Una seconda applicazione interessante è quella del generatore termoelettrico che si differenzia dalla cellule fotovoltaiche per il fatto che possono utilizzare calore e non radiazione solare.

In Figura 118 si ha lo schema elettrico di un generatore termoelettrico formato da giunti di materiali di tipo p ed n collegati su un carico r .

Il giunto caldo assorbe la potenza termica q_e mentre il giunto freddo cede (*cioè è raffreddato esternamente*) la potenza termica q_c . Con riferimento ai versi dei flussi segnati si ha il seguente bilancio al giunto caldo:

$$q_e + q_j = q_P + q_{cond} \quad (146)$$

Il flusso di *Peltier* vale al giunto caldo:

$$q_P = \alpha_{pn} I T_1 \quad (147)$$

e al giunto freddo:

$$|q_P| = \alpha_{pn} I T_2 \quad (148)$$

Con il solito ragionamento di flusso *Joule* diviso in due fra giunto caldo e giunto freddo, la (146) diviene:

$$q_P + K(T_1 - T_2) = q_e + 0.5RI^2 \quad (149)$$

ove K indica la trasmittanza termica ed R la resistenza dei giunti.

Isolando il termine q_e che è la potenza termica esterna fornita si ha:

$$q_e = \alpha_{pn} I T_1 + K(T_1 - T_2) - 0.5RI^2 \quad (150)$$

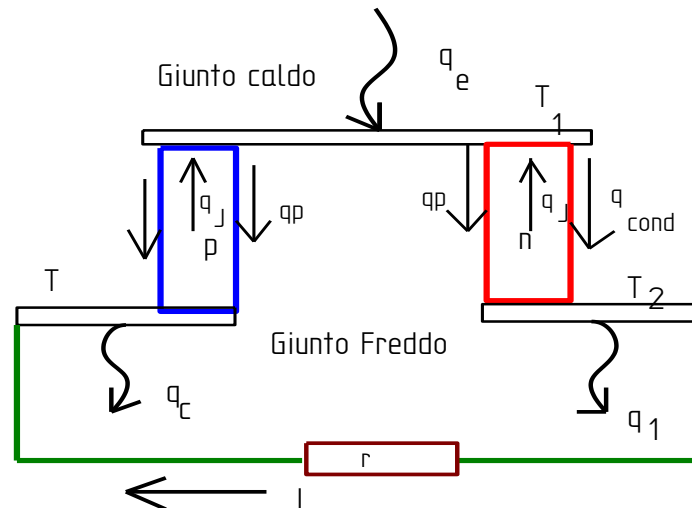


Figura 118: Schema di un generatore termo elettrico

La potenza elettrica ceduta al carico r vale:

$$P = r I^2 \quad (151)$$

e pertanto il rendimento di trasformazione di questo generatore, dato dal rapporto fra la potenza elettrica ottenuta e quella termica spesa, vale:

$$\eta = \frac{P}{q_e} = \frac{r I^2}{\alpha_{pn} I T_1 + K(T_1 - T_2) - 0.5 R I^2} \quad (152)$$

La corrente che circola nel circuito vale:

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{\alpha_{pn}(T_1 - T_2)}{R + r} \quad (153)$$

Si dimostra che per ottenere il massimo trasferimento di potenza debbono essere eguali la resistenza interna (R) e quella del carico r (*carico adattato*). Anche per questi dispositivi si definisce una nuova *figura di merito* data dal rapporto:

$$z' = \frac{\alpha_{pn}}{KR} \quad (154)$$

Per i generatori che è possibile costruire oggi si hanno valori compresi fra $0.002 \div 0.004 \text{ K}^{-1}$.

Il rendimento del generatore in funzione della figura di merito è dato in Figura 119 con temperatura del giunto freddo sempre pari a quella ambiente (300 K).

Al crescere della temperatura del giunto caldo e per figure di merito pari a 0.003 K^{-1} si ha un rendimento dell'ordine di $0.15 \div 0.20$.

Si tratta di valori interessanti e del tutto paragonabili a quelli ottenuti con buone celle fotovoltaiche.

Come si vede, anche senza fluido di lavoro circolante nel dispositivo, si ha sempre un rendimento effettivo di gran lunga inferiore rispetto a quello ottenibile con un ciclo di *Carnot*.

Anche per i dispositivi elettrici vale la 2° *Legge della Termodinamica*!

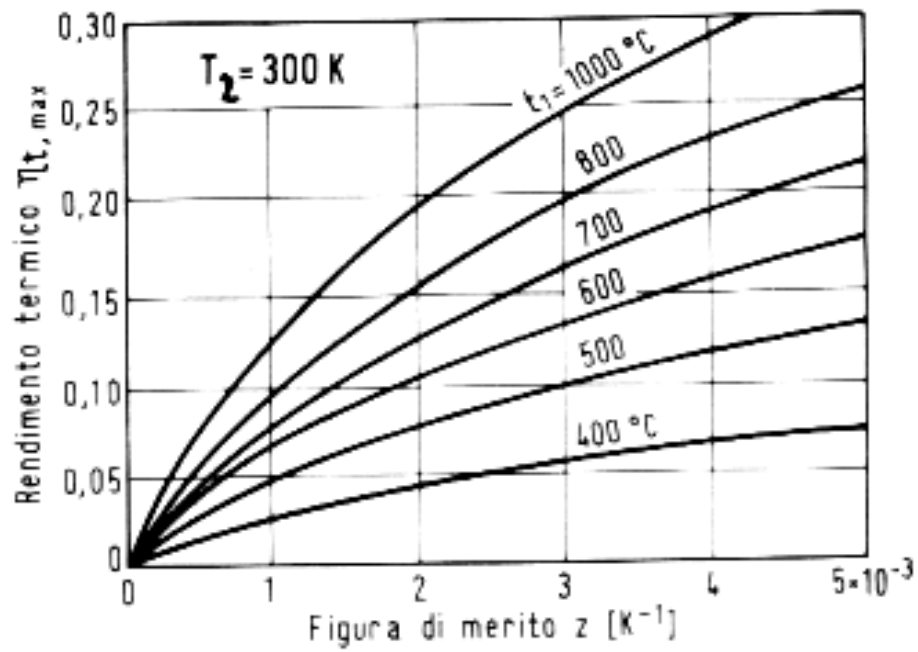


Figura 119:Rendimento dei generatori termoelettrici

7 ALETTE

Uno dei dispositivi più utilizzati nello smaltimento del calore in dispositivi meccanici e/o elettronici sono le alette costituite da lamine di materiale buon conduttore poste sopra la superficie di un corpo che si vuole raffreddare in aria o in un fluido gassoso.

E' importante osservare subito che, come si dimostrerà più avanti, le alette risultano convenienti solo quanto lo scambio di calore all'esterno della superficie da raffreddare è attuato in aria o in un fluido aeriforme generico. Questo, infatti, per le sue caratteristiche termofisiche determina modalità di scambio per convezione peggiori di quelle che si avrebbero con un fluido liquido e pertanto le alette consentono di migliorare lo scambio globale.

Per studiare il comportamento delle alette occorre idealizzare il problema come raffigurato in Figura 120. Sia questa idealizzata come una sbarra di *sezione rettangolare* attaccata ad una parete a temperatura T_0 .

L'aletta sia *sottile* e la *conducibilità termica del materiale elevata* in modo che si possa ritenere a *resistenza termica trascurabile* e quindi descrivibile con un solo valore di temperatura per ogni sezione x .

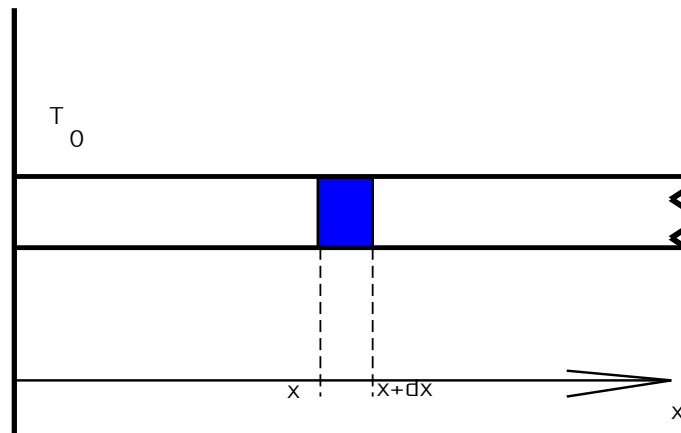


Figura 120: Schematizzazione di una aletta

Per la generica sezione ad ascissa x ed $x + dx$, detta S la superficie e P il perimetro, si può scrivere che il flusso termico di conduzione alle ascisse x ed $x + dx$ valgono::

$$q_x = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_x \quad [155]$$

$$q_{x+dx} = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+dx}$$

Sviluppando in serie di *Taylor* il secondo membro della precedente si ottiene:

$$q_{x+dx} = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_x - \lambda S \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_x dx$$

Pertanto il bilancio termico (*a regime stazionario*) della striscia elementare di ampiezza dx ad ascissa x è il seguente:

$$\lambda S \frac{d^2T}{dx^2} dx = hP(T - T_f) dx$$

Semplificando e ponendo $\theta = T - T_f$ ed ancora :

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}}$$

si può scrivere:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

Nell'ipotesi di proprietà termofisiche e geometriche costanti la precedente si può ritenere una equazione differenziale del secondo ordine, omogenea a coefficienti costanti il cui integrale generale è:

$$\theta = Ae^{-mx} + Be^{mx} \quad [156]$$

con A e B costanti di integrazione da calcolare con le ipotesi di condizione al contorno da definire ancora. Possiamo ipotizzare tre casi.

7.1 BARRA INFINITAMENTE LUNGA

In questa ipotesi la temperatura nella sezione terminale della barra si porta in equilibrio con quella del fluido e pertanto risulta:

$$\theta_0 = T_0 - t_f \quad \text{per } x=0$$

e ancora

$$\theta = 0 \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

Pertanto la [156] diviene:

$$\theta = \theta_0 e^{-mx}$$

Quindi la differenza di temperatura iniziale diminuisce esponenzialmente. Il flusso termico che la sbarra smaltisce nel fluido è allora pari, a regime stazionario, al flusso che esce dalla parete all'ascissa $x=0$ e cioè:

$$q_l = -\lambda S \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = \lambda S m \theta_0 = \sqrt{hP\lambda S} \theta_0$$

Senza la presenza dell'aletta la stessa parete avrebbe disperso, attraverso la superficie S il flusso:

$$q_s = hS\theta_0$$

La convenienza dell'aletta si ha quando si verifica:

$$q_l > q_s$$

ovvero anche:

$$\lambda S m \theta_0 > hS\theta_0$$

ossia quando $m > h/\lambda$. Ricordando l'espressione di m deve anche essere $\lambda P > hS$. Pertanto la convenienza dell'utilizzo dell'aletta si ha quando il materiale è un buon conduttore (grande λ) ovvero il coefficiente di convezione h è piccolo. In pratica si può anche scrivere:

$$\lambda > h \frac{S}{P}$$

per cui essendo il rapporto S/P omogeneo ad uno spessore fittizio l_0 si può ancora scrivere:

$$\frac{l_0}{\lambda} < \frac{1}{h}$$

Quindi la *resistenza di conduzione* l_0/λ deve essere inferiore alla *resistenza di convezione* $1/h$.

7.2 SBARRA CON TERMINAZIONE FINALE ADIABATICA

In questo caso le condizioni al contorno sono:

$$\theta_0 = T_0 - t_f \quad \text{per } x=0$$

e ancora:

$$-\lambda \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad \text{per } x = L$$

La soluzione dell'equazione generale fornisce le costanti:

$$A = \theta_0 \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$B = \theta_0 \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

e quindi la soluzione diviene:

$$\theta = \theta_0 \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$$

Il flusso termico uscente dalla parete all'attacco della sbarra vale:

$$q_l = -\lambda S \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda m S \theta_0 \tanh(mL)$$

La convenienza dell'aletta si ha quando questo flusso risulta superiore a quello senza aletta.

7.3 SBARRA DI LUNGHEZZA FINITA (CASO GENERALE)

Le condizioni al contorno divengono:

$$\theta_0 = T_0 - t_f \quad \text{per } x=0$$

e ancora:

$$-\lambda \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = h S \theta \quad \text{per } x = L$$

Le costanti di integrazioni divengono:

$$A = \frac{\theta_0}{2} \frac{e^{mL} + \frac{h}{\lambda m} e^{mL}}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)}$$

$$B = \frac{\theta_0}{2} \frac{e^{-mL} - \frac{h}{\lambda m} e^{-mL}}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)}$$

Pertanto la soluzione generale (detta di *Ten Bosch*) diviene:

$$\theta = \theta_0 \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{h}{\lambda m} \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)}$$

Il flusso termico all'attacco dell'aletta vale:

$$q_l = -\lambda S \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda m S \theta_0 \frac{\frac{h}{\lambda m} + \tanh(mL)}{1 + \frac{h}{\lambda m} \tanh(mL)}$$

con il solito confronto si può stabilire la convenienza dell'aletta.

7.4 EFFICIENZA DELLE ALETTE

Si definisce efficienza delle alette il rapporto fra il flusso effettivamente scambiato e quindi uscente dalla parete con l'aletta e quello che si avrebbe nelle condizioni *ideali* con temperatura di aletta pari a quella della base di attacco, cioè:

$$\varepsilon = \frac{q_{reale}}{q_{ideale}}$$

Nel caso di aletta con flusso trascurabile all'estremità (*caso 2, generalmente realizzato con buona approssimazione nelle condizioni reali*) si ha:

$$\varepsilon = \frac{\lambda S \theta_0 m \tanh(mL)}{hPL\theta_0} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

In Figura 121 si ha l'andamento dell'efficienza per alette rettangolari. Per le alette sottili si ha:

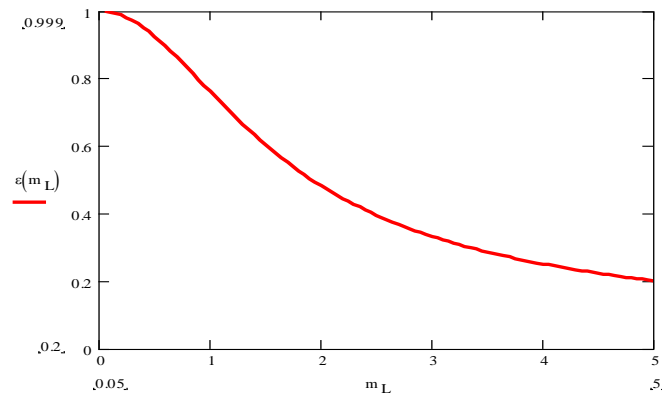


Figura 121: Efficienza di una aletta rettangolare

$$mL = \sqrt{\frac{h}{\lambda \delta}} \cdot L$$

e quindi l'efficienza è tanto maggiore quanto minore è la lunghezza L e quanto maggiore è il suo spessore 2δ e quanto maggiore è la conducibilità λ del materiale e quanto minore è il coefficiente di convezione termica h . Nota l'efficienza dell'aletta si calcola facilmente il flusso reale mediante la relazione:

$$q_{reale} = \varepsilon \cdot q_{ideale} = \varepsilon h S \theta_0$$

Se si prende in considerazione la soluzione di *Ten Bosch* si ha:

$$\varepsilon = \frac{\tanh(mL) + \frac{h}{\lambda m}}{mL + \frac{hL}{\lambda} \tanh(mL)}$$

il cui andamento è riportato in Figura 122.

7.5 PARETE ALETTATA

Nel caso che una parete di superficie A con n alette sia immersa nell'ambiente, detta ε l'efficienza delle alette, il flusso totale disperso vale:

$$q = h_s \left[(A_t - nS_a) + \varepsilon nS_L \right] (T_0 - T_f)$$

avendo indicato con A_t l'area totale della superficie, S_a la superficie di attacco di una singola aletta, S_L la superficie di scambio di una aletta, T_0 la temperatura della superficie e T_f quella dell'ambiente.

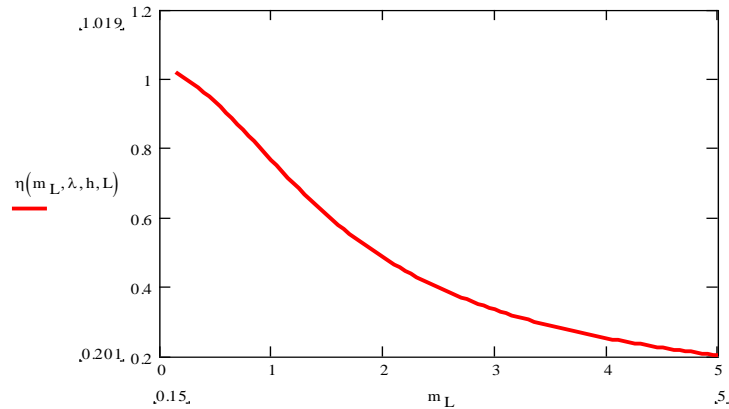


Figura 122: Efficienza di una aletta rettangolare con soluzione esatta

Per la validità di questa relazione occorre assicurarsi che la distanza fra le alette sia superiore (di almeno il doppio) a quello dello strato limite che, per valori correnti in aria, è di 2÷3 mm.

7.6 ALETTE ANULARI

Si consideri una superficie circolare come indicato in Figura 123 e si faccia l'ipotesi di piccolo spessore, H , rispetto alla lunghezza netta dell'aletta $L=r_2-r_1$.

Nell'ipotesi di *resistenza termica delle alette trascurabile* si può immaginare che il campo termico sia monodimensionale e che pertanto la distribuzione della temperatura sia funzione solo del raggio r , cioè sia $T=T(r)$.

La sezione trasversale dell'aletta è $A_s=2\pi rH$ e la superficie relativa al tratto di lunghezza dr vale $dA_s=2\pi r dr$.

Il flusso trasmesso ad ascissa r vale:

$$q_r = -\lambda A_r \frac{dT}{dr} \Big|_r = -\lambda 2\pi r H \frac{dT}{dr} \Big|_r$$

e che quello ad ascissa $r+dr$ vale:

$$q_{r+dr} = -\lambda A_{r+dr} \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr} = -\lambda 2\pi (r+dr) H \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr}$$

ove, sviluppando in serie di Taylor si ha:

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr} = \frac{dT}{dr} \Big|_r + \frac{d^2T}{dr^2} \Big|_r dr$$

e che il flusso disperso per convezione termica dalla aletta vale:

$$dq_a = h(T-T_f)dA_s$$

Pertanto il bilancio termico di una striscia dr ad ascissa r è dato da:

$$q_r = q_a + q_{r+dr}$$

e quindi, sostituendo le espressioni precedenti e riarrangiando i termini si ha:

$$\frac{d^2(T-T_f)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(T-T_f)}{dr} - 2 \frac{h}{\lambda H} (T-T_f) = 0$$

Abbiamo, quindi, una equazione differenziale di *Bessel* di *ordine zero* la cui soluzione generale è:

$$T - T_f = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

ove si posto, al solito:

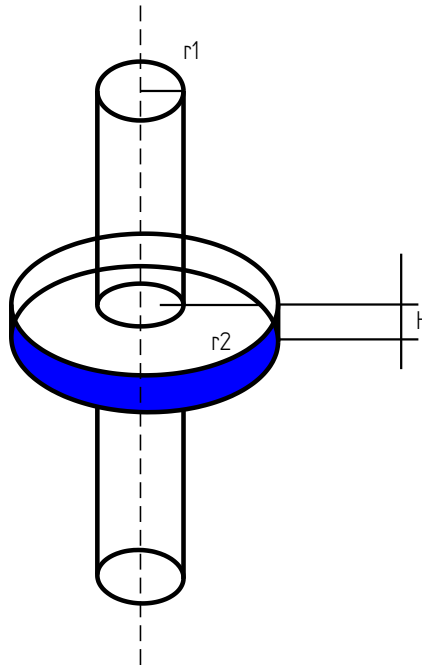


Figura 123: Rappresentazione di una aletta circolare di spessore costante

$$m = \sqrt{\frac{2h}{\lambda H}}$$

e si sono indicate con:

- K_0 la funzione di *Bessel* modificata di prima specie;
- I_0 la funzione di *Bessel* modificata di seconda specie.

Le costanti di integrazione vanno determinate con le condizioni al contorno:

$$T(r_1) = T_0$$

alla base di attacco e ancora per $r=r_2$:

$$q_{r=r_2} = -\lambda A_r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} = 0$$

cioè supponiamo che all'estremità delle alette il flusso sia trascurabile (*come già visto per le alette rettangolari*).

L'andamento della soluzione è rappresentata in Figura 124.

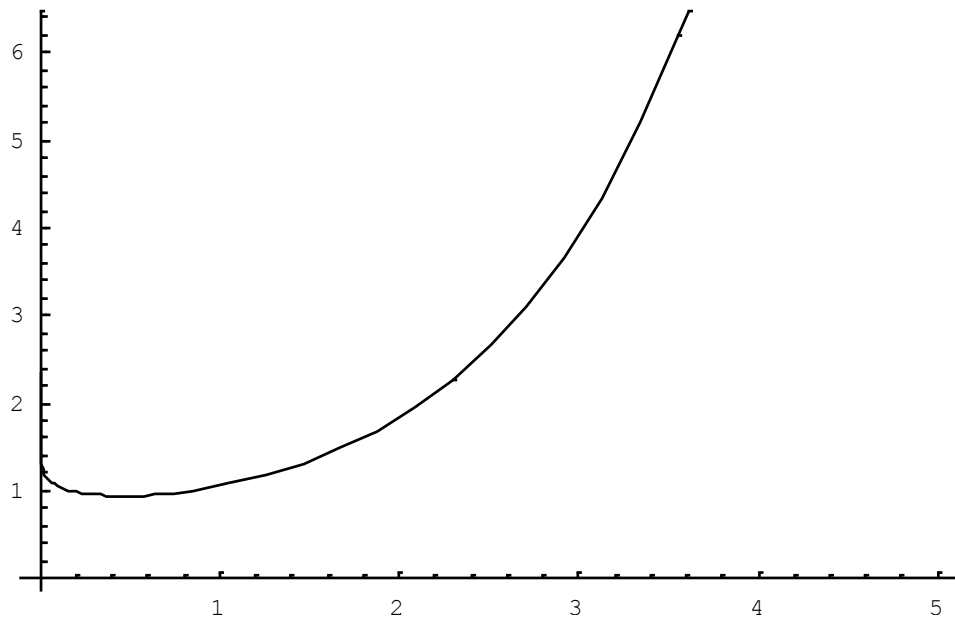


Figura 124: Distribuzione della temperatura nelle alette cilindriche

L'efficienza di un'aletta anulare è data in Figura 125 al variare del rapporto dei raggi.

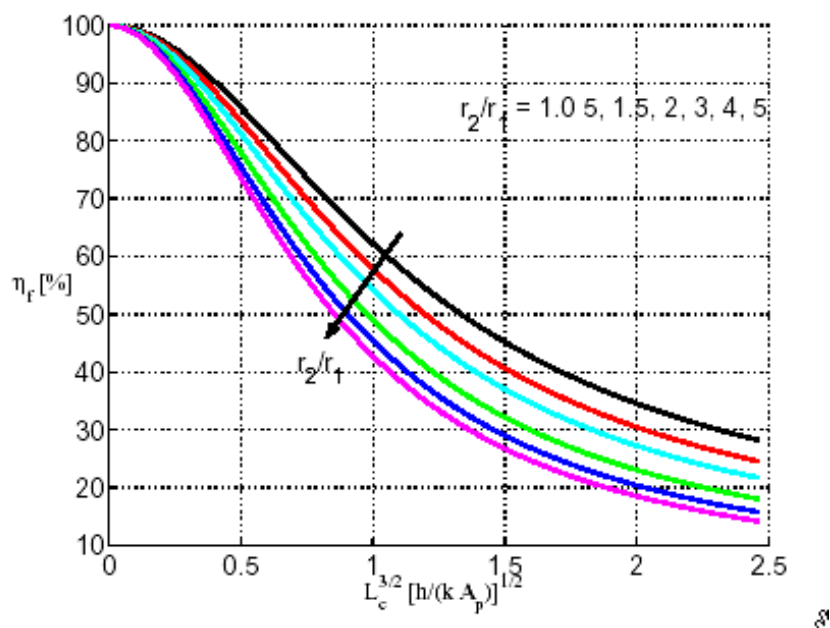


Figura 125: Efficienza alette anulari

7.7 PROFILO OTTIMIZZATO DELLE ALETTE

In precedenza si è visto il caso semplice di profilo rettangolare delle alette.

In effetti al crescere della distanza dalla parete il profilo rettangolare non consente le migliori condizioni di scambio poiché presenta la stessa resistenza termica di conduzione pur con profilo di temperatura che decresce esponenzialmente dalla parete di attacco.

Uno studio più approfondito consente di dimostrare che la sezione migliore è quella con profilo *iperbolico*, cioè con andamento rastremante verso la fine delle alette, come illustrato dal secondo profilo in Figura 126.

Questa sezione consente anche di ridurre al minimo il materiale presente nelle alette.

Nelle applicazioni pratiche si preferisce costruire le alette con profilo *triangolare* per le minori difficoltà costruttive che queste presentano e per la poca differenza rispetto a quella iperbolica.

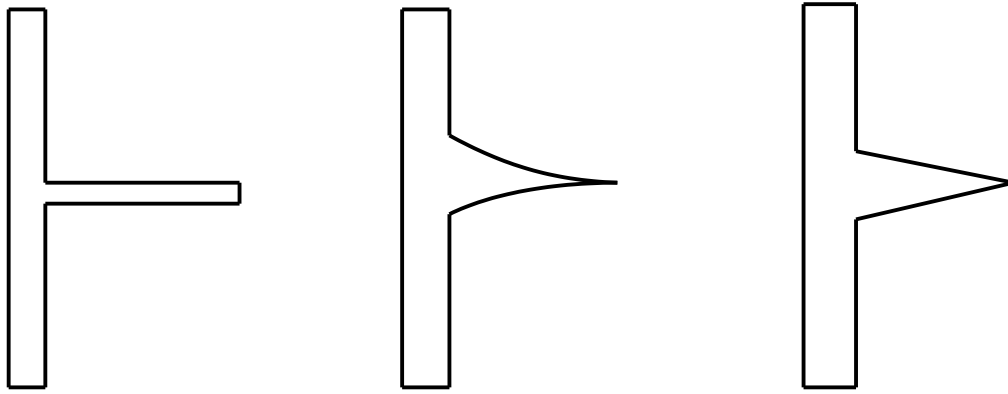


Figura 126: Profilo rettangolare, iperbolico e triangolare

7.8 APPLICAZIONI NUMERICHE AL PROBLEMA DELLE ALETTE

Con i codici di simulazione già visti in precedenza è possibile risolvere i problemi relativi alle alette. Ad esempio per una sezione di tubo con flangia raffreddata esternamente, con equazioni già indicate nei precedenti paragrafi, da aria porta alle seguenti soluzioni.

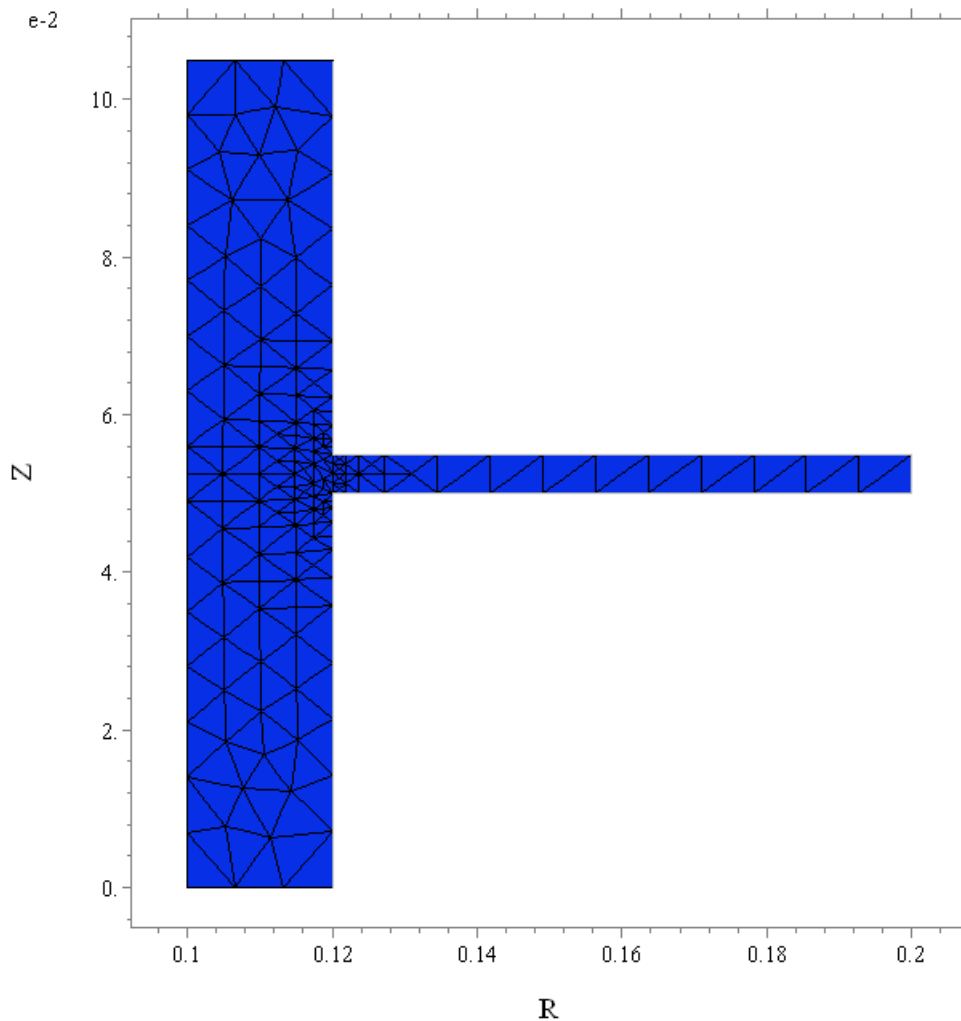


Figura 127: Griglia di calcolo

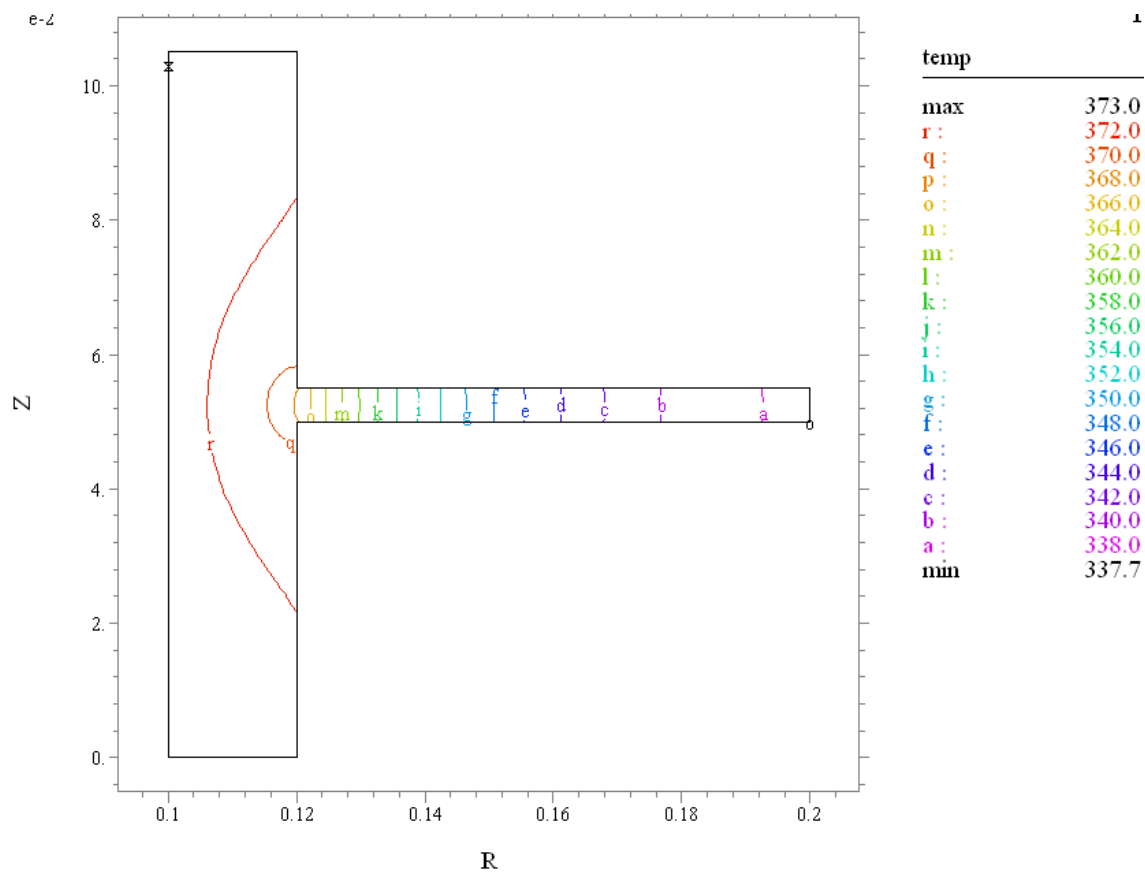


Figura 128: Distribuzione della temperatura in una flangia

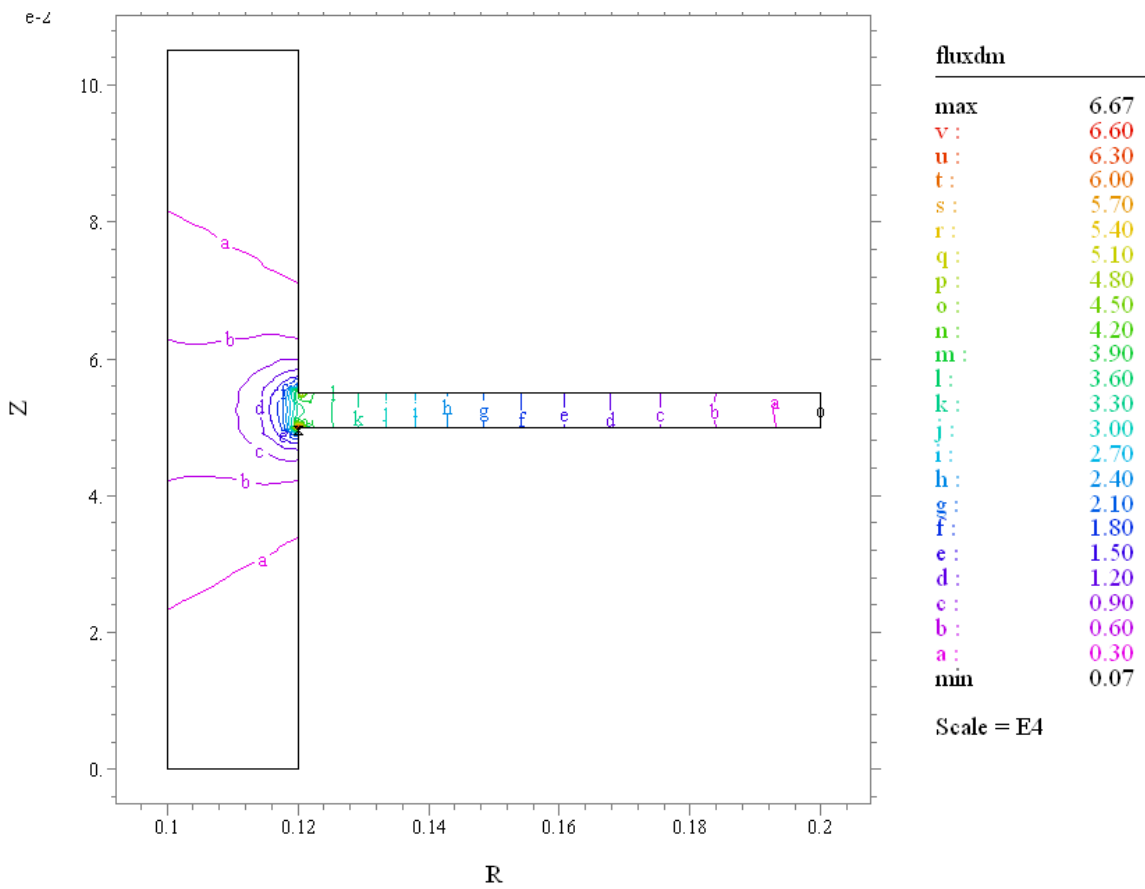


Figura 129. Distribuzione del flusso per un tubo flangiato

8 CONVEZIONE IN REGIME TURBOLENTO

Le equazioni dello strato limite A) così come sono scritte valgono per regimi laminari nei quali si possono individuare con precisione i percorsi e le velocità delle particelle di fluido in movimento. La cosa non risulta semplice nel caso di moto turbolento a causa della imprevedibile casualità del moto.

Ogni particella in un dato istante, infatti, può spostarsi liberamente in ogni direzione ma il valore medio in un periodo temporale congruo deve avere una componente media della velocità non nulla solo nella direzione di moto e cioè deve essere $\bar{u} \neq 0$, $\bar{v} = \bar{w} = 0$.

Seguendo una metodologia di studio suggerita da Prandtl è possibile scrivere, in ogni istante:

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

$$T = \bar{T} + T'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

avendo indicato con gli apici i valori fluttuanti e con il sopra segno i valori medi di ciascuna grandezza. Le equazioni dello strato limite A) con le precedenti sostituzioni possono essere risolte tenendo presente che, statisticamente, si hanno le seguenti eguaglianze:

$$\overline{u'} = 0$$

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} = 0 ; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = 0 ; \quad \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)} = 0$$

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$$

$$\overline{uu'} = 0$$

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}$$

$$\overline{u^2} = (\bar{u})^2 + \overline{(u')^2}$$

e pertanto divengono:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right]$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[a \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \overline{v'T'} \right] + \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right]$$

Ponendo:

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

con ε_M la *diffusività meccanica del vortice* e ancora:

$$-\overline{v'T'} = \varepsilon_H \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

con ε_H detta *diffusività termica del vortice* si può ancora scrivere:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad C)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + \varepsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$$

che sono le nuove equazioni dello strato limite per il regime turbolento. Come si può osservare adesso le incognite sono passate da tre (u, v, T) a cinque $(u, v, T, \varepsilon_M, \varepsilon_H)$ pur avendo sempre tre equazioni a disposizione.

Ne segue che la soluzione del campo dinamico e termico non è più possibile con le sole equazioni costitutive C) ma ad esse vanno aggiunte altre due equazioni che definiscono le diffusività del vortice meccanica, ε_M , e termica, ε_H . Queste equazioni sono di solito sperimentali, come si vedrà nel prosieguo con i *profili universali di velocità e di temperatura*.

8.1 NUOVA TEORIA SULLA TURBOLENZA

Per oltre un secolo si è associato alla parola *turbolenza* il significato di *caotico* nel senso classico di indeterminazione ossia di incapacità a gestire in modo rigoroso fisico – matematico il problema.

Quando un problema si presenta in modo non direttamente risolvibile o quanto meno gestibile con le conoscenze del momento allora l'Uomo cerca trovare sempre una via alternativa che consiste nel definire un modello più semplice che riduce la complessità del problema e che quindi porta ad avere risultati utili anche se si è perso il legame diretto fra causa ed effetto.

L'idea di Kutateladze di definire le variabili turbolente come somma di un valore medio e di un valore istantaneamente variabile (come fatto nel precedente paragrafo) è certamente stata utile ad affrontare e risolvere un problema che nell'ottocento non era risolvibile con le conoscenze dell'epoca.

Pur tuttavia questa procedura ha di fatto posto un velo all'intelligenza dei ricercatori di diverse generazioni perché ha impedito loro, per una sorta di pigrizia mentale, di ricercare una soluzione che avesse un legame diretto con il fenomeno complesso della turbolenza.

In pratica la metodologia di Kutateladze non risponde alle domande più dirette ed elementari che un ricercatore si deve porre: *perché avviene la transizione dal moto laminare al moto turbolento?*

In effetti la Statistica ci insegna che il valore medio di una variabile nasconde tutta la statistica di ordine superiore che essa può presentare focalizzando l'attenzione solo sul primo momento statistico, il valore medio. Le fluttuazioni non sono più prese in considerazione e con esse la storia evolutiva del fenomeno legato alla variabile fluttuante.

Se osserviamo il pennacchio di fumo che si origina da una sigaretta accesa, ad esempio, possiamo notare che all'inizio (nel tratto più vicino al focolare) si ha un andamento ordinato e laminare.

Successivamente, ad una certa distanza dal focolare, si comincia ad osservare una prima oscillazione (vedi Figura 130) di relativamente piccola ampiezza cui seguono altre oscillazioni di ampiezza crescente.

Quando queste oscillazioni superano determinati valori che dipendono dalle condizioni evolutive (tipo di fluido, temperatura del focolare, distanza, ...) allora si ha l'inizio della formazione di veri vortici caratteristici del moto turbolento.

Se consideriamo un segmento di pennacchio e consideriamo le forze agenti ai suoi estremi allora lo possiamo schematizzare come un'asta soggetta ai carichi di punta. E' noto che questa condizione di carico porta all'instabilità e quindi alla flessione quando la rigidezza flessionale (EI) dell'asta è inferiore ad un valore limite caratteristico per la geometria, i vincoli e i carichi.

La stessa cosa possiamo pensare per il segmento di pennacchio: quando, allontanandosi dal focolare, viene sottoposto a forze esterne alle quali non può resistere ecco che esso si flette e da quel momento iniziano le oscillazioni che sfociano nella turbolenza.



Figura 130: Pennacchio originato da un focolare in basso

Le considerazioni appena accennate sono oggi sviluppate dai vari ricercatori ottenendo eccellenti risultati e un grande avanzamento della conoscenza nelle problematiche della turbolenza che comincia a non apparire più come un moto caotico e quindi non descrivibile in modo esatto ma come un evento perfettamente deterministico che è possibile studiare con le metodologie solite).

Ancora una volta la *banalizzazione* della realtà e il velo mentale che da questa ne deriva ha portato per oltre un secolo a ritenere risolto un problema che invece è ancora tutto da studiare e risolvere. Il modello semplificato di Kutateladze è da ritenere solo un semplice surrogato della realtà, un modello comunque distante anche se ci ha consentito di pervenire a risultati importanti nella ricerca.

C'è da fare un confronto metodologico con quanto si è verificato per il coefficiente di convezione: Newton superò la complessità del fenomeno definendo, in modo puramente apodittico, h come rapporto fra flusso termico specifico e differenza di temperatura e così siamo andati avanti per secoli. Allo stesso modo Kutateladze semplificò il problema della turbolenza con le equazioni dei valori medi. Entrambe le posizioni si scostavano molto dalle equazioni costitutive del fenomeno ma, dobbiamo riconoscerlo, non era possibile fare altrimenti nei momenti storici in cui tali problemi sono stati posti ed affrontati.

Oggi siamo in grado di risolvere le equazioni costitutive di Navier Stokes mediante l'utilizzo di potenti computer e sofisticati programmi di calcolo (alias mediante algoritmi di calcolo opportuni) senza i quali poco potremmo fare. Lo stesso dicasi per lo studio della turbolenza.

8.2 LA DIFFUSIVITÀ MECCANICA TURBOLENTA

Con riferimento alla Figura 132 si immagini una particella di fluido alla distanza y dalla parete in moto turbolento all'interno dello strato limite dinamico. La velocità media longitudinale è pari a $\bar{u}(x, y)$ mentre quella trasversale è nulla. Se questa particella passa nello strato $(y - l)$, con l lunghezza media statistica di scambio fra gli strati di fluido, allora la velocità media diviene $\bar{u}(x, y - l)$. Questa distanza è detta *lunghezza di mescolamento* e definisce il percorso all'interno del quale la particella di fluido mantiene ancora la sua identità. La fluttuazione u' provocata da questa migrazione nel livello $(y - l)$ è dello stesso ordine di grandezza e può essere scritta nella forma:

$$|u'| \approx \bar{u}(x, y) - \bar{u}(x, y - l) \approx l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Allo stesso modo si può pensare che la fluttuazione v' sia dello stesso ordine di grandezza e che ancora si possa scrivere:

$$|v'| \propto l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Allora la diffusività meccanica del vortice, ε_M , può essere posta proporzionale a:

$$\varepsilon_M \propto l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

Misure sperimentali suggeriscono che la *lunghezza di mescolamento* è proporzionale alla distanza dalla parete e cioè che sia:

$$l = \kappa y$$

con $\kappa=0.4$ determinato sperimentalmente da *von Karman*. Pertanto sostituendo nella precedente relazione si ha:

$$\varepsilon_M = \kappa^2 y^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

che è l'equazione classica della rappresentazione della *diffusività meccanica del vortice* e che è stata utilizzata dai vari ricercatori per risolvere il problema della *chiusura* delle equazioni dello strato limite.

8.3 LA DIFFUSIVITÀ TERMICA TURBOLENTA

Quando le particelle si spostano da un piano ad un altro (quindi con variazione di v') trasportano anche la loro entalpia.

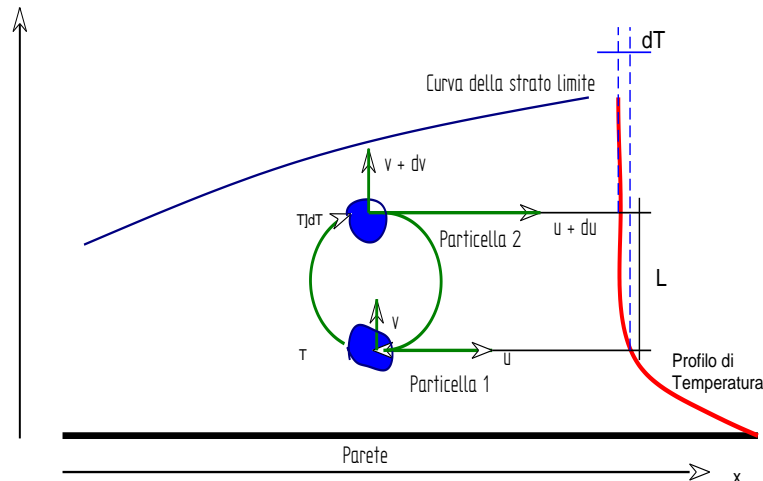


Figura 131: Lunghezza di mescolamento termica

Con riferimento alla Figura 131 si può osservare che le fluttuazioni generate dal mescolamento turbolento dipendono dalla lunghezza media di mescolamento, l , e che si può scrivere:

$$|T'| \equiv T\left(y - \frac{l}{2}\right) - \bar{T}\left(y + \frac{l}{2}\right) \approx -l \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

Il trasporto di entalpia corrispondente è dato da:

$$(q'')' = \rho c_p v'(\bar{T} + T')$$

Il valore medio temporale di questo flusso (turbolento) vale:

$$\overline{(q''_y)'} = \rho c_p \overline{v' T'}$$

In pratica il fluido a coordinate y inferiori cedono calore al fluido a coordinate y maggiori e pertanto nasce un *flusso termico apparente* dovuto agli effetti di mescolamento per la turbolenza. Tenendo conto dell'espressione di T' trovata in precedenza si ha:

$$\overline{(q''_y)'} = \rho c_p \overline{v'T'} \approx -\rho c_p l |\overline{v'}| \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

Ponendo:

$$a_t = l |\overline{v'}|$$

detta *diffusività termica turbolenta*, si può ancora scrivere per il flusso turbolento:

$$\overline{(q''_y)'} = \rho c_p \overline{v'T'} \approx -\rho c_p l |\overline{v'}| \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\rho c_p a_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

In definitiva il flusso termico totale (conduttivo più turbolento) è pari a:

$$q''_y = -\rho c_p (a + a_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

come visto per l'equazione dell'energia in moto turbolento. E' opportuno osservare che la *diffusività termica del vortice* non è una proprietà termofisica del fluido, come è invece la diffusività molecolare a , ma dipende dal *campo di moto*, come la viscosità dinamica turbolenta.

Per l'analogia del meccanismo di turbolenza sopra descritto e cioè per l'equivalenza del meccanismo di trasporto della quantità di moto e dell'entalpia, si può supporre (ma non sempre è così) che sia:

$$\text{Pr}_t = \frac{\nu_t}{a_t} \approx 1$$

Questa ipotesi semplificativa è spesso assunta da diversi ricercatori come base di partenza per le loro teorie.

8.4 PROFILO UNIVERSALE DI VELOCITÀ

Se si considera il moto di un fluido sopra una lastra piana si osserva che la distribuzione della velocità, a partire dalla parete, varia secondo un profilo tipico dello strato limite.

Si può subito osservare che il fluido per aderenza molecolare ha velocità nulla in corrispondenza della parete e che questa velocità va sempre più crescendo fino a raggiungere la velocità che il fluido aveva all'imbocco della lastra piana.

La distribuzione della velocità all'interno dello strato limite è di grande importanza ai fini del calcolo del fattore di attrito e dei coefficienti di scambio termico.

Nel caso di moto *laminare* il profilo di velocità può essere determinato integrando le equazioni di *Navier Stokes* all'interno dello strato limite dinamico e pervenendo ad un profilo di tipo parabolico o assimilabile ad esso.

Ben diverse, come si è visto nel paragrafo precedente, sono le condizioni quando il moto diviene turbolento. In questo caso, infatti, la velocità istantanea di una particella può andare in qualunque direzione, in modo del tutto casuale.

In Figura 132 si vede come una particella ad ordinata y che si sposta nel piano ad ordinata $y + dy$ scambia con la analoga che scenda nel piano y (per conservazione della massa) la quantità di moto:

$$\Delta p = dm(u_2' - u_1')$$

ed analogamente l'energia:

$$de = c_p dm(T_2' - T_1')$$

Ne deriva che la turbolenza fa nascere due effetti nuovi: un rallentamento degli strati veloci per effetto dell'assorbimento di quantità di moto degli strati più lenti ed uno scambio di entalpia fra particelle di strati a diverse temperature.

L'esigenza di risolvere le variabili \bar{u} , \bar{v} e \bar{T} nonché ε_M e ε_H con tre sole equazioni di *Navier Stokes*: ha generato il cosiddetto **problema della chiusura** nel senso che, oltre alle equazioni suddette occorre conoscere altre relazioni, solitamente di tipo sperimentale, per la determinazione delle *diffusività del vortice* meccanica e termica.

Un metodo elegante e proficui per risolvere questo problema è quello dei cosiddetti *profili universali di velocità e di temperatura* che qui si richiama brevemente.

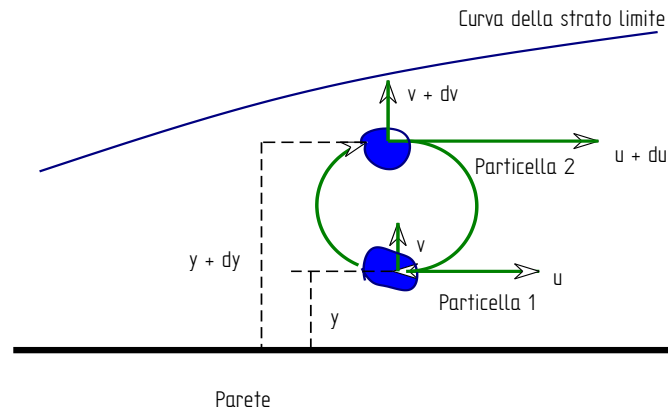


Figura 132: Scambio di quantità di moto e di energia fra particelle in moto turbolento

Si definiscono le seguenti grandezze:

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \quad ; \quad y^+ = \frac{yv^*}{\nu} \quad ; \quad v^+ = \frac{u}{v^*}$$

ove τ_s è lo sforzo di attrito alla parete, y la distanza dalla parete, u la velocità del fluido a quella distanza e ν la viscosità cinematica. L'equazione della quantità di moto del sistema C) in vicinanza della parete, ove $\bar{u} = 0$ e $\bar{v} = 0$, portano ad avere, trascurando gli effetti del gradiente di pressione:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$$

ovvero, integrando una prima volta:

$$\left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = \text{costante} = \frac{\tau_s}{\rho}$$

Allora integrando nuovamente e tenendo conto delle posizioni sopra fatte si ha la relazione:

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{1 + \frac{\varepsilon_M}{\nu}}$$

che è possibile integrare se si conosce il rapporto fra la *diffusività del vortice*, ε_M , e la viscosità cinematica.

Si osservi che la variabile y^+ è una sorta di numero di Reynolds calcolato per la distanza y dalla parete con riferimento alla velocità v^* detta *velocità di parete*. La y^+ è detta anche *numero di Reynolds di parete*. *Van Driest* ha trovato sperimentalmente la seguente relazione:

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = \frac{1}{2} \left[1 + 4K^2 y^{+2} \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

con $K=0.40$ ed $A=0.5$ e pertanto l'integrazione fornisce i seguenti risultati

$$\begin{aligned} y^+ < 5 & \quad u^+ = y^+ \\ y^+ > 40 & \quad u^+ = 1/K \ln(y^+) + C \end{aligned}$$

e nell'intervallo $5 \div 40$ si ha un andamento complesso rappresentato in Figura 133. Il vantaggio del *profilo universale di velocità* è quello di essere rappresentato in forma adimensionale e di valere anche per moto all'interno di condotti chiusi.

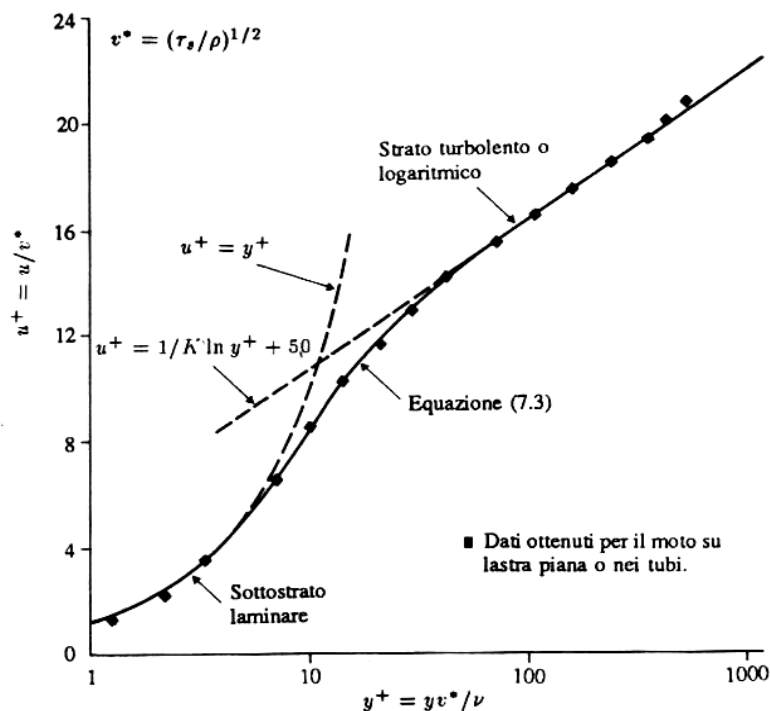


Figura 133: Profilo universale di velocità

Tramite questo profilo, calcolata la y^+ si calcola la u^+ e quindi la velocità vera u del fluido alla distanza y dalla parete. Conoscere la distribuzione della velocità al variare della distanza dalla parete è particolarmente utile nel moto turbolento dove la casualità del movimento genera fenomeni di diffusività meccanica e termica fittizi, cioè dovuti allo scambio di quantità di moto e di energia fra particelle provenienti da strati diversi.

8.5 PROFILO UNIVERSALE DI TEMPERATURA

Se la lastra piana è riscaldata uniformemente, vedi Figura 134, allora oltre al profilo di velocità dinamico si forma anche un profilo di temperatura. Lo strato limite termico può avere sviluppo simile o anche diverso da quello dinamico in funzione delle caratteristiche del fluido. Procedendo allo stesso modo visto per il profilo di velocità si osserva che l'equazione dell'energia delle C) in prossimità della parete fornisce:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + \varepsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right]$$

che integrata una prima volta diviene:

$$\left[(a + \varepsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = \text{costante} = \frac{-q''_s}{\rho c_p}$$

che integrata ancora una volta, tenuto conto delle posizioni adimensionali fatte in precedenza, produce la relazione:

$$T - T_p = -\frac{q''}{\rho c_p} \int_0^y \frac{dy}{a + \varepsilon_H}$$

ove q'' è il flusso termico specifico applicato alla parete, ρ e c_p sono la densità e il calore specifico del fluido, a e ε_H rispettivamente la diffusività termica molecolare e la diffusività termica turbolenta generata dalla miscelazione delle particelle di fluido provenienti dai vari strati nello strato limite turbolento.

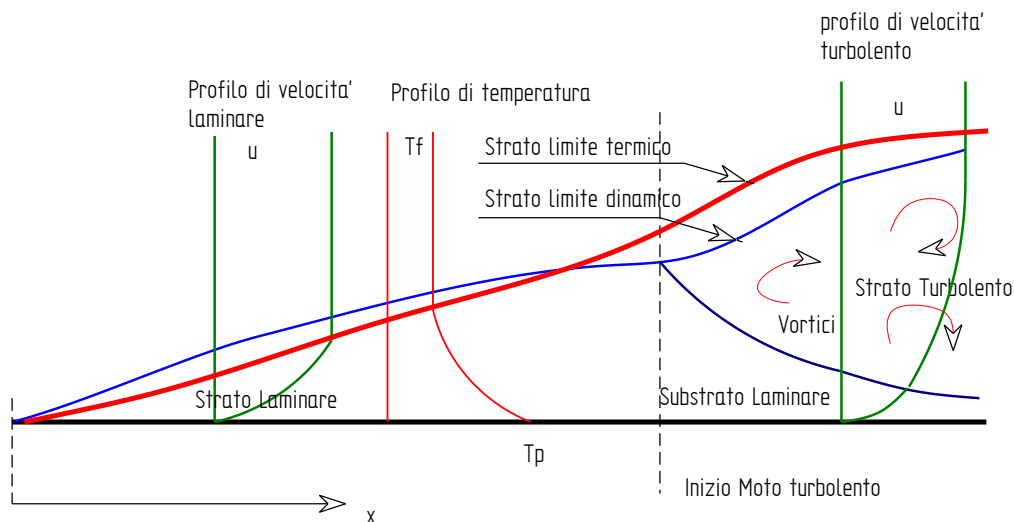


Figura 134: Profili di velocità e di temperatura per moto su lastra piana riscaldata

La precedente relazione viene adimensionalizzata nella forma:

$$T^+ = (T_p - T) \frac{\rho c_p v^*}{q''} = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_M}{\nu} \frac{1}{Pr_t}}$$

ove T_p è la temperatura di parete, Pr è il numero di Prandtl del fluido ($Pr = \nu/a$) e $Pr_t = \varepsilon_M/\varepsilon_H$ il numero di Prandtl turbolento.

Nota la relazione di *Van Driest* per il rapporto ε_M/ν , la precedente relazione può essere integrata per vari valori di Pr ottenendo le curve di Figura 135 detta *profilo universale di temperatura*.

L'utilizzo di queste curve è del tutto simile a quello del profilo universale di velocità e risulta estremamente utile per conoscere i profili reali di temperature negli strati limiti termici in regime turbolento.

In Figura 135 si può osservare la dispersione sperimentale dei dati per il valore $Pr = 5$.

Analoghe dispersioni si hanno per altri numeri di Prandtl, in ottimo accordo con le curve teoriche sopra determinate. Quando si assume $Pr_t = 1$ e $Pr = 1$ allora si può dimostrare che gli strati limite di velocità e di temperatura coincidono.

Negli altri casi si ha una diversificazione sensibile che porta anche ad un allontanamento delle ipotesi sopra descritte. Si hanno varie teorie che cercano di risolvere il problema della chiusura per i casi più comuni della tecnica e si rimanda ai testi specializzati per ulteriori approfondimenti.

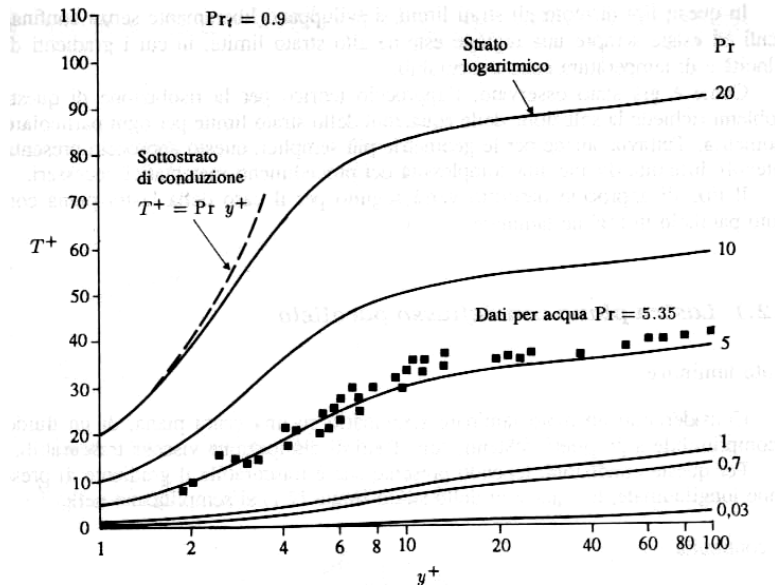


Figura 135: Profilo universale di temperatura

8.6 ALTRE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA CHIUSURA

Come si è sopra detto, molti ricercatori hanno cercato di risolvere il problema della *chiusura* delle equazioni dello strato limite turbolento affrontando sperimentalmente la determinazione delle due diffusività del vortice. In Tabella 14 si ha una rassegna delle equazioni proposte, ivi compresa quella di *Van Driest* vista in precedenza.

8.6.1 ANALISI DEGLI ORDINI DI GRANDEZZA

Le equazioni dello strato limite A) o B) consentono di ottenere molte informazioni con semplici considerazioni degli ordini di grandezza.

Ad esempio possiamo facilmente vedere che lo spessore dello strato limite, δ , è proporzionale alla distanza x dal bordo di attacco ed inversamente proporzionale al numero di Reynolds corrispondente. Sostituendo ai valori indicati dalle equazioni differenziali le grandezze massime corrispondenti, cioè sostituendo u con u_∞ e x con δ allora l'equazione di continuità fornisce:

$$\frac{u_\infty}{x} \approx \frac{v}{\delta}$$

e l'equazione della quantità di moto:

$$u_\infty \frac{u_\infty}{x} \approx v \frac{u_\infty}{\delta^2}$$

che, per la precedente relazione, porta ad avere:

$$\delta \approx \left(\frac{vx}{u_\infty} \right)^{1/2}$$

ovvero:

$$\delta \approx \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

avendo indicato con $\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$.

Con lo stesso procedimento si può dimostrare che il fattore di attrito dipende dall'energia cinetica specifica e dal numero di Reynolds.

Summary of Longitudinal Velocity Expressions for the Inner Region of a Turbulent Boundary Layer (after Kestin and Richardson [15])

$u^+(y^+)$	Range	References
$u^+ = y^+$ $u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	$0 < y^+ < 11.6$ $y^+ > 11.6$	Prandtl and Taylor [13]
$u^+ = y^+$ $u^+ = 5 \ln y^+ - 3.05$ $u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	$0 < y^+ < 5$ $5 < y^+ < 30$ $y^+ > 30$	von Kármán [16]
$u^+ = 14.53 \tanh(y^+/14.53)$ $u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	$0 < y^+ < 27.5$ $y^+ > 27.5$	Rannie [17]
$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + \{1 + 4\kappa^2 y^{+2} [1 - \exp(-y^+/A^+)]^2\}^{1/2}}$ $\kappa = 0.4 \quad A^+ = 26$	all y^+	van Driest [18]
$u^+ = 2.5 \ln(1 + 0.4y^+)$ $+ 7.8 [1 - \exp(-y^+/11)$ $- (y^+/11)\exp(-0.33y^+)]$	all y^+	Reichardt [19]
$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{1 + n^2 u^+ y^+ [1 - \exp(-n^2 u^+ y^+)]}$ $n = 0.124$ $u^+ = 2.78 \ln y^+ + 3.8$	$0 < y^+ < 26$	Deissler [20]
$y^+ = u^+ + A[\exp Bu^+ - 1 - Bu^+ - \frac{1}{2}(Bu^+)^2$ $- \frac{1}{6}(Bu^+)^3 - \frac{1}{24}(Bu^+)^4]$ (last term in u^{+4} may be omitted)	all y^+ $A = 0.1108$ $B = 0.4$	Spalding [21]

Tabella 14: Altre soluzioni del problema della chiusura

Infatti possiamo scrivere, per l'equazione di Newton:

$$\tau_s = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \approx \mu \frac{u_\infty}{\delta} \approx \rho u_\infty^2 \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{-1/2} \approx \rho u_\infty^2 \text{Re}_x^{-1/2}$$

Questo risultato è confermato anche dall'analisi adimensionale e dai dati sperimentali. Il *fattore di attrito di parete*, C_{fx} , può essere facilmente calcolato in base ai risultati sopra trovati. Risulta, infatti:

$$C_{fx} = \frac{\tau_s}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}}$$

e pertanto, combinando i risultati precedenti:

$$C_{fx} \approx \text{Re}_x^{-1/2}$$

8.7 SOLUZIONE DI BLASIUS DELLE EQUAZIONI PRE STRATO LAMINARE

Consideriamo le equazioni dello strato limite nella forma B). La soluzione analitica esatta non è affatto agevole da trovare. Blasius ha proposto una soluzione, all'inizio del 1900, basata sul *metodo della similitudine*²².

²² Gli anglosassoni indicano questo metodo con il termine *similarity*.

Se si osserva la Figura 136, infatti, si può dedurre che i profili di velocità a distanze variabili dall'imbocco siano fra loro simili. Si pone allora, ricordando quanto sopra trovato per lo spessore dello strato limite δ , la *variabile di similitudine* nella forma:

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}_x}$$

La soluzione contemporanea delle equazioni di continuità e della quantità di moto non è agevole e pertanto si cerca di ridurre le due equazioni differenziali ad una sostituendo le variabili u e v con:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La funzione ψ è detta *funzione della traiettoria*²³ e la posizione precedente verifica immediatamente l'equazione di continuità essendo:

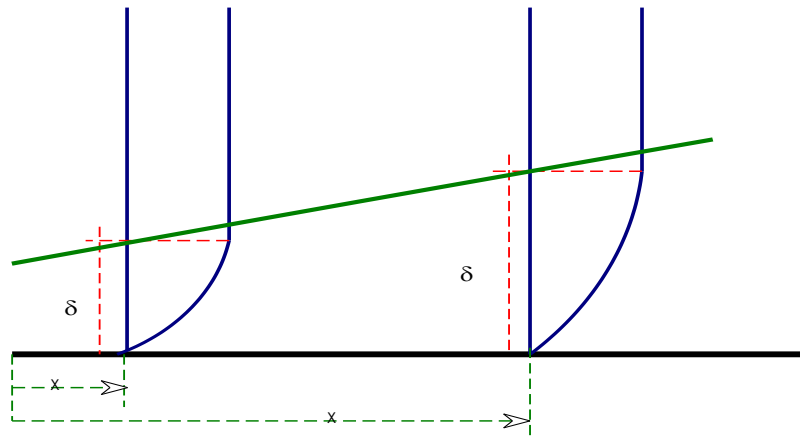


Figura 136: Similitudine dei profili di velocità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

L'equazione di continuità fornisce:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

e sostituendo le precedenti relazioni:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

Le condizioni al contorno sono ora le seguenti:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad y=0$$

$$\psi = 0 \quad \text{per} \quad y=0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow u_{\infty} \quad \text{per} \quad y \rightarrow \infty$$

Ponendo ora:

$$\psi(x, y) = (u_{\infty} \nu x)^{1/2} f(\eta)$$

²³ Ovvero *streamfunction*.

con $f(\eta)$ funzione incognita allora l'equazione differenziale precedente diviene:

$$2f''' + ff'' = 0 \quad [157]$$

ove si hanno le nuove condizioni al contorno:

$$f' = f = 0 \quad \text{per} \quad \eta = 0$$

$$f' \rightarrow 1 \quad \text{per} \quad \eta \rightarrow \infty$$

L'equazione [157] è ora nella sola variabile f e può essere risolta con sviluppi in serie ottenendo i valori della seguente Tabella 15. Si osservi che vale la relazione:

$$u = u_{\infty} \frac{df}{d\eta}$$

e quindi che il rapporto:

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{df}{d\eta}$$

deve variare da 0 a 0.99 per la stessa definizione di strato limite.

$\eta = y \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}}$	$f(\eta)$	$\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{u_{\infty}}$	$\frac{d^2 f}{d\eta^2}$	$v \sqrt{\frac{x}{\nu u_{\infty}}} = (\eta \frac{df}{d\eta} - f)/2$
0	0	0	0,332	0
0,4	0,027	0,133	0,331	0,013
0,8	0,106	0,265	0,327	0,053
1,2	0,238	0,394	0,317	0,117
1,6	0,420	0,517	0,297	0,204
2,0	0,650	0,630	0,267	0,305
2,4	0,922	0,729	0,228	0,414
2,8	1,231	0,812	0,184	0,521
3,2	1,569	0,876	0,139	0,617
3,6	1,930	0,923	0,098	0,696
4,0	2,306	0,956	0,064	0,758
4,4	2,692	0,976	0,039	0,801
4,8	3,085	0,988	0,022	0,829
4,918	3,202	0,990	0,018	0,833
5,2	3,482	0,994	0,011	0,843
5,6	3,880	0,997	0,005	0,852
6,0	4,280	0,999	0,002	0,857

Tabella 15: Soluzione dell'equazione di Blasius

Dalla Tabella 15 si ricava che per $\frac{df}{d\eta} = 0.99$ si ha $\eta = 0.419$.

Pertanto lo spessore dello strato limite vale:

$$\delta = 4.92 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Inoltre, sempre dalla stessa Tabella 15 si ricava:

$$\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} = 0.332$$

pertanto si può calcolare il coefficiente di attrito, C_{f_x} , dato da:

$$C_{fx} = \frac{\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}}{\frac{\rho u_{\infty}^2}{2}} = 2 \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} \text{Re}_x^{-1/2} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$$

Il valore medio del coefficiente di attrito per la lunghezza L della lastra vale:

$$\overline{C_{fx}} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{fx} dx = 2 C_{fx} = 1.328 \text{Re}_x^{-1/2}$$

8.8 SOLUZIONE DI BLASIUS DELLO STRATO LIMITE TERMICO

Si può procedere allo stesso modo di quanto fatto nel paragrafo precedente per determinare l'andamento dello *strato limite termico* e calcolare il coefficiente di convezione termica.

L'equazione dell'energia:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

può essere riscritta in funzione della nuova variabile:

$$\theta = \frac{T - T_p}{T_{\infty} - T_p}$$

ed assumendo che, per la stessa similitudine del profilo dello strato limite termico, sia:

$$\theta = \theta(\eta)$$

con η variabile di similitudine sopra indicata. La sostituzione porta ad avere la nuova equazione differenziale:

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad [158]$$

ove Pr è il numero di Prandtl del fluido. Le nuove condizioni al contorno sono:

$$\theta(0) = 0 \quad ; \quad \theta(\infty) = 1$$

Nel caso che sia Pr=1 la precedente equazione differenziale è formalmente identica a quella derivata dall'equazione della quantità di moto ove si sostituisca $\theta = df/d\eta$ e quindi con riferimento alla Tabella 15 si ha, per $\eta=0$:

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0.332 \text{Pr}^{1/3}$$

Infine il coefficiente di convezione termica è dato da:

$$h_x = \frac{q''}{T_p - T_{\infty}} = -\lambda \frac{(T_{\infty} - T_p)}{T_p - T_{\infty}} \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \cdot \frac{\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$$

e quindi:

$$h_x = \lambda \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}} \cdot 0.332 \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

ovvero anche:

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{\lambda} = 0.332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

Il valore medio del coefficiente di scambio termico per la lunghezza L della lastra è dato da:

$$\overline{h_L} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = 0.332 \frac{\lambda}{L} \text{Pr}^{1/3} \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{1/2} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/2}} = 2h_{x=L} = 0.664 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

8.8.1 ANALOGIA DI COLBURN

Confrontiamo i numeri locali di h_x e C_{fx} allora si può scrivere:

$$\frac{C_{fx}}{2} = 0.332 \text{Re}^{-1/2}$$

$$Nu_x = 0.332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

Combinando le due relazioni e definendo:

$$St_x = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty} = \frac{Nu_x}{\text{Re}_x \text{Pr}}$$

allora si ha:

$$St_x = 0.332 \text{Re}_x^{-1/2} \text{Pr}^{-2/3}$$

ossia:

$$St_x \text{Pr}^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2}$$

che è la *correlazione di Colburn*. Essa assume grande importanza nella pratica perché lega il numero di Nusselt (nel quale è presente h) con il coefficiente di attrito, C_{fx} , di più agevole determinazione sperimentale. Pertanto da una campagna di misure meccaniche del coefficiente di attrito si possono conoscere i valori del coefficiente di convezione.

8.8.2 LA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO

Per l'applicazione delle relazioni sopra trovate occorre calcolare le proprietà termofisiche alla temperatura di film data dalla media aritmetica fra la temperatura di parete e quella del fluido indisturbato:

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

8.9 SOLUZIONE PER STRATO LIMITE TURBOLENTO DI UNA LASTRA

Per una lastra piana si ha il passaggio dal moto laminare a quello turbolento quando il numero locale di Reynolds supera $5 \cdot 10^5$. Nasce così lo strato subliminare e poi lo strato turbolento totalmente sviluppato. Al di là di $4 \cdot 10^6$ si ha certamente il moto turbolento sviluppato. Lo spessore dello strato limite turbolento è dato dalla relazione:

$$\delta = 0.37 \frac{x}{\text{Re}_x^{1/5}}$$

Il coefficiente di attrito vale:

$$C_{fx} = 0.0592 \text{Re}_x^{-1/5}$$

Il valore locale del numero di Nusselt vale:

$$Nu_x = 0.0296 \text{Re}_x^{4/5} \text{Pr}^{1/3}$$

valida per $0.6 < \text{Pr} < 60$. Il valore medio del coefficiente di convezione è dato dalla relazione:

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left(\int_0^{x_{lam}} h_{lam,x} dx + \int_{x_{lam}}^L h_{turb,x} dx \right)$$

Assumendo una transizione per $Re=5 \cdot 10^5$ allora la precedente relazione porta ad avere:

$$\overline{Nu}_L = \left(0.664 Re_{x,lam}^{1/2} + 0.037 \left(Re_L^{4/5} - Re_{x,lam}^{5/5} \right) \right) Pr^{1/3}$$

che si può ulteriormente ridurre a:

$$\overline{Nu}_L = \left(0.037 Re_L^{4/5} - 871 \right) Pr^{1/3}$$

valida per $5 \cdot 10^5 < Re < 10^8$ e per $0.6 < Pr < 60$.

8.9.1 STRATO LIMITE SU SUPERFICI CILINDRICHE

Nel caso in cui si consideri il deflusso di un fluido sopra superfici cilindriche, vedi Figura 137, allora occorre considerare una forte variabilità delle condizioni locali al variare dell'angolo θ .

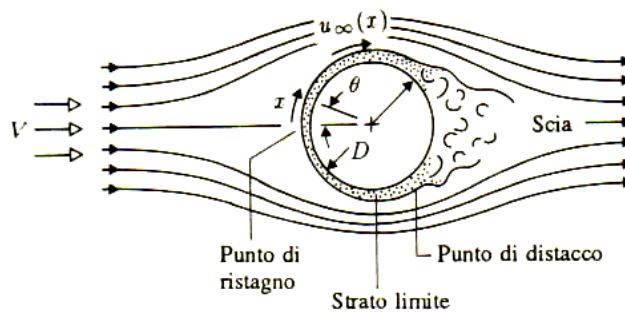


Figura 137: Deflusso sopra superfici cilindriche

Il flusso si mantiene laminare fino a quando $Re < 2 \cdot 10^5$ dopo di che diviene turbolento. Inoltre per valori elevati di Re_D si ha il distacco della vena fluida per un angolo pari a circa 140° . La forza di trascinamento esercitata dal fluido sulla superficie apparente del condotto cilindrico è data dalla relazione:

$$F_D = C_D S \frac{\rho w^2}{2}$$

ove C_D è il fattore di *drag* dato dalla Figura 138. Il coefficiente di convezione locale varia con l'angolo θ secondo quanto rappresentato in Figura 139. Il valore medio sul contorno circolare è dato dalla relazione:

$$\overline{Nu}_D = 0.4 \left(Re_D^{1/2} + 0.06 Re_D^{2/3} \right) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right)^{1/4}$$

valida per $10 < Re < 10^5$ e per $0.6 < Pr < 300$ e $0.25 < \frac{\mu_\infty}{\mu_s} < 5$.

Nel caso di banchi di tubi si utilizza la relazione:

$$\overline{Nu}_D = C Re_D^m Pr^{0.36} \left(\frac{Pr_\infty}{Pr_s} \right)^n$$

con C , m ed n variabili a seconda della geometria e in particolare si ha:

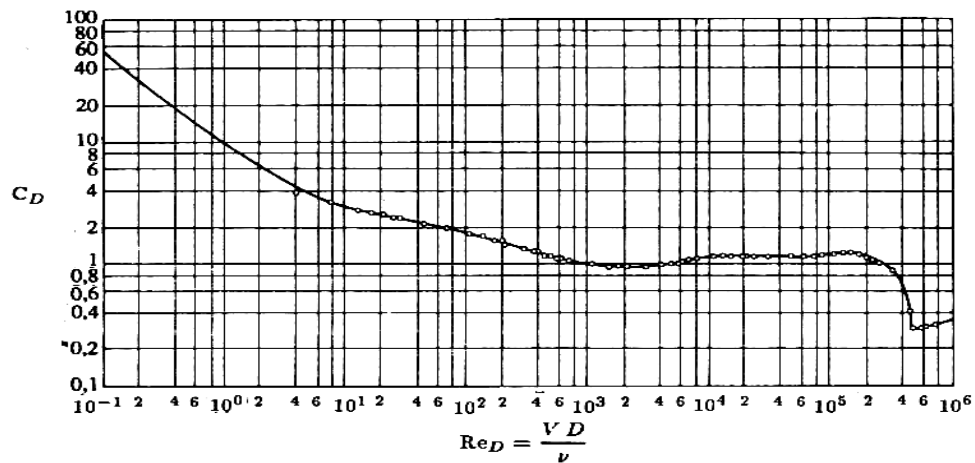


Figura 138: Fattore di Drag

$C=0.4$	per tubi sfalsati e $Re_D < 2 \cdot 10^5$
$M=0.6$	“ “ “ “
$C=0.022$	per tubi sfalsati e $Re_D > 2 \cdot 10^5$
$M=0.84$	“ “ “ “
$C=0.27$	per tubi allineati e $Re_D < 2 \cdot 10^5$
$M=0.63$	“ “ “ “
$C=0.021$	per tubi allineati e $Re_D > 2 \cdot 10^5$
$M=0.84$	“ “ “ “

La caduta di pressione vale:

$$\Delta p = f N \rho \frac{u_{\max}^2}{2} Z$$

con f e Z dati dagli abachi di Figura 140 e Figura 141.

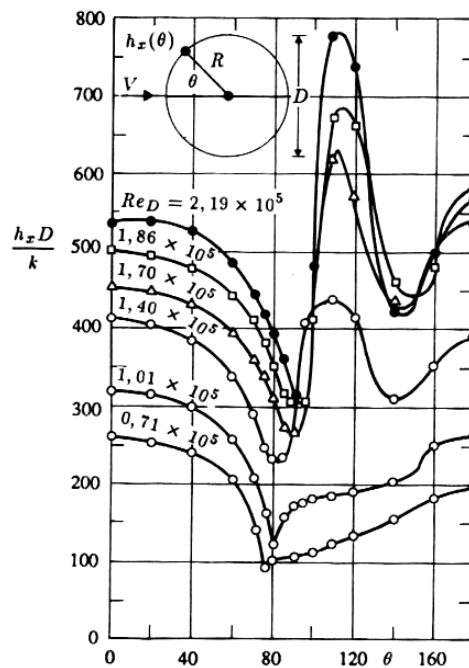
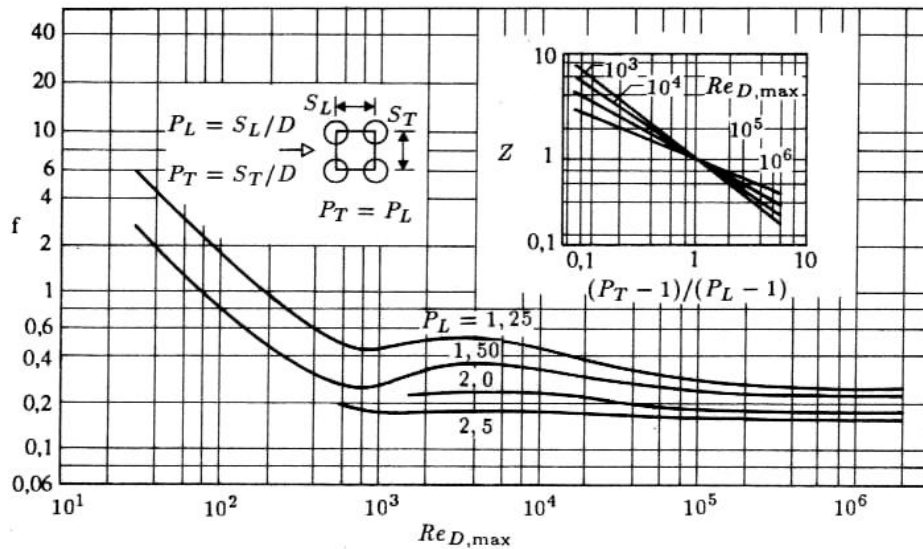
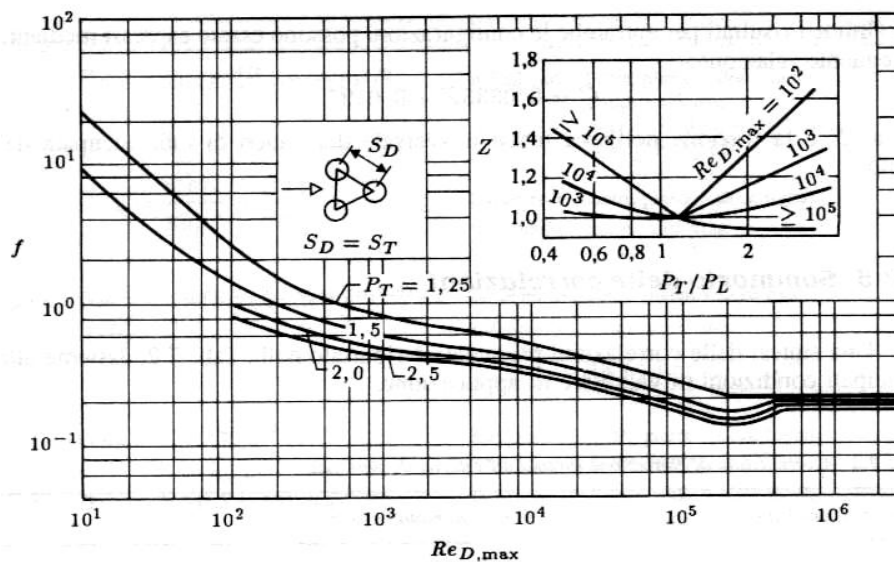


Figura 139: Numero locale di Nusselt

Figura 140: f e Z per passo quadratoFigura 141: f e Z per passo triangolare

8.10 CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE FORZATA

Nelle prossime figure sono raccolte alcune correlazioni (sia sperimentali che teoriche) derivate per la convezione forzata. Ciascuna di queste correlazioni ha un campo di validità che è segnalato nell'ultima colonna delle tabelle.

Si consiglia di controllare sempre questi campi prima di applicare qualunque correlazione proposta. Le tipologie prese in considerazione sono numerose e consentono di risolvere numerosi problemi pratici. In ogni caso occorre sempre ricordare che l'obiettivo principale è il numero di *Nusselt*, Nu , nel quale è definito il coefficiente di convezione h cercato.

<i>Corr. n. Correlazione</i>	<i>Regime di moto</i>	<i>Note</i>
$\delta(x) = 4.92x / \text{Re}_x^{0.5}$	laminare	lastra piana, valori locali
$C_{f_x} = \frac{0.664}{\text{Re}_x^{1/2}}$	laminare	lastra piana, valori locali
$Nu_x = 0,332 \text{ Re}_x^{1/2} \text{ Pr}^{1/3}$	laminare	lastra piana, temp. uniforme $\text{Pr} > 0,6$
$Nu_x = 0,332 \text{ Re}_x^{1/2} \text{ Pr}^{1/3} \cdot [1 - (\xi/x)^{3/4}]^{-1/3}$	laminare	lastra piana, con zona di estensione ξ non riscaldata, temp. uniforme
$C_{f_L} = \frac{1,328}{\text{Re}_L^{1/2}}$	laminare	lastra piana, valore medio
$Nu_L = 0,664 \text{ Re}_L^{1/2} \text{ Pr}^{1/3}$	laminare	lastra piana, valore medio temp. uniforme
$St_x \text{ Pr}^{2/3} = \frac{C_{f_x}}{2}$	laminare	lastra piana, valori locali, temp. uniforme
$C_{f_x} = 0,0592 \text{ Re}_x^{-1/5}$	turbolento	lastra piana, valore locale $5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$
$Nu_x = 0,0296 \text{ Re}_x^{4/5} \text{ Pr}^{1/3}$	turbolento	lastra piana, valore locale temp. uniforme $0,6 \leq \text{Pr} \leq 60, 5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$
$Nu_x = 0,0296 \text{ Re}_x^{4/5} \text{ Pr}^{1/3} \cdot [1 - (\xi/x)^{9/10}]^{-1/9}$	turbolento	lastra piana con zona non riscaldata di estensione ξ

Tabella 16: Correlazioni per convezione forzata

L'uso delle correlazioni adimensionali risulta molto comodo, anche se all'inizio un po' forviante, perché in questo modo ci si svincola dal sistema di misura e dalle caratteristiche geometriche e topologiche dello scambio convettivo.

<i>Correlazione</i>	<i>Regime di moto</i>	<i>Note</i>
$f = 64 / \text{Re}$	laminare	moto complet. sviluppato in tubi circolari
$Nu_D = \frac{48}{11}$	laminare	moto complet. sviluppato in un tubo circolare con flusso termico costante
$Nu_D = 3,66$	laminare	moto complet. sviluppato in un tubo circolare con temper. di parete costante
$\overline{Nu}_D = 3,66 + \frac{0,0668 Gz}{1 + 0,04(Gz)^{2/3}}$	laminare	regione di ingresso termica, moto sviluppato, tubo circolare, temp. parete costante

Tabella 17: Correlazioni per convezione forzata

$\overline{Nu} = 0.037(Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3}$	turbolento	lastra piana, valore medio, temp. uniforme $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^8$ $0,6 \leq Pr \leq 60$
$\overline{C}_{f,L} = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1742}{Re_L}$	laminare e turbolento	lastra piana, valore medio temp. uniforme $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^8$
$\overline{Nu} = 0,036(Re_L^{4/5} - 9200) Pr^{0,45} \cdot \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_P}\right)^{1/4}$	laminare e turbolento	lastra piana, valore medio temp. uniforme $10^5 < Re_L < 5,5 \cdot 10^6$ $0,7 \leq Pr \leq 380$
$Nu_x = 0,453 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$	laminare	lastra piana, valore locale flusso termico uniforme
$Nu_x = 1,04(Nu_x)_{T_s = \text{cost}}$	laminare	lastra piana, valore locale flusso termico uniforme ($Pr \geq 0,7$)
$\overline{Nu}_D = (0,4 Re_D^{1/2} + 0,06 Re_D^{2/3}) \cdot Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4}$		moto trasversale su cilindro $0,672 Pr < 300; 10 < Re_D < 10^5$ $0,25 < \mu_\infty / \mu_s < 5,2$
$\overline{Nu}_D = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0,4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \cdot [1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}]^{4/5}$		moto trasversale su cilindro $10^2 < Re < 10^7, Pe_D > 0,2$
$\overline{Nu}_D = C Re_D^m Pr^{0,36} \left(\frac{Pr_\infty}{Pr_s}\right)^n$		banchi di tubi in moto trasversale (v. par. 7.2.3)
$\overline{Nu}_D = C Re_D^{0,8} Pr^{0,4}$		banchi di tubi in moto parallelo (v. par. 7.2.4)

Tabella 18: Correlazioni per convezione forzata

8.11 CONVEZIONE TERMICA LAMINARE NEI CONDOTTI

E' di grande interesse lo studio della convezione termica all'interno di condotti circolari (o assimilabili). Si tratta, infatti, di un vasto campo di possibili applicazioni industriali al quale è opportuno dedicare maggiore attenzione.

Con riferimento alla Figura 142 si può osservare che lo strato limite dinamico cresce dall'imbocco fino al congiungimento sull'asse del condotto. La lunghezza corrispondente è denominata *lunghezza di imbocco* e si dimostra che, per il regime laminare, vale la relazione:

$$\frac{x_e}{D} = 0.05 Re_D$$

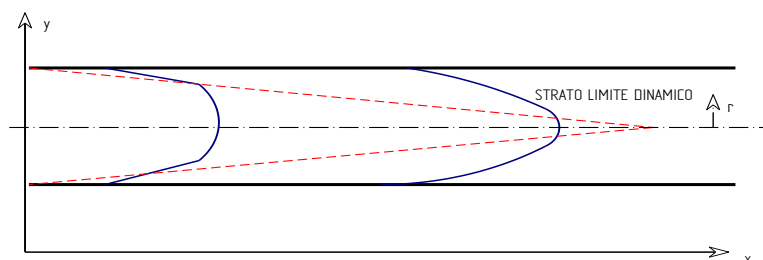


Figura 142: Strato limite dinamico in un condotto circolare

$\overline{Nu} = 0.037(Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3}$	turbolento	lastra piana, valore medio, temp. uniforme $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^8$ $0,6 \leq Pr \leq 60$
$\overline{C}_{f,L} = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1742}{Re_L}$	laminare e turbolento	lastra piana, valore medio temp. uniforme $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^8$
$\overline{Nu} = 0,036(Re_L^{4/5} - 9200) Pr^{0,45} \cdot \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_P}\right)^{1/4}$	laminare e turbolento	lastra piana, valore medio temp. uniforme $10^5 < Re_L < 5,5 \cdot 10^6$ $0,7 \leq Pr \leq 380$
$Nu_x = 0,453 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$	laminare	lastra piana, valore locale flusso termico uniforme
$Nu_x = 1,04(Nu_x)_{T_s = cost}$	laminare	lastra piana, valore locale flusso termico uniforme ($Pr \geq 0,7$)
$\overline{Nu}_D = (0,4 Re_D^{1/2} + 0,06 Re_D^{2/3}) \cdot Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4}$		moto trasversale su cilindro $0,672 Pr < 300; 10 < Re_D < 10^5$ $0,25 < \mu_\infty / \mu_s < 5,2$
$\overline{Nu}_D = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0,4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \cdot [1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}]^{4/5}$		moto trasversale su cilindro $10^2 < Re < 10^7, Pe_D > 0,2$
$\overline{Nu}_D = C Re_D^m Pr^{0,36} \left(\frac{Pr_\infty}{Pr_s}\right)^n$		banchi di tubi in moto trasversale (v. par. 7.2.3)
$\overline{Nu}_D = C Re_D^{0,8} Pr^{0,4}$		banchi di tubi in moto parallelo (v. par. 7.2.4)

Tabella 19: Correlazioni per convezione forzata

Ove x_e è la lunghezza di imbocco anzidetta e Re_D è il numero di Reynolds riferito al diametro del condotto. La velocità media del fluido può agevolmente essere calcolata mediante la relazione:

$$\bar{u} = \frac{\dot{m}}{\rho S} = \frac{1}{S} \int_S u(x, r) dS = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(x, r) r dr$$

Nel caso di moto laminare il profilo di velocità nel regime sviluppato è di tipo parabolico e rimane costante lungo la direzione di moto.

Ciò significa che deve essere $v=0$ e $\partial u / \partial x = 0$. Per ricavare il profilo di velocità possiamo utilizzare l'equazione della quantità di moto delle A) riscritta in coordinate cilindriche:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

In base alle considerazioni che sono $v=0$ e $\partial u / \partial x = 0$ allora si ha:

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

la quale, integrata, fornisce l'integrale generale:

$$u = \left(\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Le costanti di integrazioni si calcolano con le condizioni al contorno:

$$(u)_{r=R} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0} = 0$$

Ne segue:

$$u = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

che è l'equazione del profilo di velocità cercata. Per $r=0$ si ha la velocità massima:

$$u_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right)$$

Si osservi che il rapporto fra la velocità media e quella massima vale, per quanto trovato in precedenza:

$$\frac{u_{\max}}{\bar{u}} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Per la relazione di *Darcy – Weissbach* la caduta di pressione specifica vale:

$$-dp = \xi \frac{dx}{D} \frac{\bar{u}^2}{2} \rho$$

pertanto, anche in base all'espressione della velocità media dianzi calcolata, possiamo calcolare il *fattore di attrito*:

$$\xi = \frac{-\left(\frac{dp}{dx} \right) D}{\rho \frac{\bar{u}^2}{2}}$$

e quindi: .

Anche lo strato limite termico si sviluppa all'interno del condotto con andamento simile a quello delle velocità. La lunghezza di imbocco termica, x_t , può essere calcolata, nel caso di parete riscaldata (T imposta) fin dall'inizio, con la relazione:

$$\frac{x_t}{D} = 0.033 \text{Re}_D \text{Pr}$$

Nel caso di flusso imposto fin dall'inizio vale la relazione:

$$\frac{x_t}{D} = 0.043 \text{Re}_D \text{Pr}$$

I coefficienti di convezione possono essere calcolati, nei due casi di $q'' = \text{cost}$ e di $T = \text{cost}$, mediante le relazioni:

$$Nu_D = 4,36 \quad \text{per } q'' = \text{cost}$$

e:

$$Nu_D = 3.66 \quad \text{per } T = \text{cost}$$

Nella regione di ingresso, con strato limite termico ancora non stabilizzato, si hanno le relazioni:

$$\frac{x}{\text{Re}_D \text{Pr} D} = 2Gz^{-1}$$

$$\text{con } Gz = \text{Re}_D \text{Pr} \frac{D}{x}.$$

$\overline{Nu}_D = 1,86(Gz)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14}$	laminare	Regione di ingresso termica e fluidodinamica, tubo circolare, temp. parete costante $0,48 < Pr < 16700$ $Gz^{1/2} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} > 2$
$f = 0,184 / Re^{0,2}$	turbolento	Tubi lisci, moto compl. svil. $2 \cdot 10^4 < Re < 3 \cdot 10^5$
$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[\left(\epsilon/3,7D \right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re_D} \right]$	turbolento	tubi scabbi $Re > 2 \cdot 10^4$
$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{1/3}$	turbolento	tubi lisci $0,7 < Pr < 160$ $Re > 10^4$, $L/D > 60$
$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n$ $n = 0,4$ riscaldamento $n = 0,3$ raffreddamento	turbolento	tubi lisci $0,7 < Pr < 160$ $Re > 10^4$, $L/D > 60$
$Nu = 0,027 Re^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14}$	turbolento	tubi lisci $0,7 Pr < 16700$ $Re > 10^4$, $L/D > 60$
$Nu = \frac{(f/8) Re Pr}{1,07 + 12,7 \sqrt{f/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^n$	turbolento	tubi lisci o scabbi $10^4 < Re < 5 \cdot 10^6$ $0,5 < Pr < 200$
$n = 0,11$ riscaldamento con T_p uniforme $n = 0,25$ raffreddamento con T_p uniforme $n = 0$ flusso termico uniforme o gas		
$Nu = 0,036 Re^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{D}{L} \right)^{0,055}$	turbolento	$10 < L/D < 400$
$Nu = 5 + 0,025 Pe_D^{0,8}$	turbolento	metalli liquidi, tubi circolari flusso termico unif. alla parete
$Nu = 4,82 + 0,0185 Pe^{0,827}$	turbolento	metalli liquidi, tubi circolari, flusso termico uniforme alla parete $3,6 \cdot 10^3 < Re < 9,05 \cdot 10^5$ $10^2 < Pe < 10^4$, $L/D > 60$
$Nu = 3,3 + 0,02 Pe^{0,8}$	turbolento	metalli liquidi, tubi circolari temperatura uniforme $L/D < 60$, $Pe > 100$
$Nu = 6,3 + 0,0167 Re^{0,85} Pr^{0,93}$	turbolento	metalli liquidi temp. parete uniforme tubi circolari $Pr < 0,03$

Tabella 20: Correlazioni per convezione forzata

Una correlazione valida nel caso di contemporaneo sviluppo degli strati limiti dinamico e termico è la seguente (Sieder – Tate):

$$\overline{Nu} = 1,86(Gz)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14}$$

valida per $T_0 = \text{cost}$, per $0,5 < Pr < 16700$, $0,0044 < \frac{\mu_m}{\mu_p} < 0,75$ e per $(Gz)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} > 2$.

8.11.1 CONDOTTI A SEZIONE NON CIRCOLARE

In questo caso si opera con le stesse relazioni viste per i condotti circolari ma con un diametro *equivalente* (ai fini della portata²⁴) dato dalla relazione:

$$D_{eq} = \frac{4 \cdot S_{passaggio}}{C_{bagnato}}$$

ove con $S_{passaggio}$ si intende l'area di passaggio del fluido e con $C_{bagnato}$ il contorno bagnato.

E' sempre bene applicare alla lettera questa definizione, specialmente in quei casi nei quali l'area di passaggio è virtuale (cioè formata da più contorni) come, ad esempio, per il flusso all'esterno dei condotti negli scambiatori di calore, come illustrato in Figura 143.

In questo caso l'area di passaggio è virtuale ed è pari al prodotto dei passi longitudinale e trasversale diminuita di 4 quarti di area dei condotti circolari e il contorno bagnato è pari a 4 quarti di circonferenza dei condotti:

$$D_{eq} = \frac{L \cdot T - \pi D^2 / 4}{\pi D}$$

Allo stesso modo si calcola il diametro equivalente per una sezione rettangolare.

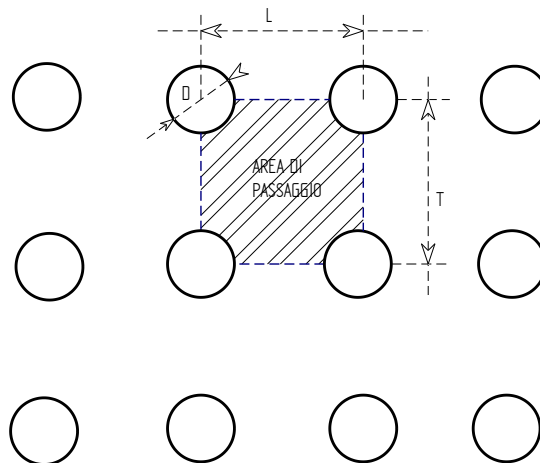


Figura 143: Calcolo del diametro equivalente per uno scambiatore di calore

In Figura 144 si hanno due casi: un condotto rettangolare con lati dello stesso ordine di grandezza ed un condotto con una dimensione prevalente sull'altra.

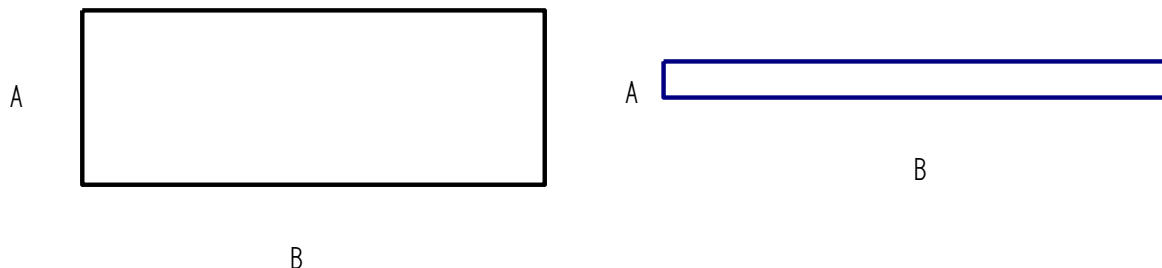


Figura 144: Diametro equivalente per condotti rettangolari

²⁴ In alcuni casi (vedi reti tecnologiche per le quali si rimanda la volume 3°) si definisce un diametro equivalente a parità di perdite di pressione. L'espressione ottenuta è notevolmente diversa ed è data da: $d_{eq.PP} = 1,3 \frac{(a \cdot b)^{0,625}}{(a + b)^{0,25}}$.

Applicando la definizione di diametro equivalente si ha:

$$D_{eq} = \frac{4(B \cdot A)}{2(B + A)}$$

Nel caso di sezione ristretta (a destra della Figura 144) allora essendo $A \ll B$ si ottiene:

$$D_{eq} = \frac{4(B \cdot A)}{2(B + A)} \approx \frac{4(BA)}{2B} \approx 2A$$

Quindi una sezione rettangolare ristretta ha un diametro equivalente pari alla somma delle dimensioni minori e ciò risulta penalizzante per le perdite di pressione secondo la relazione di Darcy Weissbach:

$$-\Delta p = \xi \frac{L}{D_{eq}} \frac{w^2}{2} \rho$$

Ai fini degli scambi termici, però, la presenza di spigoli acuti cambia le modalità operative e in particolare si osserva che il coefficiente di convezione si annulla in corrispondenza degli spigoli.

In Tabella 21 si hanno i numeri di Nusselt per varie configurazioni geometriche sia per temperatura imposta che per flusso imposto.

8.12 CONVEZIONE TERMICA NEI CONDOTTI IN REGIME TURBOLENTO

La transizione fra regime laminare e turbolento avviene, com'è noto dallo studio dei fluidi reali, quando il numero di Reynolds supera 2900 (meglio considerare 4000 nelle applicazioni pratiche).

La *lunghezza di imbocco* per lo sviluppo completo dello strato limite dinamico è data dalla relazione:

$$10 \leq \frac{x_{e,t}}{D} \leq 60$$

In genere si assume che la lunghezza di imbocco sia pari ad almeno 60 diametri del condotto.

Il coefficiente di attrito, C_f , è dato da:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = 2 \left(\frac{v^*}{u_m} \right)^2 = \frac{2}{(u_m^+)^2}$$

ove, si ricorsi dallo studio dei profili universali di velocità, si è posto:

$$v^* = \left(\frac{\tau_s}{\rho} \right)^{0.5}$$

$$u_m^+ = \frac{u_m}{v^*}$$

ed infine:

$$y^+ = \frac{u_m^+ y}{\nu}$$

con u_m velocità media del fluido all'interno del condotto.

Valori del numero di Nusselt e del coefficiente di attrito per il moto laminare completamente sviluppato in condotti di varia sezione.

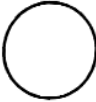
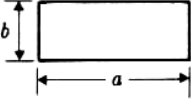


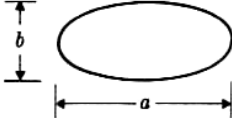
Forma della sezione		Nu_h ($q'' = \text{cost}$)	Nu_h ($T_p = \text{cost}$)	$C_f \cdot Re_h$
		4,36	3,66	16,00
	$a/b =$			
	1	3,61	2,98	14,23
	2	4,12	3,39	15,55
	3	4,79	3,96	17,09
	4	5,33	4,44	18,23
	6	6,05	5,14	19,70
	8	6,49	5,60	20,58
	∞	8,24	7,54	24,00
		4,00	3,34	15,05
	$\theta =$			
	10°	2,45	1,61	12,47
	30°	2,91	2,26	13,07
	60°	3,11	2,47	13,33
	90°	2,98	2,34	13,15
	120°	2,68	2,00	12,74
	$a/b =$			
	1	4,36	3,66	16,00
	2	4,56	3,74	16,82
	4	4,88	3,79	18,24
	8	5,09	3,72	19,15
	16	5,18	3,65	19,54

Tabella 21: Numeri di Nusselt per varie tipologie di condotti

Per il moto turbolento si assume valida la relazione:

$$u^+ = 2.5 \ln(y^+) + 5$$

Al variare di y (distanza dalla parete) si può calcolare y^+ e quindi il valore medio di u_m^+ vale:

$$u_m^+ = 2.5 \ln \left(\frac{R}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \right) + 1.75$$

Tenendo conto della definizione del coefficiente di attrito, C_f , si ha, dopo alcuni passaggi:

$$u_m^+ = 2.5 \ln(Re_D \sqrt{C_f}) - 0.85$$

Essendo $\xi = 4C_f$ allora dalla precedente relazione si ricava:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2.035 \log(Re \sqrt{\xi}) - 0.6$$

che è la relazione di Prandtl. Weissbach ha trovato una relazione comoda nelle applicazioni:

$$\xi = 0.184 \cdot Re^{-0.2}$$

valida per tubi lisci con $10000 < Re < 300000$. Per condotti rugosi si hanno altre relazioni che tengono conto della scabrezza relativa.

Si ricordano quella di *Colebrook* (vedi volume sui fluidi reali):

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = -2.0 \log \left[\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\xi}} \right]$$

con ε scabrezza assoluta.

Questa relazione è scomoda da utilizzare perché fornisce ξ in forma implicita e quindi occorre ricorrere ad calcoli ricorsivi. Meglio usare la nuova correlazione di *Haaland* che, oltre ad essere esplicita, fornisce valori con errori entro l'1.5% rispetto alla correlazione di *Colebrook*:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}_D} \right]$$

8.13 CORRELAZIONE DI COLBURN PER MOTO TURBOLENTO

Dalle equazioni dello strato limite per regime turbolento, C), in vicinanza della parete si ha (come già visto per la derivazione dei profili universali di velocità) dall'equazione della quantità di moto:

$$\left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = \frac{\tau_s}{\rho}$$

e dall'equazione dell'energia:

$$\left[(a + \varepsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = \frac{-q''_s}{\rho c_p}$$

Quest'ultima può essere scritta nella forma:

$$\left[\left(\frac{\nu}{\text{Pr}} + \frac{\varepsilon_M}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = \frac{-q''_s}{\rho c_p}$$

con $\text{Pr}_t = \varepsilon_M / \varepsilon_H$. Nel caso in cui $\text{Pr} = \text{Pr}_t = 1$ allora le due relazioni sono formalmente eguali e quindi si può ritenere ancora valida la correlazione di *Colburn* ricavata per moto laminare:

$$\text{St}_x \text{Pr}^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2}$$

Con riferimento al fattore di attrito di *Darcy*, essendo $f = 4 C_f$ si ha:

$$\text{St}_x \text{Pr}^{2/3} = \frac{f}{8}$$

che, per la relazione di *Weissbach*, diviene:

$$\text{St}_x \text{Pr}^{2/3} = 0.023 \text{Re}^{-0.2}$$

dalla quale si ricava il numero di Nusselt:

$$\text{Nu} = 0.023 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{1/3}$$

valida per tubi lisci con $0.7 < \text{Pr} < 150$, $\text{Re} > 10000$, $L/D > 60$. Per il moto turbolento nei condotti si hanno altre correlazioni sperimentali molto buone e in particolare quella di *Dittus – Boelter*:

$$\text{Nu} = 0.023 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^n$$

con n pari a 0.4 nel caso di riscaldamento ($T_p > T_m$) ed $n=0.3$ per raffreddamento e con gli stessi limiti per Re e Pr della relazione precedente. Una correlazione molto usata è quella di *Sieder Tate*:

$$Nu = 0.027 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14}$$

che tiene conto della variabilità della viscosità alla temperatura di parete e alla temperatura media del fluido. Valida è anche la relazione di *Petukhov*:

$$Nu = \frac{\left(\frac{f}{8} \right) Re Pr}{1.07 + 12.7 \sqrt{\frac{f}{8} (Pr^{2/3} - 1)}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^n$$

con n pari a 0.11 per riscaldamento uniforme a temperatura costante, 0.25 per raffreddamento uniforme a T costante ed pari a 0 per flusso termico imposto.

Nella zona di profilo di velocità non sviluppato si può usare la relazione di *Nusselt*:

$$Nu = 0.036 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{D}{L} \right)^{0.055}$$

valida per $10 < D/L < 400$.

Per condotti a sezione non circolare si può applicare quanto detto per i diametri equivalenti ai fini del calcolo delle perdite di pressione ma occorre apportare correzioni per il calcolo del coefficiente di convezione che dipende fortemente dalle condizioni locali e della presenza degli spigoli.

8.14 SCAMBIO TERMICO CON I METALLI LIQUIDI

I metalli liquidi sono caratterizzati da una elevata conducibilità termica e quindi da numeri di Prandtl ($Pr = c_p \mu / \lambda$) molto piccoli ($\ll 1$). Pertanto le correlazioni viste in precedenza non risultano più valide, come indicato anche dalle condizioni di interpolazione sempre riportate. I metalli liquidi, inoltre, sono in grado di trasmettere calore anche se non in movimento proprio per l'elevata conducibilità termica.

Ai fini del calcolo del coefficiente di convezione termica occorre modificare la forma matematica delle correlazioni utilizzate. In particolare si dimostra che le correlazioni di scambio sono della forma:

$$Nu = C_1 + C_2 (Re Pr)^n$$

e ponendo $Pe = Re Pr$ (numero di *Peclet*) si ha anche la forma:

$$Nu = C_1 + C_2 Pe^n$$

Sabbotin suggerisce la correlazione:

$$Nu = 5 + 0.25 Pe^{0.8}$$

Per le leghe sodio – potassio (dette leghe NaK) si può usare la correlazione di *Skupinski*:

$$Nu = 4.82 + 0.0185 Pe^{0.827}$$

valida per $Re < 900000$, $100 < Pe < 10000$ e $L/D > 60$.

8.14.1 ALGORITMO DI CALCOLO PER LA CONVEZIONE FORZATA

Quanto detto in precedenza sulla convezione forzata prospetta una metodologia di risoluzione che qui possiamo riassumere nei seguenti punti fondamentali.

Determinazione delle proprietà termofisiche

Le proprietà termofisiche del fluido dipendono dalla temperatura e pertanto sorge subito la difficoltà di doverle determinare per un campo di temperature che spesso ha gradienti elevati.

Di solito si determinano alla temperatura media fra quella di parete e quella del fluido fuori dallo strato limite termico, detta anche *temperatura di film*.

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

Determinazione dei numeri di Reynolds e di Prandtl

Il numero di Reynolds è determinato nota la velocità, u_∞ (in genere quella del fluido non disturbato) e il parametro geometrico (x o D) e la viscosità cinematica del fluido alla temperatura di film. Il numero di Prandtl lo si calcola allo stesso modo o lo si ricava dai dati termofisici in forma tabellare o funzionale del fluido alla temperatura di film.

Utilizzo delle correlazioni di calcolo per la determinazione di Nu

In precedenza si sono dimostrate numerose correlazioni fra Nu e Re e Pr. Nelle tabelle del §8.10 se ne elencano alcune decine. La scelta della correlazione da utilizzare per calcolare Nu (e quindi il coefficiente di convezione termica) va fatta tenendo conto delle condizioni di validità indicate per ciascuna correlazione (cioè intervalli possibili per Re e per Pr) e al tipo di regime di moto (laminare o turbolento) che è possibile conoscere noto Re.

Calcolo del flusso termico

Tramite la correlazione di scambio si trova Nu e quindi, noto il parametro geometrico di similitudine, L , e il coefficiente di conducibilità del fluido alla temperatura di film, λ , si determina h :

$$h = \frac{Nu \cdot \lambda}{L}$$

Pertanto, note le temperature di parete e di fluido indisturbato, si calcola il flusso termico:

$$q'' = h(T_p - T_\infty)$$

Calcolo degli sforzi di attrito

Si è visto nei paragrafi precedenti come calcolare C_{fx} o anche il valore medio globale per varie condizioni geometriche e di moto.

Noto questo coefficiente si può calcolare lo sforzo tangenziale, τ_s , o le perdite per attrito.

9 CONVEZIONE NATURALE

La convezione naturale presenta difficoltà aggiuntive nella risoluzione delle equazioni della strato limite rispetto alla convezione forzata. In questo caso, infatti, le equazioni della quantità di moto (che ora riscriveremo) e dell'energia risultano *accoppiate* poiché la temperatura compare anche nella prima equazione.

La convezione naturale si può definire la vera convezione nel senso che il moto del fluido (e quindi il trasporto di materia ed energia) è conseguente al campo di temperature che si stabilisce nel fluido stesso.

Senza differenze di temperature il fluido non si muove e quindi si annulla la convezione termica naturale. La forza di spostamento (*driving force*) è determinata dallo squilibrio causato dalla forza di gravità fra le masse riscaldate (più leggere) e quelle fredde (solitamente più pesanti). Pertanto la differenza di densità, generata dalla differenza di temperature, genera il moto convettivo.

Oltre al campo gravitazionale terrestre nelle applicazioni si utilizzano anche campi artificiali, come avviene, ad esempio, per il raffreddamento delle palette delle turbine per il quale si sfrutta il campo di forze centrifughe generato dalla rotazione dei rotori.

La convezione naturale genera campi di velocità solitamente meno intensi di quelli in convezione forzata dove tali campi sono imposti dall'esterno in modo del tutto indipendente dal campo di temperatura.

Anche se la convezione forzata produce scambi termici più intensi per i più elevati coefficienti di convezione, la convezione naturale è fondamentale nei processi naturali (climatologia terrestre, riscaldamento naturale dei corpi, impiantistica, ...) e deve sempre essere presa in considerazione quale unico metodo di scambio in condizioni di emergenza quando il fluido non viene mosso da organi esterni.

Così, ad esempio, il radiatore di una autovettura funziona meglio quando la vettura è in movimento e ad alte velocità deve scambiare con l'aria ambiente più calore ma ha anche migliori condizioni di scambio termico.

Pertanto le condizioni più critiche si hanno a vettura ferma quando il flusso dell'aria di raffreddamento è generato dalla sola convezione naturale. E' a quel punto che parte la ventola supplementare di raffreddamento!

Un impianto termico (*nucleare o convenzionale*) ha le condizioni di criticità quando si fermano le pompe di circolazione. Un circuito elettronico ha le condizioni peggiori quando si ferma (o manca, come avviene nei portatili) la ventola di raffreddamento.

Equazione di continuità

L'equazione di continuità per la convezione naturale rimane invariata rispetto a quanto visto per la convezione forzata:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Equazione della quantità di moto

Le equazioni della quantità di moto deve ora contenere la forza unitaria X corrispondente alla forza di gravità. Proiettando sull'asse x l'equazione:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{D\tau} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F}$$

otteniamo, all'interno degli strati limiti:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g$$

Pertanto il gradiente di pressione dipende solo dall'asse y .

Proiettando nell'asse y si ha:

Equazione dell'energia

Anche questa equazione resta invariata rispetto a quella trovata per lo strato limite laminare per la convezione forzata:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Il termine dissipativo può trascurarsi a maggior ragione poiché il campo di velocità è meno intenso e pertanto l'equazione diviene:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

9.1 ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE PER LA CONVEZIONE NATURALE

Seguendo un procedimento già visto per la convezione forzata cerchiamo di conoscere i parametri fondamentali per la convezione naturale adimensionalizzando le tre equazioni sopra scritte per lo strato limite laminare. Si pongano le seguenti variabili, indicando con u_0 una velocità di riferimento di comodo:

$$x^* = \frac{x}{L} ; y^* = \frac{y}{L}$$

$$u^* = \frac{u}{u_0} ; v^* = \frac{v}{u_0}$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho u_0^2}$$

allora le equazioni dello strato limite sopra scritte divengono:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) L T^*}{u_0^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

ove si ha $\text{Re} = u_0 L / \nu$. Il gruppo adimensionale a secondo membro dell'equazione della quantità di moto può essere scritto nella forma:

$$\frac{g \beta (T_p - T_\infty) L T^*}{u_0^2} = \frac{Gr}{\text{Re}^2} \cdot T^*$$

ove si è posto il nuovo gruppo adimensionale, detto di Grashoff:

$$\frac{g \beta (T_p - T_\infty) L^3}{\nu^2} = Gr$$

definiamo ora una velocità caratteristica del moto data dalla relazione:

$$u_c = \sqrt{g \beta L (T_p - T_\infty)}$$

allora il numero di Grashoff può essere scritto nella forma:

$$Gr = \left(\frac{u_c L}{\nu} \right)^2 = Re^2$$

che conferisce a Gr il significato di un quadrato di un numero di Reynolds riferito alla velocità caratteristica u_c .

Se ora poniamo $u_0 = u_c$ allora le equazioni adimensionalizzate dello strato limite divengono:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = T^* + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Ricordando che deve sempre essere per il coefficiente di convezione termica:

$$h = \frac{-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{(T_p - T_f)}$$

ne segue che il numero di Nusselt, Nu, dipende nella convezione naturale solamente da Gr e Pr e non più da Re.

Pertanto le relazioni funzionali saranno del tipo:

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

In molti casi, specialmente per i gas e l'aria, la dipendenza si semplifica nella forma:

$$Nu = f(Gr \cdot Pr) = f(Ra)$$

ove si è indicato il numero di Rayleigh:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \beta L^3 (T_p - T_\infty)}{\nu \alpha}$$

Si osservi che avendo trovato l'equivalenza $Gr = Re^2$, con riferimento alla velocità caratteristica, allora si può dire che il peso della convezione naturale (per altro sempre presente) è sensibile quando il rapporto $\frac{Gr}{Re^2}$ è $\gg 1$.

Nel caso in cui è $\ll 1$ prevale la convezione forzata mentre se è circa 1 i due modi sono equivalenti.

Si osservi che quanto sopra ricavato per la lastra piana verticale vale in tutti i casi nei quali si considera la convezione naturale.

9.1.1 ANALISI ADIMENSIONALE PER LA CONVEZIONE NATURALE

Si vuole qui riportare il procedimento seguito con l'analisi adimensionale (applicazione del teorema di *Buckingham*) per la determinazione delle tipologie delle correlazioni per la convezione naturale.

I parametri che intervengono nel fenomeno della *convezione* sono visibili nelle equazioni dello strato limite prima scritte e pertanto si può affermare che il coefficiente di convezione h è funzione delle seguenti variabili:

$$h = h(\rho, \mu, g \beta \Delta T, l, c_p, \lambda) \quad [159]$$

ove il prodotto $g \beta \Delta T$ esprime l'*alleggerimento termico* prodotto dalla differenza di temperatura fra parete e fluido e gli altri simboli hanno il significato già noto.

Per il teorema di *Buckingham* (o teorema *pi-greco*) si dimostra che se una grandezza \mathbf{k} dipende da \mathbf{m} altre variabili e se è possibile scegliere \mathbf{n} **variabili indipendenti** allora la variabile \mathbf{k} si può porre in funzione di $\mathbf{m-n}$ gruppi adimensionali.

Nel caso in esame h è variabile dimensionale e il numero complessive di variabili in gioco è pari a 7, pertanto se si scelgono come grandezze indipendenti quelle relative al *Sistema Internazionale*, **metro (m)**, **chilogrammo (kg)**, **secondo (s)**, **grado Kelvin (K)** allora si può scrivere una relazione funzionale fra $7-4=3$ gruppi adimensionali la cui determinazione segue un procedimento analitico relativamente semplice che qui si desidera accennare.

Se la [159] è valida si supponga di avere un legame funzionale di tipo monomio in modo che si possa scrivere una relazione del tipo:

$$h = C \rho^a \mu^b (g \beta \Delta T)^c l^d c_p^e \lambda^f \quad [160]$$

Per il principio di omogeneità le dimensioni di ambo i membri di questa eguaglianza debbono essere uguali.

Pertanto se esprimiamo nel S.I. (che ha le seguenti unità di misura fondamentali: M,L,T, θ) le dimensioni di tutti i parametri sopra indicati abbiamo i seguenti sviluppi:

$$\begin{aligned} [l] &= [L] \\ [g \beta \Delta T] &= [\theta^{-1} L T^{-2} \theta] = [L T^{-2}] \\ [\rho] &= [M L^{-3}] \\ [\mu] &= [M L^{-1} T^{-1}] \\ [\lambda] &= [M L T^{-3} \theta^{-1}] \\ [c_p] &= [L^2 T^{-2} \theta^{-1}] \\ [h] &= [M T^{-3} \theta^{-1}] \end{aligned}$$

Pertanto la [160] diviene:

$$[M T^{-3} \theta^{-1}] = C [M L^{-3}]^a [M L^{-1} T^{-1}]^b [L T^{-2}]^c [L]^d [L^2 T^{-2} \theta^{-1}]^e [M L T^{-3} \theta^{-1}]^f \quad [161]$$

Possiamo ora imporre che quanto presente per ciascuna unità di misura a primo membro deve essere uguale al secondo membro e cioè che si possa scrivere il seguente sistema dimensionale:

$$\begin{cases} 0 = -3a - b + c + d + 2e + f & \text{per } L \\ 1 = a + b + f & \text{per } M \\ -3 = -b - 2c - 2e - 3f & \text{per } T \\ -1 = -e - f & \text{per } \theta \end{cases} \quad [162]$$

Ne consegue che, essendo la caratteristica del sistema pari a $6-4=2$ (7 variabili pari al numero degli esponenti e quindi pari ai parametri da cui dipende h , 4 unità indipendenti del S.I.) ne segue, per il teorema di *Rouché e Capelli*, che le soluzioni possibili sono ∞^2 .

Basta scegliere due delle variabili come indipendenti e risolvere il sistema per esse. Trovate le soluzioni si trova che la [160] assume la forma:

$$h = \frac{\lambda}{l} \left(\frac{c_p \mu}{\lambda} \right)^m \left(\frac{\rho^2 g \beta \Delta T l^3}{\mu^2} \right)^n \quad [163]$$

Si possono riconoscere i seguenti gruppi adimensionali:

• Numero di **Nusselt** definito da: $Nu = \frac{hl}{\lambda} = \frac{\frac{l}{h}}{\frac{\lambda}{h}} = \frac{\text{Resistenza termica per conduzione}}{\text{Resistenza termica per convezione}}$

• Numero di **Prandtl** definito da: $Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{\lambda}{c_p \rho}} = \frac{\text{Diffusività meccanica}}{\text{Diffusività termica}}$

Numero di **Grashoff** definito da: $Gr = \frac{g \beta \Delta T \rho^2 l^3}{\mu^2}$ equivalente a Reynolds²

La relazione funzionale [163] diviene, quindi:

$$Nu = C Pr^m Gr^n \quad [164]$$

con C, m, n determinate sperimentalmente mediante *best fit*.

Si tratta del tipo di relazione visto in precedenza mediante l'adimensionalizzazione delle equazioni dello strato limite. In genere per fluidi aeriformi gli esponenti m ed n coincidono e pertanto si hanno correlazioni del tipo:

$$Nu = C (Gr \cdot Pr)^n = C \cdot Ra^n \quad [165]$$

ove si è indicato con Ra il numero di **Rayleigh** dato da:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \beta \Delta T l^3 \rho^2}{\mu^2} \cdot \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{g \beta \Delta T l^3 \rho^2 c_p}{\mu \lambda} \quad [166]$$

9.1.2 PROFILO DI TEMPERATURA NELLO STRATO LIMITE TERMICO

Possiamo ancora una volta supporre che il profilo di velocità e di temperatura adimensionale siano polinomiali e cioè che si possa porre:

$$\frac{u}{u_0} = a_1 + a_2 \frac{y}{\delta} + a_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

con le condizioni al contorno:

$$\frac{u}{u_0} = 0 \quad \text{per} \quad \frac{y}{\delta} = 0$$

$$\frac{u}{u_0} = 0 \quad \text{per} \quad \frac{y}{\delta} = 1$$

$$\frac{\partial \left(\frac{u}{u_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)} = 0 \quad \text{per} \quad \frac{y}{\delta} = 1$$

ed ancora che sia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{\nu} \quad \text{per } \frac{y}{\delta} = 0$$

Con queste condizioni si trova:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)\delta^2}{4u_0\nu} \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

Per il profilo di temperatura si può porre:

$$T^* = b_1 + b_2 \frac{y}{\delta_t} + b_3 \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

con le condizioni:

$$T^* = 1 \quad \text{per } y = 0$$

$$T^* = 0 \quad e \quad \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{per } y = \delta_t$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} = 0 \quad \text{per } y = 0$$

Si trova, pertanto:

$$T^* = 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

Le esperienze di laboratorio mostrano che i due profili sopra determinati, pur se approssimati per via dell'ipotesi polinomiale, approssimano abbastanza bene gli andamenti reali.

9.1.3 STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO LAMINARE

Lo strato limite termico con moto convettivo in regime laminare, cioè per $Ra < 10^8$, può essere calcolato mediante la relazione:

$$\delta_t = 3.49 \frac{x}{Ra^{1/4}}$$

valida per $Pr \approx 1$. I parametri termofisici sono calcolati alla distanza x dal bordo di attacco alla temperatura di film già indicata in precedenza. Per $Pr \neq 1$ si può usare l'espressione:

$$\delta_t = 3.49 \frac{x Pr^{1/2}}{Ra^{1/4}}$$

Si osservi che se nell'equazione del momento si trascura il termine di attrito rispetto a quello di alleggerimento termico $g\beta\Delta T$ allora lo strato limite termico risulta proporzionale al prodotto $(Ra_x Pr)^{-1/4}$.

Si osservi che il nuovo gruppo adimensionale $Ra_x Pr$ non contiene la viscosità cinematica:

$$Ra_x Pr = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{a^2}$$

Questo nuovo gruppo adimensionale è detto *Numero di Boussinesque*, $Bo_{x,\beta}$. Anche il numero locale di Nusselt è funzione dello stesso gruppo adimensionale, cioè:

$$Nu = f(Ra_x Pr)^{1/4}$$

9.1.4 STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO TURBOLENTO

Per valori di $Ra > 10^8$ il moto convettivo assume le caratteristiche di un moto turbolento ed hanno inizio i fenomeni di transizione dal moto laminare con formazione di vortici. Per $Ra > 10^9$ il moto è definitivamente turbolento, almeno per la lastra piana verticale.

Lo strato limite termico può ancora essere calcolato utilizzando le stesse espressioni dello strato limite dinamico per $Pr = 1$ mentre per valore diversi si applica ancora il fattore correttivo $Pr^{1/2}$.

9.1.5 CONVEZIONE NATURALE CON PARETE PIANA VERTICALE ISOTERMA

La soluzione esatta può essere ottenuta applicando ancora la teoria della similitudine (*similarity*) e cioè ponendo una variabile di similitudine data dal rapporto:

$$\eta = \frac{x}{yRa_x^{-1/4}}$$

Introducendo le funzioni di corrente di flusso (*streamfunction*):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

la funzione di similitudine è definita come:

$$F(\eta, Pr) = \frac{\psi}{aRa_x^{1/4}}$$

Per la temperatura la forma adimensionale si ha:

$$\theta(\eta, Pr) = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

Per applicare il metodo di Blasius occorre procedere in due fasi: prima si eliminano u e v mediante le derivate della funzione di corrente, ψ , poi eliminando x, y, ψ e T mediante η, F e θ .

Si possono scrivere le equazioni differenziali:

$$\frac{3}{4} F \theta' = \theta''$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{1}{2} F'^2 - \frac{3}{4} F F'' \right) = -F''' + \theta$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{array}{lll} F = 0 & \text{per} & \eta = 0 \\ F' = 0 & \text{per} & \eta = 0 \\ \theta = 1 & \text{per} & \eta = 0 \\ F' = 0 & \text{per} & \eta \rightarrow \infty \\ \theta = 0 & \text{per} & \eta \rightarrow \infty \end{array}$$

La soluzione delle precedenti equazioni risulta piuttosto complessa e viene qui omessa per semplicità. Il numero locale di Nusselt è così determinato:

$$Nu_x = 0.503 \left(\frac{Pr}{Pr + 0.986 Pr^{1/2} + 0.492} \right)^{1/4} Ra_x^{1/4}$$

valida per tutti i numeri di Prandtl. I valori asintotici sono:

$$Nu_x = 0.503 Ra_x^{1/4} \quad \text{per } Pr \gg 1$$

e ancora:

$$Nu_x = 0.600 (Ra_x Pr)^{1/4} \text{ per } Pr < 1$$

Entrambe queste correlazioni confermano le aspettative indicate nel §9.1.3. Il valore medio vale:

$$\overline{Nu}_x = 0.671 \left(\frac{Pr}{Pr + 0.986 Pr^{1/2} + 0.492} \right)^{1/4} Ra_x^{1/4}$$

Per l'aria, avente $Pr = 0.72$, si ottiene la relazione semplificata:

$$\overline{Nu}_x = 0.571 Ra_x^{1/4}$$

Una relazione valida per qualunque numero di Prandtl e con $Ra < 10^{12}$ è, per Nusselt medio (correlazione di *Churchill* e *Chu*):

$$Nu_x = 0.825 + \frac{0.387 Ra_x^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} :$$

che per l'aria, $Pr = 0.72$, diviene:

$$\overline{Nu}_x = (0.825 + 0.325 Ra_x^{1/6})^2$$

In regime laminare ($Ra < 10^9$) si ha la correlazione:

$$\overline{Nu}_x = 0.68 + \frac{0.67 Ra_x^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{4/9}}$$

che per l'aria, $Pr = 0.72$, diviene:

$$\overline{Nu}_x = 0.68 + 0.515 Ra_x^{1/4}$$

9.1.6 FLUSSO UNIFORME DALLA PARETE

Supponiamo ora che lungo la parete verticale si abbia un flusso uniforme, $q'' = \text{cost}$, e che pertanto la temperatura della stessa parete cresca uniformemente e monotonicamente nella direzione x .

Per fluidi con elevati numeri di Prandtl si ha relazione:

$$\frac{q''_s}{[T_p(x) - T_\infty]} \frac{x}{\lambda} \approx \left[\frac{g \beta (T_p - T_\infty) x^3}{\alpha \nu} \right]^{1/4}$$

Sperimentalmente si è trovata la relazione:

$$Nu_x = 0.616 \left(\frac{Pr}{Pr + 0.8} \right)^{1/5} Ra_x^{1/5}$$

La turbolenza si ha per $Ra_x > 10^{13}$.

Vlet e *Liu* propongono le seguenti relazioni:

$$Nu_x = 0.6 Ra_x^{1/5}$$

$$\overline{Nu}_x = 0.75 Ra_x^{1/5}$$

per regime laminare: $10^5 < Ra_x < 10^{13}$, mentre per regime turbolento, $Ra_x > 10^{13}$, si ha:

$$\overline{Nu}_x = 0.568 Ra_x^{0.22}$$

$$\overline{Nu}_x = 0.645 Ra_x^{0.22}$$

Per l'aria *Vlet* e *Liu* propongono le relazioni:

$$Nu_x = 0.55 Ra_x^{0.2} \quad \text{laminare}$$

$$Nu_x = 0.17 Ra_x^{0.25} \quad \text{turbolento}$$

Chu e *Churchill* propongono una relazione valida per ogni Ra e Pr:

$$\overline{Nu}_x = \left\{ 0.825 + \frac{0.38 Ra_x^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.437}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$$

Questa relazione richiede che la temperatura di riferimento sia calcolata mediante la differenza con il valore medio della temperatura di parete, cioè:

$$T_f = \overline{T}_p - T_\infty$$

Per l'aria, $Pr = 0.72$, la precedente correlazione diviene:

$$\overline{Nu}_x = (0.825 + 0.328 Ra_x^{1/6})^2$$

In Letteratura si hanno numerose altre correlazioni sperimentali per il calcolo del coefficiente di convezione per diverse situazioni geometriche rispetto alla parete piana verticale sopra vista.

9.2 CONVEZIONE NATURALE SU UNA LASTRA PIANA ORIZZONTALE

Si tratta di un caso molto importante per le applicazioni impiantistiche. La lunghezza caratteristica L è data dal rapporto:

$$L = \frac{A}{P}$$

ove A è l'area della piastra e P è il perimetro. Le situazioni di scambio termico possibili sono diverse a seconda della posizione della lastra piana e questa è a temperatura maggiore (riscaldamento) o minore (raffreddamento) rispetto al fluido.

Con lastra piana calda rivolta verso l'alto o anche con lastra piana fredda rivolta verso il basso si possono usare le correlazioni:

$$\overline{Nu}_L = 0.54 Ra_L^{1/4}$$

valida per regime laminare ($10^4 < Ra < 10^{11}$) mentre per regime turbolento ($Ra > 10^{11}$) si ha:

$$\overline{Nu}_L = 0.15 Ra_L^{1/3}$$

negli altri due casi, cioè lastra piana calda rivolta verso il basso o lastra piana fredda rivolta verso l'alto, non si dovrebbe verificare alcuna convezione termica.

In realtà si hanno deboli flussi termici difficilmente stimabili e dovuti a disturbi casuali del moto del fluido.

9.3 CONVEZIONE NATURALE PER CILINDRI ORIZZONTALI LUNGI

Il parametro geometrico di riferimento è il diametro D e il numero di Nusselt locale varia, come già visto per la convezione forzata, con la posizione lungo la circonferenza. Il valore medio circonferenziale è dato dalla relazione:

$$\overline{Nu}_D = 0.53 Ra_D^{1/4}$$

valida per regime laminare ($10^3 < Ra < 10^9$). Per il regime turbolento ($10^9 < Ra < 10^{12}$) si ha:

$$\overline{Nu}_D = 0.13 Ra_D^{1/3}$$

Recentemente è stata proposta una correlazione più complessa ma più precisa:

$$\overline{Nu}_H = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0.559 Pr^{9/16}) \right]^{8/27}} \right\}^2$$

valida sia in regime laminare che turbolento.

9.4 CONVEZIONE NATURALE IN CAVITÀ CHIUSE

Questo argomento è oggi di grandissimo interesse non solo per gli aspetti relativi alla trasmissione del calore ma anche per gli aspetti epistemologici relativi ai sistemi *dissipativi* secondo le teorie di Y. Prigogine.

La convezione termica avviene all'interno di domini chiusi (di forma parallelepipedica o fra superfici piane affacciate con diversa temperatura. In Figura 146 si ha una cavità a sezione rettangolare con due lati adiabatici con lato caldo a sinistra e lato freddo a destra. Nella figura a destra si ha la distribuzione di temperatura che indica la formazione di uno strato limite ascendente sul lato caldo e di uno strato limite discendente sul lato freddo. Il flusso termico è calcolato sempre con la relazione di Newton con coefficiente di convezione da valutare alla temperatura media:

$$T_{fm} = \frac{T_c + T_f}{2}$$

con T_c e T_f temperature del lato caldo e freddo.

Il numero di Grashoff è calcolato con la relazione:

$$Gr = \frac{g \beta (T_c - T_f) H^3}{\nu^2}$$

con H altezza delle superfici attive. Per Ra bassi ($< 10^3$) si hanno ridottissimi movimenti del fluido e la trasmissione del calore avviene quasi esclusivamente per conduzione termica attraverso lo stesso fluido e quindi si ha:

$$Q \cong \frac{\lambda}{b} S (T_c - T_f)$$

ove b è lo spessore della cavità ed S l'area della sezione verticale (non adiabatica) e λ il coefficiente di conducibilità termica del fluido. La precedente relazione implica che il numero di Nusselt riferito alla larghezza della cavità è:

$$Nu_b = \frac{hb}{\lambda} \approx 1$$

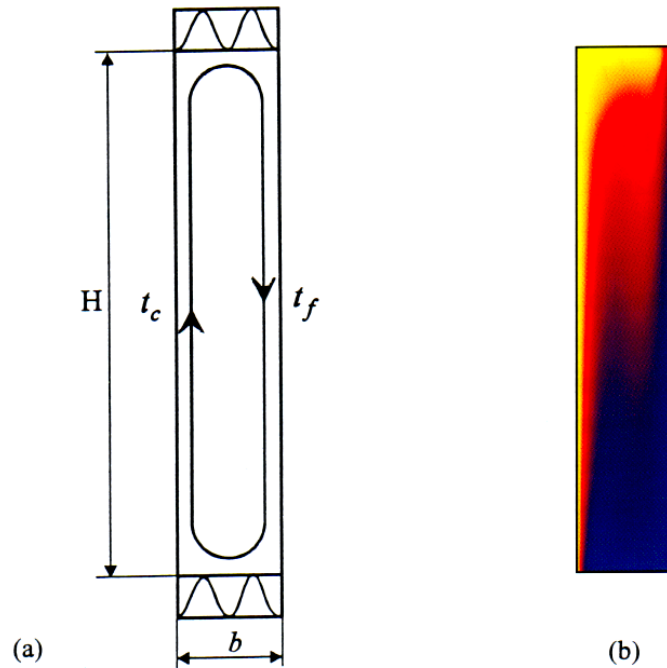


Figura 146: Convezione naturale in una cavità chiusa

Quanto detto vale per rapporti H/b compresi fra 2 e 10 per $Ra < 10^3$ e per H/b fra 10 e 40 per $10^3 < Ra < 10^4$. Per valori più elevati di Ra si instaura una circolazione di fluido che diviene sempre più consistente e il numero di Nusselt è dato dalla relazione:

$$Nu_b = 0.22 \left(\frac{Pr}{0.2 + Pr} Ra \right)^{0.28} \left(\frac{b}{H} \right)^{1.09}$$

valida per $10 < H/b < 40$, $Pr < 10^5$ e $10^4 < Ra < 10^{13}$. Si ha la correlazione:

$$Nu_b = 0.42 Ra^{0.25} \left(\frac{b}{H} \right)^{1.05}$$

valida per $10 < H/b < 40$, $1 < Pr < 10^4$ e $10^7 < Ra < 10^{11}$. Per valori di $H/b > 40$ si pone sempre $H/b=40$ nella precedente correlazione.

Nel caso di cavità sottili, con $H/b < 1$ allora il comportamento termico dipende dal tipo di trasmissione alle pareti.

Per flusso costante alle pareti si ha la correlazione:

$$\overline{Nu} = 0.34 Ra^{2/9} \left(\frac{H}{b} \right)^{1/9}$$

con Ra_H dato dalla relazione:

$$Ra_H = \frac{g \beta H^4 q''}{\alpha \nu \lambda}$$

Nel caso in cui si calcoli Ra con la relazione:

$$Ra = \frac{Ra_H}{Nu} = \frac{g \beta \Delta T H^3}{\alpha \nu}$$

allora la correlazione da utilizzare è la seguente:

$$\overline{Nu} = 0.25 Ra_H^{2/7} \left(\frac{H}{b} \right)^{1/7}$$

Si è osservato sperimentalmente che nel caso in cui si abbia temperatura di parete costante si possono usare la stessa correlazione sopra indicata purché il numero di *Rayleigh* sia calcolato con riferimento alla temperatura media fra la parete calda e quella fredda.

9.4.1 CAVITÀ RISCALDATE DAL BASSO

La differenza fra le cavità riscaldate lateralmente e quelle riscaldate dal basso è che ora le cavità sono riscaldate dal lato vuoto e non da una parete, come illustrato in Figura 147).

Queste cavità, dette anche *Celle di Bènard*, attivano una circolazione di fluido anche con pochi gradi di differenza di temperatura fra la superficie inferiore e quella superiore.

Il valore critico perché questa circolazione avvenga è che si abbia:

$$Ra_H \geq 1708$$

con Ra_H dato da:

$$Ra = \frac{Ra_H}{Nu} = \frac{g\beta(T_c - T_f)H^3}{av}$$

La circolazione che si instaura è caratteristica di queste celle, vedi figura, che può anche diventare turbolenta incrementando sensibilmente il flusso termico dal basso verso l'alto. Sperimentalmente si è trovata valida la correlazione:

$$\overline{Nu}_H = 0.069 Ra_H^{1/3} Pr^{0.074}$$

con proprietà termofisiche calcolate alla temperatura media. Per $Ra_H > 10^9$ si ha una proporzionalità diretta di Nusselt con $Ra_H^{0.33}$ con flusso indipendente dallo spessore H della cella.

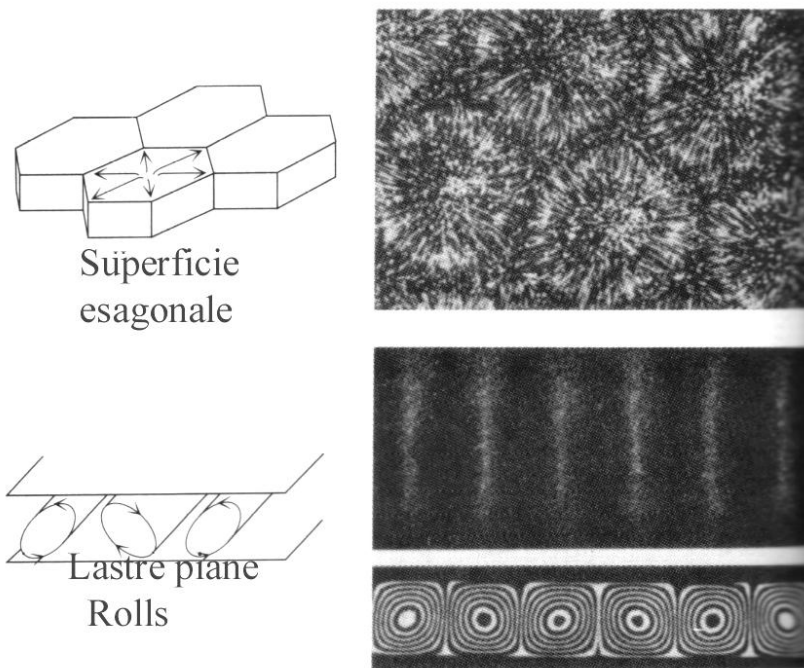


Figura 147: Cavità riscaldate dal basso (*Celle di Bènard*)

Al di sotto del valore di 1708 il moto del fluido è del tutto trascurabile e il flusso è praticamente solo conduttivo. Le celle di *Bènard* sono utilizzate per raffreddare mediante convezione naturale superfici molto calde, come ad esempio le lampade allo iodio usate nei proiettori luminosi.

9.5 CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE NATURALE

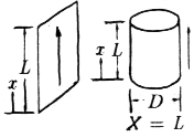
<p>Lastra piana verticale e cilindri di elevato diametro</p> 		
Autore	Correlazione	Note
Polhausen, Schuh	$Nu = 0,48 (Gr)^{1/4}$ (per aria) $Nu = C \cdot (Ra)^{1/4}$	$Gr Pr < 10^9$ $Pr = 0,73 \quad C = 0,571$ $Pr = 10 \quad C = 0,612$ $Pr = 100 \quad C = 0,652$ $Pr = 1000 \quad C = 0,653$
Churchill	$Nu = 0,68 + \frac{0,67 (Ra)^{1/4}}{[1 + (\frac{0,492}{Pr})^{9/16}]^{4/16}}$	$10^5 < Ra < 10^9$
Chu	$Nu^{1/2} = 0,85 + \frac{0,387 (Ra)^{1/6}}{[1 + (\frac{0,492}{Pr})^{9/16}]^{8/27}}$	$10^{-1} < Ra < 10^{12}$ $0 < Pr < \infty$
Mc Adams	$Nu = 0,59 (Ra)^{1/4}$ $Nu = 0,13 (Ra)^{1/3}$	$Pr \approx 1,0, \quad 10^4 < Ra < 10^9$ $10^9 < Ra < 10^{13}$
Churchill	$Nu = 0,67 + \frac{0,67 (Ra)^{1/4}}{[1 + (\frac{0,492}{Pr})^{9/16}]^{4/9}}$	$8 \cdot 10^{-5} < Ra < 4 \cdot 10^{14}$
Thelen		$0,022 < Pr < 7640$
Vliet	$Nu_x = 0,55 (Gr_x^* Pr)^{0,2}$	laminare
Ross	$Nu_x = 0,17 (Gr_x^* Pr)^{0,25}$	turbolento

Tabella 22: Correlazioni per la convezione naturale

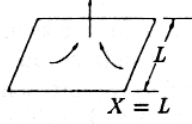
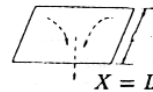
<p>Lastra piana orizzontale, flusso termico ascendente</p> 		
Autore	Correlazione	Note
Fujii Jmura	$Nu = 0,13 (Ra)^{1/3}$	$4 \cdot 10^4 < Ra < 7 \cdot 10^{10}$ $0,3 \times 0,15 \text{ m}$ $0,07 \times 0,05 \text{ m}$
Lewandowski	$Nu = 0,766 (Ra)^{1/5}$ $Nu = 0,173 (Ra)^{1/3}$	$10^4 < Ra < 10^7$ $10^5 < Ra < 10^8$
Fishenden Saunders	$Nu = 0,54 (Ra)^{1/4}$ $Nu = 0,14 (Ra)^{1/3}$	$10^5 < Ra < 10^7$ $10^7 < Ra < 3 \cdot 10^{10}$ $0,61 \times 0,61 \text{ m}$
Hassan Mohamed	$Nu = 0,135 (Ra)^{1/3} \pm 15\%$	$Pr = 0,72, \quad 10^3 < Gr < 10^9$ $0,5 \times 0,2 \text{ m}$
Al-Arabi El-Ricdy	$Nu = 0,7 (Ra)^{1/4} \pm 14\%$ $Nu = 0,155 (Ra)^{1/3} \pm 12\%$	$2 \cdot 10^5 < Ra < 4 \cdot 10^7, \quad 0,05 \text{ m}$ $Ra > 4 \cdot 10^7 \quad Pr = 0,72$ $0,1 \text{ m}, \quad 0,15 \times 0,25 \text{ m}$

Tabella 23: Correlazioni per la convezione naturale

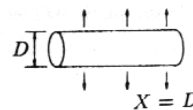
Lastra piana orizzontale,
flusso termico discendente



Autore	Correlazione	Note
Mc Adams	$Nu = 0,27 (Ra)^{1/4}$	$3 \cdot 10^5 < Gr Pr < 10^{10}$
Fujii Imura	$Nu = 0,58 (Ra)^{1/5}$	$10^6 < Ra < 10^{11}$
Chapman	$Nu = 0,44 (Ra)^{1/5}$	$10^5 < Ra < 2 \cdot 10^7$

Tabella 24: Correlazioni per la convezione naturale

Cilindri orizzontali



Autore	Correlazione	Note
Mc Adams	$Nu = 0,53 (Ra)^{1/4}$	$10^4 < Ra < 10^9$
	$Nu = 0,13 (Ra)^{1/3}$	$10^9 < Ra < 10^{12}$
Churchill	$Nu = \left[0,60 + 0,387 \left\{ \frac{Ra}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{16/9}} \right\}^{1/6} \right]^2$	$10^5 < Ra < 10^{12}$
Chu		
Elenbaas[$Nu^3 e^{-6/\overline{Nu}} = \frac{Gr Pr}{235}$	$Gr Pr < 10^4$ (fli)

Tabella 25: Correlazioni per la convezione naturale

Geometria	Laminare $10^3 < Gr Pr < 10^9$	Turbolento $Gr Pr > 10^9$
Lastra o cilindro verticale	$h = 1,42 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	$h = 0,95 (\Delta T)^{1/3}$
Cilindro orizzontale	$h = 1,32 (\Delta T / D)^{1/4}$	$h = 1,24 (\Delta T)^{1/3}$
Lastra orizzontale (quadrata): Faccia riscaldata verso l'alto o faccia più fredda verso il basso	$h = 1,32 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1,43 (\Delta T)^{1/3}$
Faccia riscaldata verso il basso o faccia più fredda rivolta verso l'alto	$h = 0,61 \left(\frac{\Delta T}{L^2} \right)^{1/5}$	

Tabella 26: Correlazioni per la convezione naturale

9.6 GETTI E PENNACCHI

Lo studio dei getti e dei pennacchi riveste notevole interesse sia industriale che ambientale. Si tratta di due esempi di convezione termica non confinata, cioè non limitata da superfici solide: una corrente fluida (getti o fumi) induce un moto convettivo della massa esterna (ad esempio aria per il caso dei pennacchi).

Con riferimento alla Figura 148, una corrente di fluido immesso attraverso un orifizio, dopo una zona iniziale (circa 6 volte la dimensione del foro nel quale la velocità media coincide con quella a monte dell'orifizio) passa dalla zona laminare a quella turbolenta.

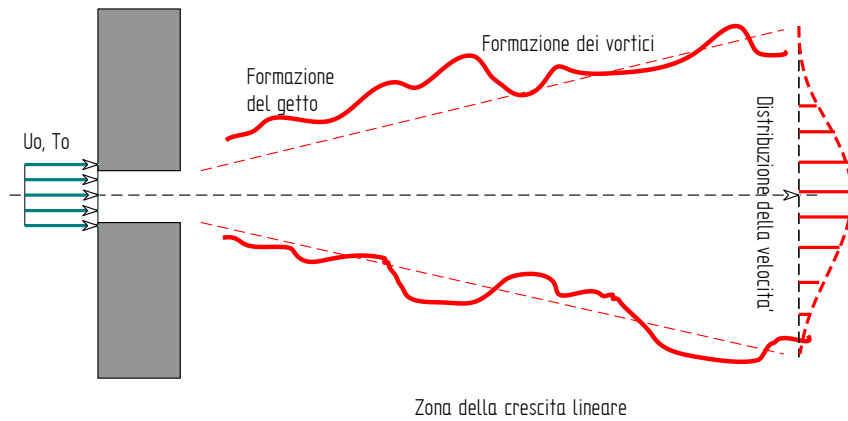


Figura 148: Formazione del getto (zona turbolenta)

Il getto si allarga man mano che si procede in avanti e si parla di una zona di accrescimento lineare dello spessore del getto.

La distribuzione della velocità nel getto si dimostra, partendo dalle equazioni allo strato limite turbolento, che è di tipo esponenziale secondo la relazione:

$$\bar{u} = \bar{u}_c e^{-(r/b)^2}$$

ove è $b = 0.107 x$ ed u_c è la velocità sull'asse. Analogamente la distribuzione di temperatura è:

$$\bar{T} - \bar{T}_\infty = (\bar{T}_c - T_\infty) e^{-(r/b_T)^2}$$

con $b_T = 0.127 x$. Le precedenti equazioni necessitano dei valori della velocità e della temperatura sull'asse del getto. Si dimostra che vale la seguente relazione:

$$2\pi \int_0^\infty \rho \bar{u}^2 r dr = \rho U_0 \frac{\pi}{4} D_0^2$$

Combinando con l'equazione della distribuzione di velocità si ottiene il valore della velocità sull'asse:

$$\bar{u}_c = 6.61 \frac{U_0 D_0}{x}$$

Si osservi come questa velocità decresce al crescere di x e che per $x = 6.61 D_0$ si ha $\bar{u}_c = U_0$.

Si dimostra ancora valida la relazione:

$$2\pi \int_0^\infty \rho c_p \bar{u}^2 (\bar{T} - T_\infty) r dr = \rho c_p U_0 \frac{\pi}{4} (T_0 - T_\infty) D_0^2$$

Combinando con l'equazione della distribuzione della temperatura si ottiene:

$$\bar{T}_c - T_\infty = 5.65 \frac{(T_0 - T_\infty)}{x} D_0$$

Quindi l'eccesso di temperatura decresce ancora con la distanza x dall'orifizio.

Se un getto viene orientato su una parete verticale allora nell'area della sezione del getto si hanno coefficienti di convezione elevati.

Pertanto si usano i getti per il raffreddamento rapido ed intensivo di superfici particolarmente calde (ad esempio le palette delle turbine, ...).

Per i pennacchi si ha una situazione del tipo descritto in Figura 149.

La sorgente di calore innesca un movimento ascensionale di fluido caldo che, a partire da una certa distanza da questa, innesca moti turbolenti con formazione di vortici che trascinano (*entrainment*) il fluido circostante.

Le distribuzioni di velocità e di temperature hanno ancora l'andamento esponenziale già visto in precedenza per i getti con valori delle costanti da determinare sperimentalmente.

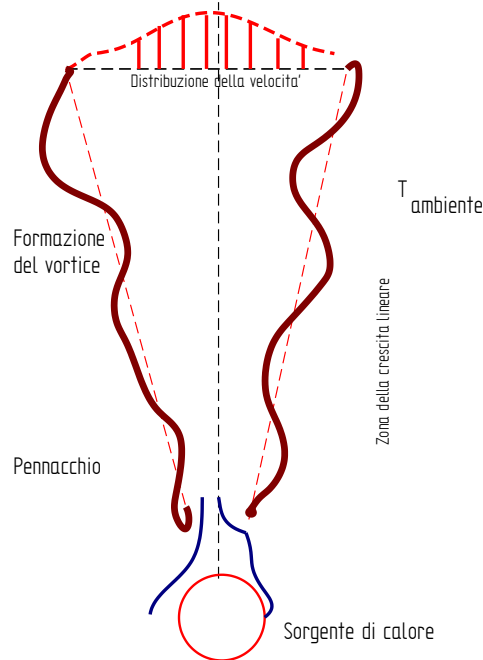


Figura 149: Formazione di un pennacchio

In Figura 150 si ha un esempio di pennacchio reale formatosi al di sopra di una torcia di *blow down* di uno stabilimento industriale.

Maggiori informazioni sono reperibili nei manuali specializzati.



Figura 150: Formazione di un pennacchio in una torcia di raffineria

10 METODI NUMERICI PER LA FLUIDODINAMICA (CFD)

10.1 LE PROBLEMATICHE DELLA SIMULAZIONE NUMERICA

La soluzione dei problemi di fluidodinamica è molto più complessa di quella vista per la conduzione termica. Le equazioni differenziali (Navier Stokes più equazione dell'energia) sono di tipo alle derivate parziali, non lineari, paraboliche, ellittiche e iperboliche al tempo stesso.

L'applicazione del metodo alle differenze finite porta a notevoli diversità rispetto a quanto già visto per la conduzione. A causa della non linearità del problema. Una evoluzione del metodo alle differenze finite è il metodo ai volumi finiti.

In questo caso si suddivide il dominio di applicazione delle equazioni differenziali in una serie di volumi di controllo, opportunamente selezionati, su cui integrare le equazioni stesse usando profili noti della variabile incognita.

Nei volumi di controllo debbono valere le leggi di conservazione già descritte (massa, energia, quantità di moto, ...) in modo del tutto simile a quanto visto per il metodo alle differenze finite.. Proprio questa conservazione delle grandezze fondamentali è il principale vantaggio del metodo a volume di controllo.

In genere per evitare divergenze matematiche si usano varie metodologie risolutive (vedi, ad esempio, metodo *upwind*)

Un secondo importante metodo utilizzato è il metodo agli elementi finiti (*FEM*) che qui brevemente si sintetizza. In questo caso, in analogia con il metodo delle differenze finite, si cerca la soluzione delle equazioni differenziali per approssimazioni successive su elementi per i quali la soluzione è nota o ipotizzabile in modo quasi esatto.

Il metodo agli elementi finiti assume una funzione approssimata che soddisfi i vincoli della *PDE* di partenza e che dipenda da parametri da ottimizzare (ad esempio minimizzando l'energia totale). Esso definisce a priori l'andamento della soluzione su singole porzioni (elemento finito, EF) del continuo connesse alle altre in dati punti.

Pertanto si suddivide il continuo con una griglia (*mesh*) che delimita gli Elementi Finiti (EF). La griglia definisce: volume, posizione dei nodi ed appartenenza dei nodi ad uno o più EF.

Gli EF si scambiano azioni solo tramite i nodi. Si assumono andamenti "*semplici*" delle variabili all'interno degli EF.

Si impongono condizioni di continuità e congruenza nei nodi e, in parte, sui contorni degli EF confinanti.

Le equazioni di vincolo dei nodi formano un sistema globale che viene risolto con i classici metodi matriciale.

In definitiva si ha la seguente procedura:

Discretizzazione, soluzione definita "a pezzi", continuità e congruenza sui bordi

10.2 LA FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE (CFD)

Lo scopo della *Fluidodinamica Computazionale* (CFD) è quello di formulare *modelli* adatti a descrivere i fenomeni fluidodinamici. Considerazioni sulla natura dei fluidi e analisi del livello di scala spaziale, temporale e dinamico della realtà sono gli strumenti indispensabili per formulare modelli fisici per la fluidodinamica che possiedano il requisito di *riprodurre la realtà con il livello di approssimazione desiderato*.

L'effettiva *validità* di ogni modello, in quanto necessariamente approssimato, dovrà poi essere verificata confrontando le previsioni che esso è in grado di fornire con dati sperimentali, oppure con le previsioni di altri modelli fisici ottenuti con un livello minore di approssimazione. Conoscere un fenomeno fluidodinamico significa conoscere compiutamente (sebbene con un certo livello di approssimazione) la distribuzione spaziale e l'evoluzione temporale di un certo numero di variabili fluidodinamiche (velocità, temperatura, pressione, ecc.) che lo caratterizzano.

Il numero minimo di tali variabili dipende, di volta in volta, non solo dal tipo di fenomeno, ma anche dal livello di approssimazione con cui desideriamo conoscerlo.

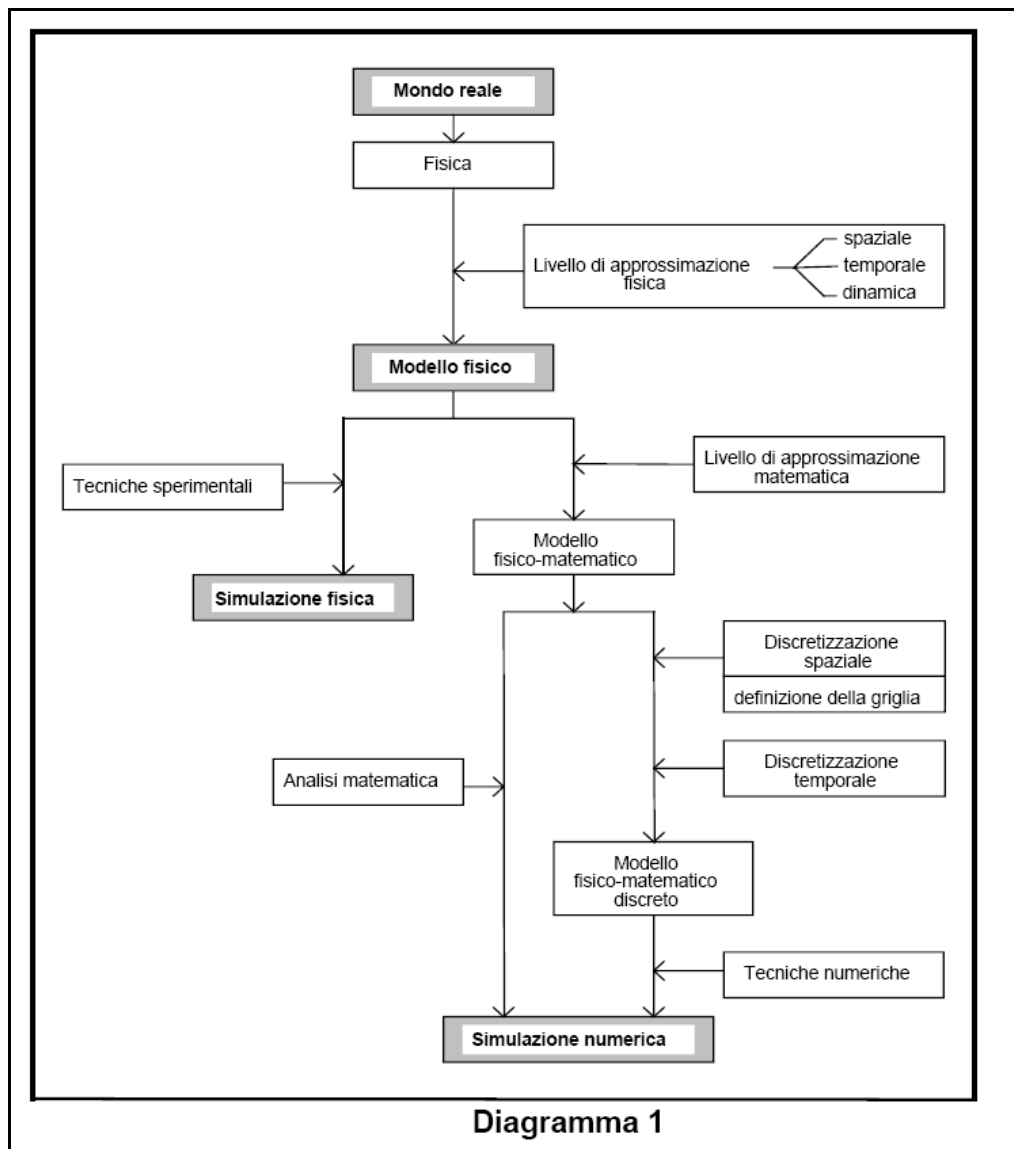


Figura 151: Schema della modellizzazione fluidodinamica

Come indicato nel diagramma di Figura 151, a tale conoscenza si può pervenire, dopo averne formulato un modello fisico, sia attraverso misure sperimentali dirette di tali variabili, sia risolvendo sistemi di equazioni le cui variabili sono appunto tali proprietà fluidodinamiche.

Si tratta di quelle che, con un termine poco felice, ma ormai universalmente diffuso, prendono rispettivamente il nome di *simulazione fisica*, o sperimentale, e di *simulazione numerica*. Nel secondo caso, il passo che è necessario compiere dopo aver formulato un modello fisico consiste nel tradurlo in un *modello fisico-matematico*.

Il passaggio dal modello fisico a quello fisico-matematico si basa su alcune leggi fondamentali della fisica, che impongono che in un sistema di fluido, come in ogni altro sistema dinamico della meccanica classica, determinate grandezze quali la massa, la quantità di moto generalizzata e l'energia soddisfino precise equazioni di bilancio che esprimono quelli che, più o meno propriamente, prendono il nome di *principi di conservazione*.

Nell'ambito della fluidodinamica classica, ovvero nell'ambito del livello di approssimazione della realtà del *continuo deformabile di tipo newtoniano*, il più completo tra i modelli fisico-matematici è costituito dal sistema di *equazioni di Navier-Stokes* che esprime, appunto, il principio di *conservazione della massa*, il *teorema della quantità di moto* e il principio di *conservazione dell'energia totale*.

Una volta che siano note l'equazione di stato e le proprietà fisiche del fluido in esame, questo sistema di equazioni differenziali, integrato numericamente, secondo la tecnica che prende il nome di

DNS, (da *Direct Numerical Simulation*), è perfettamente in grado di descrivere a livello microscopico anche la più complicata delle correnti.

Ad esempio, è in grado di riprodurre compiutamente tutti i dettagli di una corrente turbolenta (e pertanto caratterizzata da una marcata tridimensionalità e non stazionarietà), anche in presenza di fenomeni termici, di reazioni chimiche, etc²⁵.

Tuttavia è estremamente utile analizzare come l'introduzione di successive ipotesi di *approssimazione spaziale, temporale e dinamica* consenta di ottenere modelli fisici di *validità e complessità decrescenti*, a partire da quello che presenta il massimo di complessità e di generalità (diagramma 2 di Figura 152).

Un primo passo nella semplificazione del modello fisico-matematico lo si può compiere se invece di voler approssimare la realtà fisica a livello delle scale microscopiche, si accetta di descriverla con livelli di accuratezza spaziale e temporale meno raffinati.

Il modello fisico-matematico che si ottiene è quello che prende il nome di *LES* (da *Large Eddy Simulation*).

Non è il caso di entrare ora nei dettagli di questa tecnica, ma si può facilmente intuire che l'aver ridotto così drasticamente i requisiti di risoluzione spaziale e temporale del problema porterà ad una altrettanto drastica riduzione del *costo* e del *tempo* necessari per effettuare un'eventuale simulazione numerica del fenomeno, a fronte di una perdita di informazioni che può ritenersi, nel caso in esame, del tutto accettabile, se non addirittura benefica.

Tuttavia, se ci limitassimo a risolvere le equazioni di Navier-Stokes semplicemente adottando una scarsa risoluzione spaziale e temporale, commetteremmo un gravissimo errore. Non si può negare che le considerazioni appena fatte siano sensate, ma nel nostro ragionamento abbiamo assunto implicitamente (e in modo del tutto ingiustificato) che, dal momento che certi dettagli del fenomeno *non ci interessano*, questi sono automaticamente *ininfluenti* per la sua evoluzione reale: quanto avviene a livello microscopico (il livello che abbiamo deciso di trascurare) può anche non interessare affatto a chi desidera effettuare un'analisi a livello macroscopico.

La perdita dei dettagli del moto turbolento a livello microscopico deve essere pertanto compensata, almeno *statisticamente*, da altre informazioni che devono essere reintrodotti nel modello fisico attraverso *modelli aggiuntivi*: i cosiddetti *modelli di turbolenza sottogriglia*, il cui nome indica appunto che è loro affidato il compito di riprodurre tutti gli effetti dinamici di quanto avviene alle scale del moto inferiori a quella della *griglia di discretizzazione*.

Il problema è concettualmente identico a quello che ha portato dal modello molecolare del gas a quello del continuo deformabile. Un modello che riproduca ogni dettaglio del moto molecolare di un gas è, non solo estremamente oneroso, ma anche spesso del tutto inutile dal punto di vista pratico, tuttavia quanto avviene a livello molecolare può essere trascurato soltanto a condizione che l'inevitabile perdita di informazione venga compensata dall'equazione di stato e da informazioni sulle proprietà fisiche *statistiche* del fluido.

In molti casi, si può rinunciare a conoscerne i dettagli, non solo a livello delle scale spaziali e temporali delle singole particelle fluide, ma addirittura anche a quello delle grandi strutture turbolente: in altre parole, può essere sufficiente descrivere quello che prende il nome di *moto medio* e apprezzarne l'evoluzione temporale mediando su intervalli di tempo di durata variabile tra qualche minuto e, al limite, l'intera durata del fenomeno.

Questo secondo livello di approssimazione porta al modello fisico-matematico delle *equazioni mediate di Reynolds*. Anche in questo caso, e in misura ancor maggiore che nel caso della LES, si ottiene un'enorme riduzione del *costo* e del *tempo* necessari per ottenere una simulazione numerica dell'intero fenomeno.

²⁵ Problemi complessi ottenuti dalla somma di diversi problemi di simulazione (diffusione, reazioni chimiche, campi dinamici, ...) sono detti *multifisici* e sono caratterizzati da un numero elevato di equazioni differenziali alle derivate parziali spesso anche fra loro correlate.

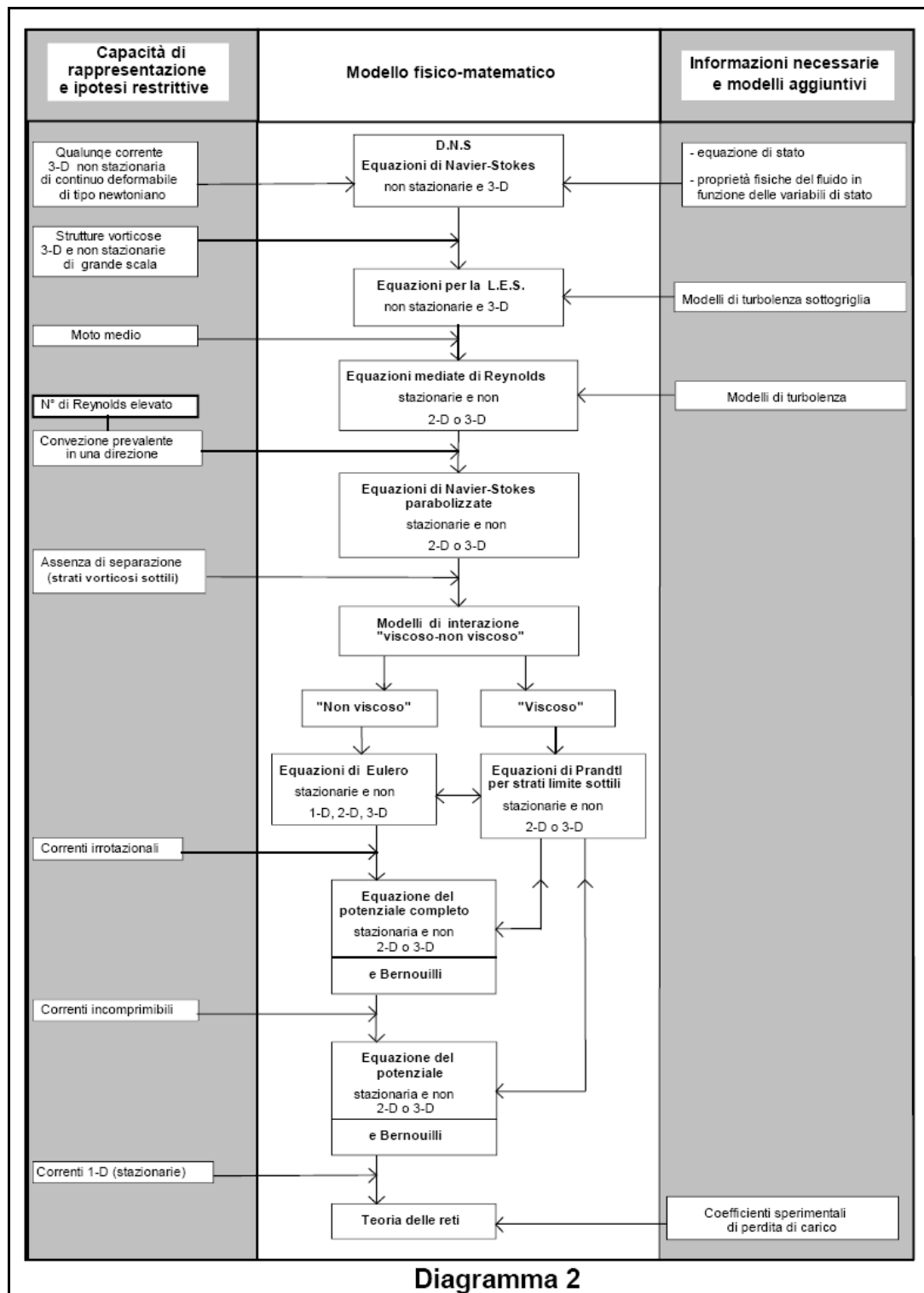


Figura 152: Applicazione delle ipotesi spaziali e temporali al modello CFD

Ci sono addirittura delle situazioni in cui il moto è *in media stazionario* il che rende del tutto superflua la sua discretizzazione temporale, oppure casi in cui *la corrente media* è bidimensionale, ovvero indipendente da una delle coordinate spaziali, nel qual caso la discretizzazione spaziale del problema potrebbe essere limitata al solo *piano del moto medio*.

Ovviamente il sistema delle equazioni mediate di Reynolds deve essere integrato con informazioni fornite da *modelli di turbolenza*. A differenza dei modelli sottogriglia della LES, ai *modelli di turbolenza per le equazioni mediate di Reynolds* è affidato il compito di riprodurre gli effetti dinamici *dell'intero*

spettro dei moti tridimensionali e non stazionari che caratterizzano la corrente turbolenta. Compito che li rende piuttosto complicati e scarsamente generali.

Ulteriori modelli semplificati sono derivabili a partire dal modello delle equazioni mediate di Reynolds, sulla base di successive *approssimazioni dinamiche*, la prima delle quali è quella di *numero di Reynolds elevato*. Il numero di Reynolds è uno dei parametri dinamici fondamentali ed esprime essenzialmente il peso relativo delle forze d'inerzia del fluido rispetto a quelle viscosi, nella particolare corrente in esame.

Un numero di Reynolds elevato significa quindi che, in un determinato fenomeno, gli effetti delle forze d'inerzia sono mediamente preponderanti (anche di vari ordini di grandezza) rispetto a quelli delle forze viscosi. Se è verificata la condizione che il numero di Reynolds della corrente è elevato, può talvolta verificarsi anche una seconda condizione.

Può succedere che all'interno di un moto che rimane pur sempre tridimensionale e non stazionario, la velocità media con cui viene trasportato il fluido abbia una componente decisamente prevalente rispetto alle altre e si può quindi identificare una direzione dello spazio, che prende il nome di *direzione del moto medio*, lungo la quale i fenomeni convettivi sono decisamente preponderanti rispetto a quelli diffusivi. In tali condizioni, si possono quindi ritenere trascurabili gli effetti della diffusione viscosa e turbolenta nella *sola direzione del moto medio* e si ottiene il modello fisico-matematico che prende il nome di *equazioni di N-S parabolizzate*.

Qualora, poi, verificate le ipotesi appena descritte, si verifichi anche che il *verso* della velocità nella direzione del moto medio è ovunque il medesimo, si può adottare una geniale approssimazione dinamica, dovuta a Prandtl. Egli intuì che, sotto opportune condizioni (la prima delle quali è un elevato numero di Reynolds, la seconda è l'assenza di controcorrenti), gli effetti dinamici diffusivi, associati alla presenza di vorticità, viscosità e turbolenza, possono essere confinati in regioni del dominio di moto di spessore estremamente limitato, che si sviluppano in corrispondenza delle pareti solide lambite dalla corrente e che prendono appunto il nome di *strati limite* o, meglio, di *strati vorticosi sottili*.

Da una lucida analisi del peso relativo delle forze in gioco, Prandtl dedusse che, non solo il *moto medio* all'interno di questi strati poteva essere descritto da forme semplificate delle equazioni di Navier-Stokes, che prendono appunto, come già visto in precedenza, il nome di *equazioni dello strato limite* (o *degli strati vorticosi sottili*), ma anche che, *all'esterno* di tali strati di corrente, gli *effetti della viscosità* del fluido potevano essere completamente trascurati.

Deduzione, quest'ultima, non meno importante della prima, dal momento che consente di ritenere che il campo di moto all'esterno degli strati limite sia determinabile prescindendo completamente dagli effetti della viscosità. Ne deriva che in una (gran) parte del dominio, il comportamento della corrente può essere descritto dalle *equazioni di Eulero*, un modello fisico-matematico che si ottiene a partire dalle equazioni di Navier-Stokes nell'ipotesi, appunto, di poter eliminare completamente gli effetti della viscosità nelle equazioni di bilancio per la quantità di moto e per l'energia. L'accoppiamento tra quelli che prendono, molto impropriamente, il nome di modello *viscoso* (le equazioni di Prandtl che governano il moto nelle regioni vorticosi sottili) e modello *non viscoso* (valido all'esterno di esse) avviene essenzialmente attraverso la variabile scalare pressione.

Altri modelli semplificati si possono ottenere a patto che sia verificata un'ulteriore *approssimazione dinamica* sul peso relativo tra le forze elastiche con cui il fluido, comprimendosi o espandendosi, reagisce alle variazioni della pressione e, ancora, le forze d'inerzia.

Se tale rapporto è piccolo, ovvero se il *numero di Mach* della corrente è tale da garantire l'assenza di onde d'urto, l'atto di moto nelle regioni esterne agli strati limite è *irrotazionale* e quindi descrivibile con un modello più semplice di quello di Eulero, ovvero con il modello del *potenziale completo*.

E se, al limite, si può ragionevolmente assumere che le pressioni in gioco siano tali da non alterare la densità del fluido, si può formulare l'ipotesi di completa *incomprimibilità*, che porta a descriverne il moto con una semplice equazione di Laplace per il *potenziale cinetico*.

Nei casi in cui l'atto di moto all'esterno degli strati limite sia irrotazionale, il campo della pressione, che descrive compiutamente lo stato di sforzo nella corrente (essendo ivi nulli gli effetti della viscosità) può ottenersi semplicemente con l'equazione di *Bernoulli*, a partire dal campo di velocità fornito dalle equazioni del potenziale.

Si è già accennato al fatto che, anche in una corrente turbolenta, le variabili fluidodinamiche medie possono presentare talvolta gradienti nulli lungo una direzione dello spazio.

E' evidente che, in questi casi, è sufficiente fornire una descrizione nel solo piano normale alla direzione di uniformità (il cosiddetto *piano del moto medio*).

Qualora le direzioni di uniformità fossero due, anziché una, la *corrente media* potrebbe essere ovviamente descritta con un modello *monodimensionale*. Una situazione del genere non si presenta mai nel mondo reale, ma esistono effettivamente correnti, stazionarie e non, nelle quali i gradienti di alcune grandezze fluidodinamiche sono relativamente piccoli in una gran parte del campo di moto.

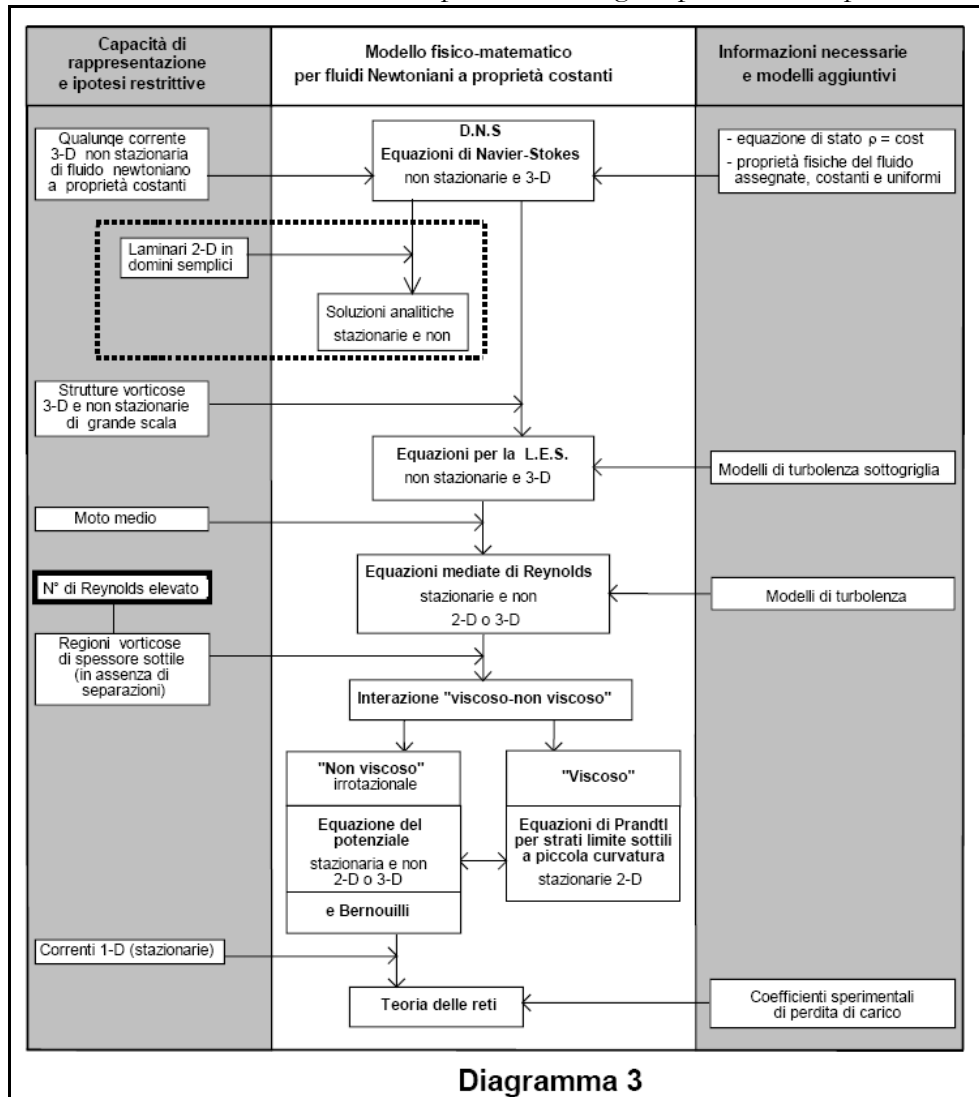


Figura 153: Gerarchia dei modelli di simulazione

E' questo il caso di alcune correnti interne a condotti che presentano un'estensione longitudinale assai maggiore di quella trasversale: se si escludono le regioni (magari sottili) adiacenti alle pareti solide e quelle in cui si verificano variazioni brusche della direzione o del modulo della velocità media, velocità e pressione si mantengono praticamente uniformi in ciascuna sezione del condotto e presentano gradienti significativi soltanto nella direzione del moto medio, il quale può pertanto essere descritto con una forma monodimensionale delle equazioni di Eulero, se il fluido è comprimibile, oppure da forme monodimensionali dell'equazione di continuità e della quantità di moto, nel caso di fluidi a proprietà costanti.

Nel caso di correnti stazionarie di fluidi a proprietà costanti, il modello che si deriva dall'ipotesi di monodimensionalità prende il nome di *teoria delle reti*.

E' chiaro però che un modello di questo genere è utilizzabile solo se accoppiato a *modelli aggiuntivi* che siano in grado di tenere conto di tutti quegli effetti tridimensionali che, sebbene abbiano luogo in

regioni effettivamente limitate del campo di moto, non per questo devono avere conseguenze trascurabili.

Queste informazioni aggiuntive sono generalmente costituite da coefficienti e correlazioni di origine sperimentale, che prendono il nome di *coefficienti di perdita di carico*.

Si conclude osservando che la gerarchia di modelli fisico-matematici fin qui esaminata è rappresentativa della quasi totalità dei problemi della fluidodinamica classica. La parte iniziale di questa trattazione verrà dedicata, con particolare attenzione, alla formulazione del modello generale delle *equazioni di Navier-Stokes*. Successivamente si esamineranno i problemi relativi alla loro integrazione numerica diretta (DNS), si accennerà alle equazioni per la LES ed infine a quelle mediate di Reynolds.

Per queste ultime si affronterà il “*problema della chiusura*”, già introdotto nei capitoli precedenti, prestando in particolar modo attenzione al modello a due equazioni differenziali (K-ε), il quale è stato più volte applicato nelle simulazioni fluidodinamiche. La gerarchia dei metodi di modellazione in funzione dell'applicazione considerata è riportata nel diagramma 3 di Figura 153:

10.3 MODELLO AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER LA VISCOSITÀ TURBOLENTA

Per superare alcuni dei limiti dei modelli algebrici di viscosità turbolenta, sono stati sviluppati i *modelli differenziali* che, in generale, prevedono la scrittura e l'integrazione di una o più equazioni differenziali che descrivono, o direttamente la dinamica del tensore degli sforzi di Reynolds, oppure la dinamica di una o più grandezze scalari correlate con la viscosità cinematica turbolenta introdotta da Boussinesq.

Il vantaggio è che le equazioni differenziali di trasporto per queste grandezze consentono, in ogni caso, di valutare la viscosità turbolenta tenendo conto della effettiva storia della corrente. Quando il modello prevede la soluzione di un'unica equazione differenziale (si parla di modelli di ordine uno), la viscosità turbolenta è generalmente correlata ad un'equazione di bilancio per *l'energia cinetica turbolenta*. Fu lo stesso Prandtl che, vent'anni dopo i suoi lavori sulla mixing length, e sfruttando un'intuizione di Kolmogorov, aprì la via ai *modelli differenziali* di turbolenza, formulandone uno basato su di un'equazione di bilancio per la grandezza scalare *energia cinetica turbolenta media specifica* \bar{K} , che si indicherà nel seguito semplicemente con il termine di *energia cinetica turbolenta*, e che è definita come:

$$\bar{K} = \frac{1}{2} (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) \quad [167]$$

Nel nuovo modello differenziale, Prandtl conserva il principio che la viscosità cinematica turbolenta sia esprimibile attraverso il prodotto di una velocità turbolenta $\nu_{(t)}$ e di una lunghezza di mescolamento ma lascia cadere la relazione $\nu_{(t)} = l_m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$.

Invece di esprimere la velocità turbolenta attraverso il prodotto del gradiente della velocità media per la lunghezza di mescolamento, assume che tale *velocità di agitazione* sia direttamente proporzionale alla radice quadrata dell'*energia cinetica turbolenta* K :

$$\nu_{(t)} \propto \sqrt{2\bar{K}} \quad [168]$$

Sotto tali ipotesi, quindi, la relazione:

$$\nu_{(t)} = \nu_{(t)} l_m \quad [169]$$

diventa:

$$\boxed{\nu_{(t)} = l \sqrt{\bar{K}}} \quad [170]$$

dove, in luogo di $l_m \sqrt{2}$ si è indicata la lunghezza l che, anche nei modelli ad una equazione differenziale, continua ad essere calcolata con formule opportune, esattamente come avveniva nel

modello algebrico di Prandtl per la lunghezza di mescolamento l_m . In questo tipo di modello, dunque, si mantiene il concetto di viscosità turbolenta, ma nella sua espressione non compaiono più termini legati al gradiente della velocità media, bensì termini contenenti l'energia cinetica turbolenta K , la quale può essere calcolata, in modo del tutto generale, in ogni istante ed in ogni punto del campo di moto, sulla base di un'equazione differenziale di trasporto che si deriva con un procedimento concettualmente semplice, ma piuttosto laborioso.

Di fatto, si tratta di:

- a) moltiplicare l'i-esima componente dell'equazione di bilancio per la quantità di moto, relativa alla velocità istantanea $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, per la componente i-esima u'_i della velocità fluttuante;
- b) sommare le tre equazioni così ottenute e
- c) mediare nel tempo l'equazione risultante.

Ciò che si ottiene è la seguente equazione di bilancio per l'energia cinetica turbolenta media K , per unità di massa:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j}}_{\text{Variaz tot di K}} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{Produzione}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underbrace{\nu \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j}}_{\text{diff.molecolare}} - \underbrace{\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_j u'_i u'_j}}_{\text{trasporto turb}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j}}_{\text{diff. press}} \right)}_{\text{diff. press}} - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{dissipazione}} \quad [171]$$

Il primo membro dell'equazione di bilancio [171] rappresenta, come di consueto, la *variazioni totale* di K , e cioè la somma delle derivate temporale e convettiva. Tutti i termini hanno le dimensioni di $[m^2 \cdot s^{-3}]$, ovvero di un'energia per unità di tempo e per unità di massa, e cioè di una potenza per unità di massa. Il primo termine al secondo membro indica la produzione per unità di massa e di tempo (si tratta quindi di una velocità di produzione) di energia cinetica turbolenta operata dal tensore degli sforzi di Reynolds e viene generalmente denotato con P_K , il secondo, la velocità di diffusione molecolare di energia cinetica turbolenta, il terzo, la velocità di trasporto di K da parte delle fluttuazioni della velocità, il quarto, la velocità di diffusione di K per opera delle fluttuazioni della pressione, il quinto, infine, la velocità di dissipazione, che si indica con ε_K .

Poi si può osservare che una parte del termine di *produzione* di K è esattamente lo sforzo di Reynolds. Pertanto, in base alla sua definizione

$$S^{(t)}_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$$

all'ipotesi di Boussinesq

$$-S^{(t)}_{ij} = \nu_{(t)} 2\bar{e}_{ij}$$

questo termine può essere riscritto come:

$$-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \nu_{(t)} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad [172]$$

Se si esclude il termine di *diffusione molecolare*, che coinvolge la variabile K e la viscosità molecolare, che è nota, tutti gli altri termini dell'equazione [172] contengono prodotti, o correlazioni, tra fluttuazioni della velocità e della pressione e devono essere, pertanto, modellati.

Il termine più critico, da questo punto di vista, è quello di diffusione di K per fluttuazione della pressione che, fortunatamente, è sufficientemente piccolo da poter essere o trascurato oppure modellato insieme al termine di trasporto turbolento di K , assumendo che:

$$\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_j u'_i u'_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} = -\frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j} \quad [173]$$

dove σ_K è un coefficiente empirico, che prende il nome di *numero di Prandtl* per la diffusione turbolenta.

Per quanto concerne invece il termine di dissipazione di energia cinetica turbolenta, l'analisi dimensionale, nelle ipotesi di Kolmogorov, suggerisce di esprimerlo in funzione di K e di una lunghezza, che è quella di mescolamento l , secondo la relazione:

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = C_D \frac{\bar{K}^{3/2}}{l} \quad [174]$$

dove C_D è un parametro che deve essere assegnato, di volta in volta, in funzione del tipo di corrente.

In conformità a queste ipotesi, l'equazione [174] diventa dunque:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j}}_{\text{Variaz tot di K}} = \underbrace{\nu_{(t)} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2}_{\text{Produzione}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j} \right)}_{\text{diffusione e trasporto}} - \underbrace{C_D \frac{\bar{K}^{3/2}}{l}}_{\text{dissipazione}} \quad [175]$$

La [175] contiene ora solo grandezze medie e può essere finalmente integrata e fornire, istante per istante, la distribuzione spaziale di K , purché si sia in grado di assegnare condizioni iniziali ed al contorno anche per questa nuova variabile media. Per quanto concerne la superficie di contorno all'ingresso del dominio di calcolo (quella che, in generale, prende il nome di sezione di inflow) è necessario assegnare la distribuzione di K , mentre, sulle eventuali pareti solide, si impone, ovviamente, la condizione di $K = 0$.

A titolo di esempio, vediamo di riscrivere e di discutere l'equazione per K nel caso particolare di *strato limite turbolento sottile* non separato, con moto medio bidimensionale. Negli strati limite sottili, come vedremo più avanti, la componente della velocità normale alla parete, che indichiamo con v , è generalmente piccola rispetto alla componente parallela, u . Inoltre, il gradiente della velocità in direzione parallela alla parete, che indichiamo con x , è piccolo rispetto a quello in direzione normale, y . Nelle ipotesi di strato limite sottile, quindi, la [175] può essere riscritta nella forma:

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{K}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{K}}{\partial y} = \nu_{(t)} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \bar{K}}{\partial y} \right) - C_D \frac{\bar{K}^{3/2}}{l}$$

dove C_D è una costante che ha valori dell'ordine di $0.07 \div 0.09$, mentre il numero di Prandtl assume valore pari all'unità. Nel caso degli strati limite sottili, il modello che consente di determinare la viscosità cinematica turbolenta isotropa $\nu(t)$ in base all'equazione di bilancio per l'energia cinetica turbolenta media K per unità di massa può quindi essere riassunto nella forma seguente:

$$\nu_{(t)} = l \sqrt{\bar{K}}$$

$$\frac{D\bar{K}}{Dt} = \nu_{(t)} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \bar{K}}{\partial y} \right) - C_D \frac{\bar{K}^{3/2}}{l} \quad [176]$$

$$C_D = 0.07 \div 0.09; \quad \sigma_K = 1.0$$

In base alle [176] è quindi ancora necessario prescrivere un'opportuna distribuzione della lunghezza l in funzione della coordinata y , che può essere anche di tipo algebrico. La legge di variazione di l naturalmente dipende dal tipo di corrente considerata.

Nel caso di correnti turbolente di parete è usuale assumere $l = c_1 x_n$, dove x_n è la distanza dalla parete, ed il coefficiente c_1 ha un valore intorno a 0.41. Nel caso di correnti turbolente libere, invece, si

può assumere che $l = c\delta$, dove δ è lo spessore locale dello strato vorticoso ed il coefficiente c è compreso tra 0.4 ed 1.0.

A differenza di quelli algebrici, questo modello, grazie all'equazione di trasporto per l'energia cinetica turbolenta media, è in grado di tenere conto della storia della corrente. Il risultato è che, pur con un costo computazionale piuttosto modesto, si possono ottenere indicazioni relativamente affidabili anche, ad esempio, in strati limite che si sviluppano o si rilassano.

D'altro lato, esiste ancora almeno una limitazione piuttosto pesante: non solo non esiste (esattamente come nei modelli tipo *mixing length*) un'espressione di validità generale per la scala di lunghezze l , ma non possono essere rappresentati nemmeno gli effetti di trasporto di tale scala, che sono invece assai importanti in tutte le correnti separate.

10.4 MODELLO A DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI (K-ε)

Anche i modelli ad un'equazione (tutti ricavati secondo lo schema di calcolo esposto nei precedenti capitoli per la convezione termica), pur presentando indubbi vantaggi rispetto ai modelli algebrici del tipo *mixing length* soffrono di alcune limitazioni, la più gravosa delle quali consiste nel fatto che i risultati dipendono ancora da una imposizione a priori della scala di lunghezza l .

Invece di prescrivere l a priori, così come \bar{K} è ottenuta da un'equazione di trasporto, si può quindi utilizzare una seconda equazione di trasporto per la lunghezza l , oppure per una qualsiasi variabile che sia correlata contemporaneamente, sia all'equazione per \bar{K} , che è relativamente semplice da trattare e che sembra dunque sensato continuare a risolvere, sia alla lunghezza l . In altri termini, si tratta di definire finire una qualunque variabile del tipo $\bar{K}^a l^b$, e di scriverne l'equazione esatta di trasporto, mediante *manipolazione* delle equazioni di Navier e Stokes. E' evidente che l'equazione risultante conterrà in ogni caso numerosi prodotti di grandezze turbolente che richiederanno, come nel caso dell'equazione per \bar{K} il ricorso alla modellazione. Tra le possibili variabili del tipo $\bar{K}^a l^b$, sono comunemente usate: $\sqrt{\bar{K}}l$ (frequenza turbolenta), $\bar{K}l^2$ (vorticità turbolenta) e $\bar{K}^{3/2}l$ (velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta).

A titolo di esempio, vediamo come si può scrivere un'equazione di bilancio per la variabile *velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta specifica* $\varepsilon = \bar{K}^{3/2}l$ una grandezza scalare che già compare nell'equazione per \bar{K} , e che consente di calcolare molto semplicemente l , una volta nota \bar{K} , attraverso il rapporto:

$$l = \frac{\bar{K}^{3/2}}{\varepsilon} \quad [177]$$

La scelta di ε presenta, rispetto alle altre possibili, il vantaggio di non richiedere termini correttivi in vicinanza di pareti, dal momento che \bar{K} si annulla automaticamente all'annullarsi della velocità a parete, mentre ε si mantiene finita. L'equazione per ε si può scrivere evidenziando, al solito, i termini di produzione, diffusione e distruzione, che hanno le dimensioni di $[m^2 \cdot s^{-4}]$, ovvero di una potenza per unità di tempo e per unità di massa:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_\varepsilon + d_\varepsilon - distr_\varepsilon \quad [178]$$

Il trasporto di ε , e cioè il trasporto di velocità di dissipazione, viene ovviamente calcolato in modo esatto, mentre restano da modellare i termini di produzione di ε , P_ε , di diffusione d_ε e di distruzione $distr_\varepsilon$, esattamente come avveniva per l'equazione di bilancio per \bar{K} . Vediamo, in estrema sintesi, come si possono modellare questi termini, e cioè esprimerli in funzione di grandezze medie.

In generale, la produzione di ε deve bilanciare la produzione di K e, al fine di evitare la crescita illimitata di quest'ultima, si può assumere che:

$$P_{\varepsilon} \propto \frac{\varepsilon}{K} P_K \quad [179]$$

dove il fattore di proporzionalità $\frac{\varepsilon}{K}$ è l'inverso di una scala di tempo, coerentemente con il fatto che la produzione di ε è, di fatto, la *velocità* di distruzione di K .

Pertanto, introducendo il fattore di proporzionalità $c_{\varepsilon 1}$ e riprendendo il termine P_K dalla [179] si scrive l'uguaglianza:

$$P_{\varepsilon} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \nu_{(t)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad [180]$$

Per la diffusione di ε , ancora in analogia con quanto si è fatto per la diffusione di K , si assume che essa sia funzione delle viscosità molecolare e turbolenta e del gradiente di ε , secondo una relazione del tipo:

$$d_{\varepsilon} \propto \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad [181]$$

dove σ_{ε} è un coefficiente del tutto analogo al numero di Prandtl σ_K . Infine, il termine di distruzione di ε deve tendere all'infinito quando K tende a zero per evitare che K possa assumere valori negativi. Questo porta a scrivere:

$$distr_{\varepsilon} \propto \frac{\varepsilon}{K} \varepsilon \quad [182]$$

cioè, introducendo un ulteriore fattore di proporzionalità:

$$distr_{\varepsilon} = c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad [183]$$

L'equazione può quindi scriversi come:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \nu_{(t)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad [184]$$

A questo punto, anche l'equazione di trasporto per ε può essere integrata insieme alle equazioni mediate di Reynolds e all'equazione di bilancio per K , ma richiede anch'essa condizioni iniziali e al contorno per ε , nonché di determinare i valori di alcuni parametri che compaiono nell'espressione dei termini a secondo membro.

Questi valori vengono definiti attraverso un processo di "*calibrazione*" del modello, a partire da quelli, relativi a quella che prende il nome di formulazione standard del modello K - ε , riportati nel seguito.

Assunzioni base: $\nu_{(t)} = l\sqrt{\overline{K}} \quad l = \frac{\overline{K}^{3/2}}{\varepsilon}$

Viscosità cinematica turbolenta: $\nu_{(t)} = c_\mu \frac{\overline{K}^2}{\varepsilon}$

Equazione per K: $\frac{D\overline{K}}{Dt} = \nu_{(t)} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial y} \right) - C_D \frac{\overline{K}^{3/2}}{l}$

Equazione per ε : $\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\overline{K}} \nu_{(t)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{\overline{K}}$

Parametri:	C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_K	σ_ε
	0.09	1.1256	1.92	1.0	1.3

I modelli del tipo K- ε rappresentano, almeno dal punto di vista concettuale, un indubbio miglioramento rispetto a quelli ad una sola equazione differenziale: la viscosità turbolenta viene finalmente calcolata sulla base di una velocità turbolenta e di una scala di lunghezze le cui distribuzioni spaziali non sono più assegnate a priori, bensì entrambe calcolate con equazioni di trasporto che tengono conto della storia dell'accelerazione. Anche questi modelli, tuttavia, presentano ancora dei punti deboli: come tutti i modelli per le equazioni mediate di Reynolds, mancano di universalità, il che si traduce nella necessità di adattare caso per caso, le varie "costanti" del modello.

Inoltre, richiedono inevitabilmente distribuzioni iniziali e valori al contorno per K e per ε , che non è sempre facile assegnare in modo rigoroso. Per cercare di superare questi limiti si sono sviluppati anche modelli che prevedono l'integrazione di un'equazione di trasporto per ciascuna delle componenti del tensore degli sforzi di Reynolds (ovviamente sempre in termini di variabili medie). Anche questi ultimi, peraltro, continuano a rimanere poco generali. Bisogna inoltre considerare che, all'aumentare del numero delle equazioni differenziali che va ad aggiungersi alle equazioni mediate di Reynolds, il lavoro di calibrazione dei vari parametri diventa sempre più complicato e l'impegno di calcolo rischia di diventare quasi confrontabile con quello richiesto da altri metodi, quali la *Large Eddy Simulation*.

10.5 FONDAMENTI DELLA "LARGE EDDY SIMULATION (LES)"

L'approccio della *Large Eddy Simulation* (LES), ovvero della discretizzazione spaziale e temporale del moto medio e delle sole strutture turbolente di scala relativamente grande, si situa, sia per dettaglio dei risultati forniti, sia per impegno di risorse di calcolo, in una posizione intermedia fra la soluzione delle equazioni mediate di Reynolds e la soluzione diretta delle equazioni di Navier e Stokes.

L'esposizione rigorosa di questa tecnica richiede il ricorso ad integrali e a trasformate di Fourier delle variabili fluidodinamiche.

Tuttavia, se ci si limita ai soli aspetti fondamentali, è sufficiente richiamare alcuni concetti generali sulla turbolenza quali, ad esempio, la cascata energetica, le scale spazio-temporali ecc. In particolare, si deve ricordare che, all'interno dello spettro d'energia delle varie scale turbolente è possibile riconoscere la funzione energetica di strutture vorticosi che possono essere approssimativamente raggruppate nelle tre bande dimensionali, o scale denominate, rispettivamente:

- - banda energetica (o energy-containing range), contenente le strutture vorticosi turbolente di grande scala,
 - - banda inerziale (*inertial range* o *subrange*), che comprende i vortici di dimensione media,
 - - banda dissipativa (*dissipation range*), relativa alle strutture vorticosi di piccola scala.
- significato più chiaro ai termini "grande" e "piccolo", riferiti alle dimensioni dei vortici.

Su tali basi, possiamo infatti affermare che le strutture vorticosi di scala maggiore (i grandi vortici):

- - hanno natura convettiva e numeri di Reynolds caratteristici relativamente elevati (tanto che, per instabilità, sono in grado di produrre vortici di dimensioni più ridotte),
- - hanno una scala temporale paragonabile a quella del moto medio,
- - hanno origine e tipologia fortemente dipendenti dal moto medio, ovvero dal tipo e dalla geometria del dominio di moto (o, in altre parole, dal tipo di corrente),
- - estraggono energia cinetica dal moto medio per produrre energia cinetica turbolenta,
- - hanno forma e dimensione poco dipendenti dal numero di Re della corrente media,
- - sono generalmente anisotrope.

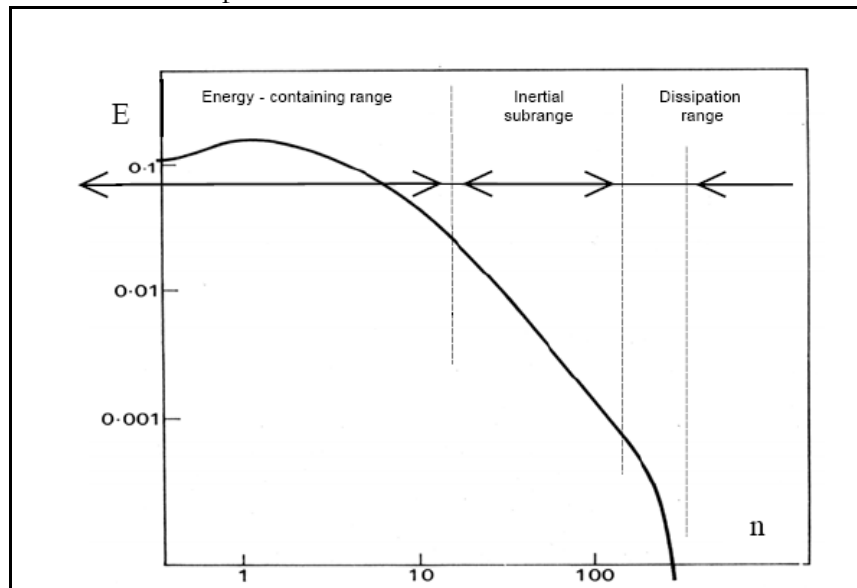


Figura 154: Le tre bande caratteristiche dello spettro d'energia della turbolenza: scale energetiche, inerziali e dissipative

Le strutture turbolente di dimensioni intermedie:

- - sono generate dall'instabilità non lineare delle grandi strutture,
- - sono anch'esse instabili, in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds ancora relativamente elevati,
- - hanno essenzialmente la funzione di trasferire ai vortici piccoli l'energia cinetica turbolenta prodotta, e ricevuta, da quelli grandi;

I vortici più piccoli:

- - nascono da interazioni non lineari fra quelli grandi e quelli intermedi,
- - sono stabili, in quanto caratterizzati da numeri di Re bassi (dell'ordine dell'unità),
- - hanno natura dissipativa e convertono in calore, attraverso la viscosità, l'energia cinetica turbolenta loro trasmessa dai vortici intermedi,
- - hanno vita media molto più breve degli altri vortici e decadono con legge esponenziale,
- - hanno tempi caratteristici molto brevi e di conseguenza, come si è già detto, una dinamica praticamente indipendente da quella dei grandi vortici e del moto medio,
- - hanno dimensioni relative rispetto a quelle dei grandi vortici che dipendono quasi esclusivamente dal numero di Re della corrente,
- - hanno una struttura più universale (ovvero indipendente dal tipo di corrente) e relativamente isotropa.

E' da queste considerazioni che nascono le idee fondamentali della *Large Eddy Simulation*, che possono essere riassunte in:

- 1) i vortici *grandi e medi* devono essere necessariamente (e quindi vengono) *risolti* esplicitamente, come in una DNS,
- 2) soltanto i vortici *piccoli* si prestano ad essere (e quindi vengono) *modellati*.

Mentre con l'approccio delle equazioni mediate di Reynolds non si distingue fra strutture grandi e piccole, e si è costretti ad usare modelli che devono quindi simulare gli effetti della totalità dello spettro delle dimensioni spaziali delle strutture turbolente, e che pertanto non avranno mai il requisito dell'universalità, con la LES si può sperare che, ricorrendo alla modellazione dei *soli* vortici piccoli (quelli grandi sono, infatti, risolti direttamente), questo possa essere al contempo non eccessivamente complicato e sufficientemente universale, dal momento che più universali sono le proprietà dei vortici che richiedono la modellazione.

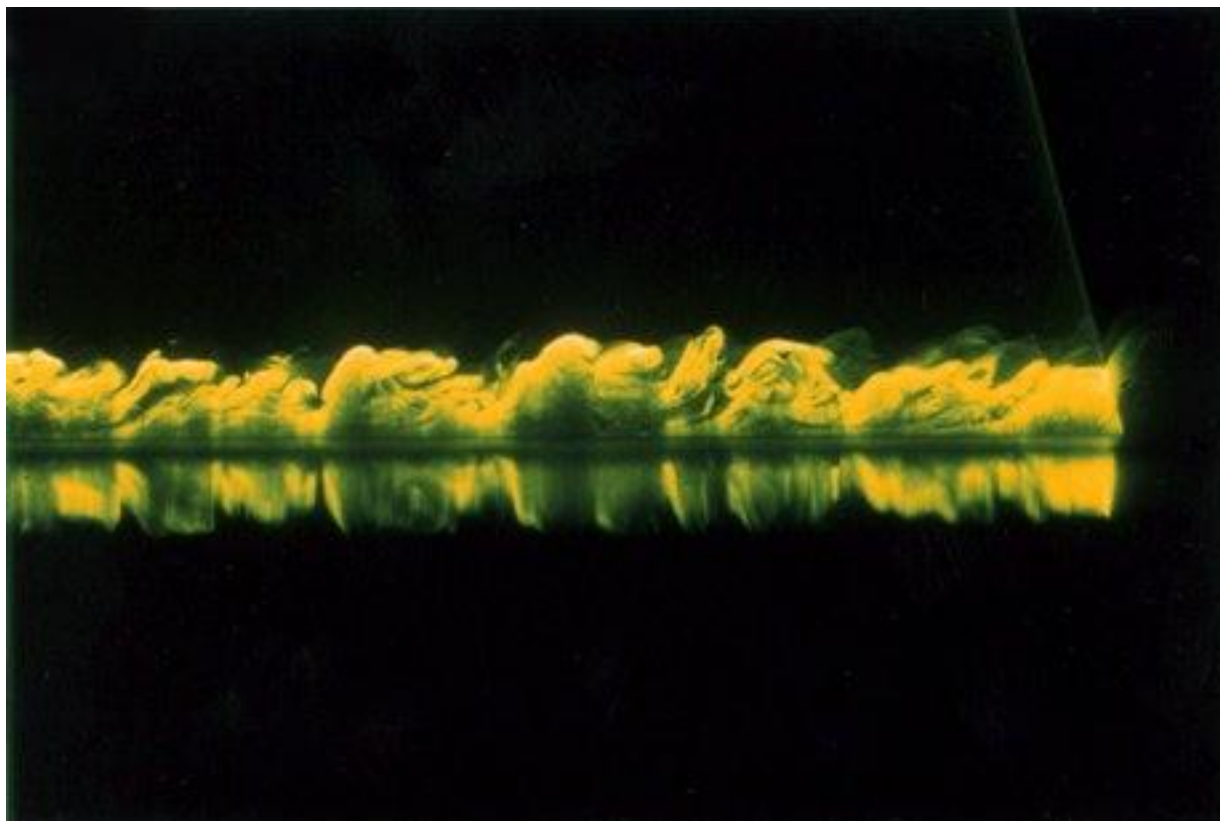


Figura 155: Strato limite turbolento in Large Eddy Simulation

E anche l'isotropia, implicita nel concetto dello *scalare* viscosità turbolenta, è più ragionevolmente ipotizzabile nel caso dei vortici di piccola scala. La LES quindi, seppure meno accurata, è però molto meno costosa della DNS, soprattutto se i numeri di Reynolds in gioco sono elevati e, per quanto concerne le informazioni più significative, ovvero quelle relative al moto medio e alle strutture convettive di grande scala, è praticamente altrettanto affidabile, in quanto questi sono calcolati esplicitamente.

Il processo di derivazione delle equazioni della LES, a partire da quelle di Navier- Stokes, è analogo a quello utilizzato nell'approccio delle equazioni mediate di Reynolds, salvo che, in questo caso, sono completamente diversi il concetto e la definizione dell'operatore di media. Per le equazioni mediate di Reynolds si è eseguita un'operazione di media, o di *filtraggio temporale* delle variabili istantanee, al fine di separare la parte discretizzata e *risolta* direttamente con le equazioni del moto medio, da quella fluttuante, che veniva *modellata*.

Qui, al contrario, alle medesime variabili si applica un *filtraggio spaziale*, per separare la parte spaziale discretizzata e *risolta* direttamente, dalla parte spaziale, che viene ancora modellata.

L'operazione di filtraggio più intuitiva (sebbene non definibile in modo molto rigoroso dal punto di vista matematico) è quella implicitamente operata dal "volumetto di controllo", ovvero dal volume racchiuso da ciascun elemento o cella della discretizzazione spaziale.

Nel caso della LES, si adottano dimensioni delle celle che non sono sufficientemente piccole da permettere di descrivere in dettaglio la dinamica di *tutte* le strutture turbolente (altrimenti si ricadrebbe, evidentemente, nei medesimi problemi della DNS) e, pertanto, le strutture di scala minore vengono parzialmente o completamente *filtrate* dalla soluzione.

E, così come avveniva per le fluttuazioni temporali nelle equazioni mediate di Reynolds, gli effetti delle strutture spaziali *non risolte* vengono reintrodotti nel modello fisico-matematico attraverso relazioni (o modelli) aggiuntivi. Nella LES, le equazioni per la quantità di moto (da integrarsi ovviamente a sistema con l'equazione di continuità, anch'essa filtrata) sono del tipo:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{u}_i' \bar{u}_j' \right] + f_i \quad [185]$$

Equazione in cui, nel caso qui esaminato di fluidi a proprietà uniformi e costanti, il termine "viscoso" può anche essere riscritto nella forma, del tutto equivalente, seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

Le [185], pertanto, sono formalmente identiche alle equazioni mediate di Reynolds, salvo che la barretta orizzontale qui indica la componente direttamente *risolta*, e cioè residua dopo l'operazione di filtraggio spaziale, mentre l'apice indica la componente filtrata, non risolta, o "sottogriglia".

Nel caso della LES, tuttavia, il tensore di componenti $\bar{u}_i' \bar{u}_j'$, che ha il significato di "sforzo sottogriglia specifico", richiede evidentemente modelli diversi da quelli impiegati per modellare il tensore degli sforzi di Reynolds.

Inoltre si deve ricordare che, mentre nelle equazioni mediate nel tempo, i termini contenenti le derivate temporali delle grandezze medie erano presenti soltanto nel caso di moto medio non stazionario, qui sono sempre presenti: infatti, anche se il moto medio è stazionario, le strutture turbolente grandi e quelle intermedie, che devono essere risolte direttamente, sono, in ogni caso, non stazionarie.

E allo stesso modo, anche nel caso di correnti medie bidimensionali, le equazioni della LES (al contrario di quelle mediate di Reynolds) vanno sempre risolte in tre dimensioni, dal momento che non esiste struttura turbolenta che non possieda la caratteristica della tridimensionalità.

10.6 ESEMPIO: SIMULAZIONE DI UNO SWIRLER

La simulazione del bruciatore in questione è stata effettuata tramite il programma di calcolo ad elementi finiti "FEMLAB²⁶", prodotto e distribuito dalla software house svedese COMSOL®. Il programma di calcolo possiede un "model navigator" dotato al suo interno di una serie di moduli applicabili per analisi di vario tipo, dalla fluidodinamica alla meccanica strutturale.

All'interno di ognuno di questi sono a loro volta presenti dei sottomoduli contenenti gli algoritmi di risoluzione delle equazioni differenziali tipiche del problema che s'intende analizzare.

Seguendo la logica di soluzione del programma di calcolo utilizzato, l'analisi e la modellazione del problema affrontato sono state realizzate seguendo una successione di procedure, partendo dalla realizzazione della geometria fino ad arrivare al plottaggio e al post-processamento dei risultati.

Le diverse fasi sono analizzate in dettaglio nei successivi paragrafi e costituiscono i passi necessari per sviluppo di un generico modello di calcolo numerico, a prescindere dal software utilizzato.

²⁶ Il CAD FEMLAB® ora prende il nome di COMSOL MULTIPHYSICS®

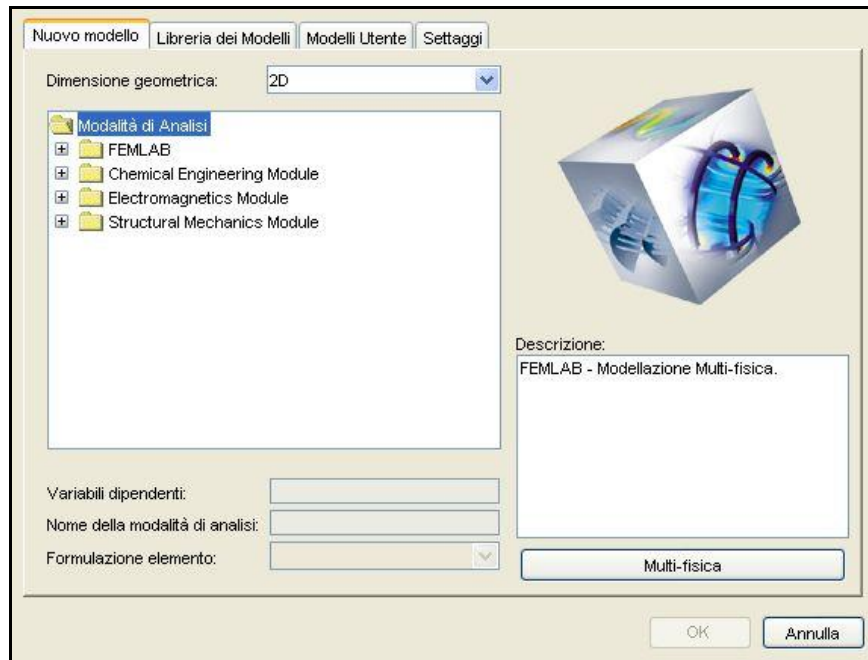


Figura 156: Finestra iniziale FEMLAB

10.7 COSTRUZIONE DELLA GEOMETRIA

Il primo passo inevitabile per la realizzazione del modello risiede nella costruzione della geometria del sistema. In particolare ai fini del calcolo non è stato necessario considerare il sistema per la sua lunghezza effettiva, ma, ai fini di un più scrupoloso utilizzo delle risorse di memoria, si è analizzata la sezione finale del bruciatore più o meno a ridosso della zona in cui è presente lo swirler. Il programma di calcolo è dotato di un'interfaccia CAD per la costruzione delle geometrie.

Tuttavia questa si è dimostrata inadeguata ai fini della realizzazione dello swirler il quale presenta una geometria troppo complessa per essere eseguita con le primitive messe a disposizione dal software.

Per la costruzione della geometria completa si è allora proceduto separatamente. Come prima cosa è stato modellato lo swirler, utilizzando un CAD adeguato (*Solid Works®*), la cui immagine è riportata in Figura 157.

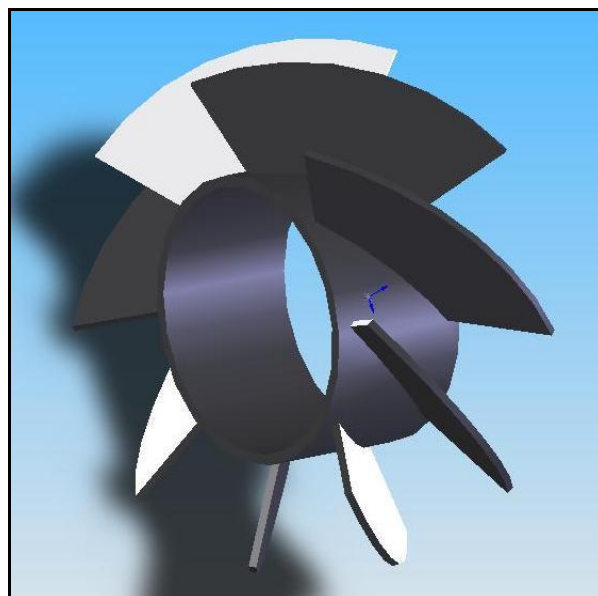


Figura 157: Modellazione geometrica dello swirler

Successivamente il file IGES²⁷ relativo allo swirler è stato importato all'interno dell'interfaccia grafica del software e su di esso è stata completata la geometria complessiva.

Questa è suddivisa in due zone: il primo tratto, sul quale è stato inserito lo swirler, è caratterizzato da due cilindri concentrici che rappresentano il condotto del bruciatore entro cui fluisce il comburente.

Il secondo tratto, caratterizzato da un cilindro pieno, rappresenta un volume di controllo entro il quale si può analizzare il campo di moto del fluido in uscita dal bruciatore, e che simula una porzione del reattore.

La geometria completa è riportata in Figura 158.

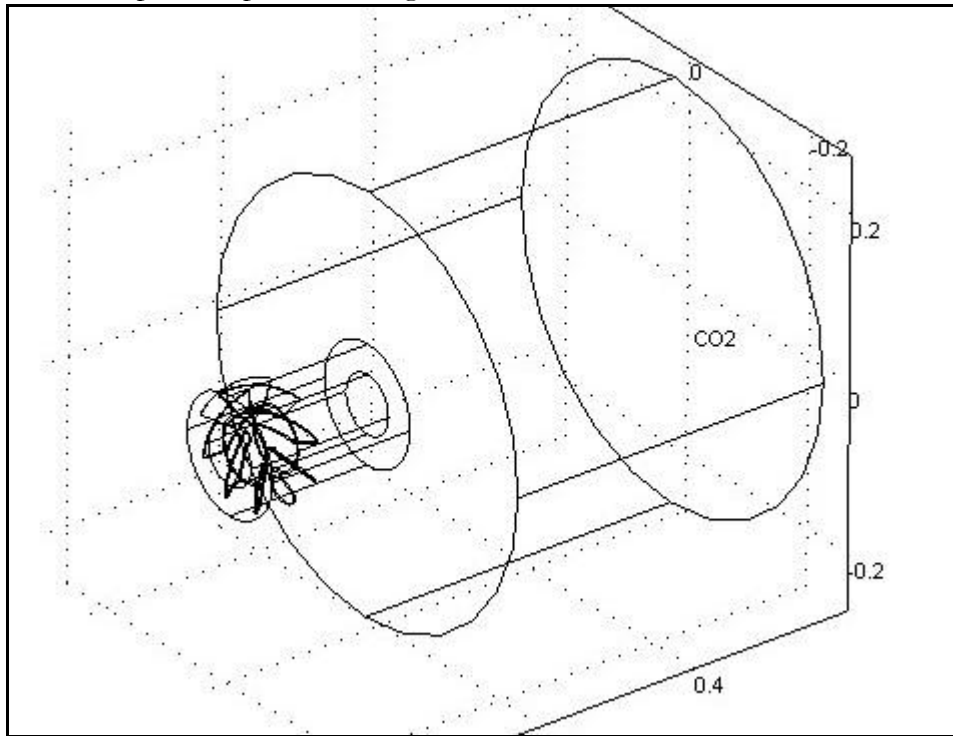


Figura 158: Geometria completa del sistema studiato

10.8 EQUAZIONI DEL MODELLO, SOTTODOMINI E CONDIZIONI AL CONTORNO

Il passo successivo alla costruzione del modello geometrico, è stato scegliere il sistema di equazioni differenziali che meglio approssima il comportamento del sistema nelle sue condizioni di funzionamento, imponendo i giusti parametri sia per quanto riguarda il sottodominio sia per quanto riguarda le condizioni al contorno.

In base alle rilevazioni sperimentali portate a termine sul bruciatore, le condizioni operative sono risultate le seguenti:

- Il fluido, ovvero il comburente, entra dalla sezione iniziale con una velocità di circa 20 m/s, in accordo con la portata di progetto;
- La densità del fluido è stata approssimata ad un valore di circa 1 Kg/m³, in funzione della temperatura e di una media pesata effettuata sulle densità dei componenti facenti parte della miscela gas-ossigeno (che caratterizza il comburente in esame);
- La viscosità cinematica è stata fissata sul valore di 1*10⁻⁵ m²/s in accordo con i valori tipici riportati in letteratura;
- La pressione all'interno del volume di controllo, assimilabile ad una porzione del reattore, è stata fissata ad un valore di 3 bar.

²⁷ Il formato IGES è riconosciuto da molti programmi come un formato standard per la modellizzazione solida.

Note le condizioni operative del sistema, sono stati calcolati due parametri adimensionali di fondamentale importanza, allo scopo di determinare il regime di moto nel quale si trova il fluido, ovvero il numero di Mach e il numero di Reynolds. Per il primo si è ottenuto che:

$$Ma = \frac{w}{c_s} = 0.04$$

dove si ha che:

$w = 20 \text{ m/s}$ è la velocità del fluido;

$c_s = \sqrt{kRT} = 480 \text{ m/s}$ è la velocità del suono;

e, considerando il comburente come un gas perfetto, ad una temperatura $T = 300^\circ\text{C}$ si ha che:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \quad R = 287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}.$$

Per il secondo invece il valore ottenuto è il seguente:

$$Re = \frac{w \cdot (D_e - D_i)}{\nu} = 72000$$

Dall'analisi di questi due parametri si è arrivati alle seguenti conclusioni:

- Per prima cosa, si è potuto, con buona approssimazione, considerare il fluido “*incomprimibile*” (ovvero si sono trascurate le variazioni di densità) essendo il numero di Mach molto minore dell'unità²⁸. Questo è giustificabile osservando che le velocità in gioco nell'efflusso non sono particolarmente elevate.
- In secondo luogo, dato il valore assunto dal numero di Reynolds, si capisce come il regime di moto sia sicuramente turbolento.
- Infine il fluido in questione è considerato newtoniano, essendo una miscela gassosa; ciò comporta l'indipendenza della viscosità dal gradiente di velocità.

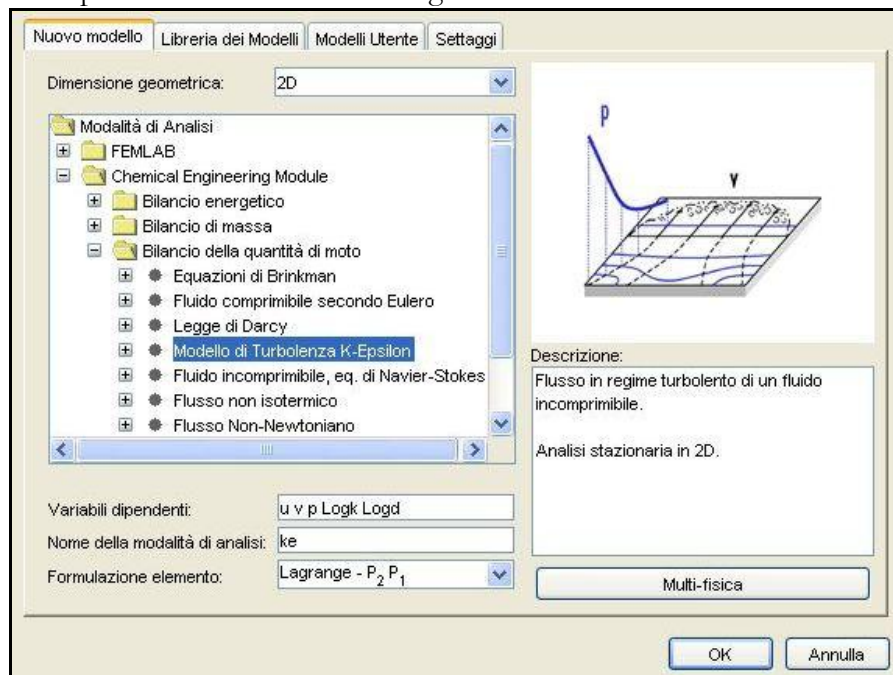


Figura 159: Finestra di selezione dei sottomoduli di risoluzione

²⁸ In realtà si parla di incomprimibilità quando $Ma < 0.3$, condizione il che è ampiamente soddisfatta nel caso in esame.

Sotto queste condizioni, il modulo adottato per la risoluzione numerica del problema è il “*modello a due equazioni differenziali k-ε*”, inserito all’interno del “*Chemical Engineering module*”.

Come già osservato nel capitolo quinto, il modello k-ε è uno dei migliori per lo studio dei fenomeni che concernono la turbolenza. Le equazioni caratteristiche di questo approccio sono l’equazione di continuità e le equazioni di bilancio di quantità di moto, inglobando in queste anche le due equazioni ausiliarie sull’energia cinetica turbolenta “k” e sull’energia di dissipazione turbolenta “ε”, necessarie per la chiusura del problema:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p / \rho + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \nu_T \right) \nabla \mathbf{u} \right] + \mathbf{F} / \rho$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) k = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right]$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon = C_{\varepsilon 1} \varepsilon / k \cdot \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon^2 / k + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right]$$

Individuato il modulo per lo studio si è effettuato il settaggio del sottodominio, in accordo con i valori derivanti dalle specifiche precedentemente elencate:

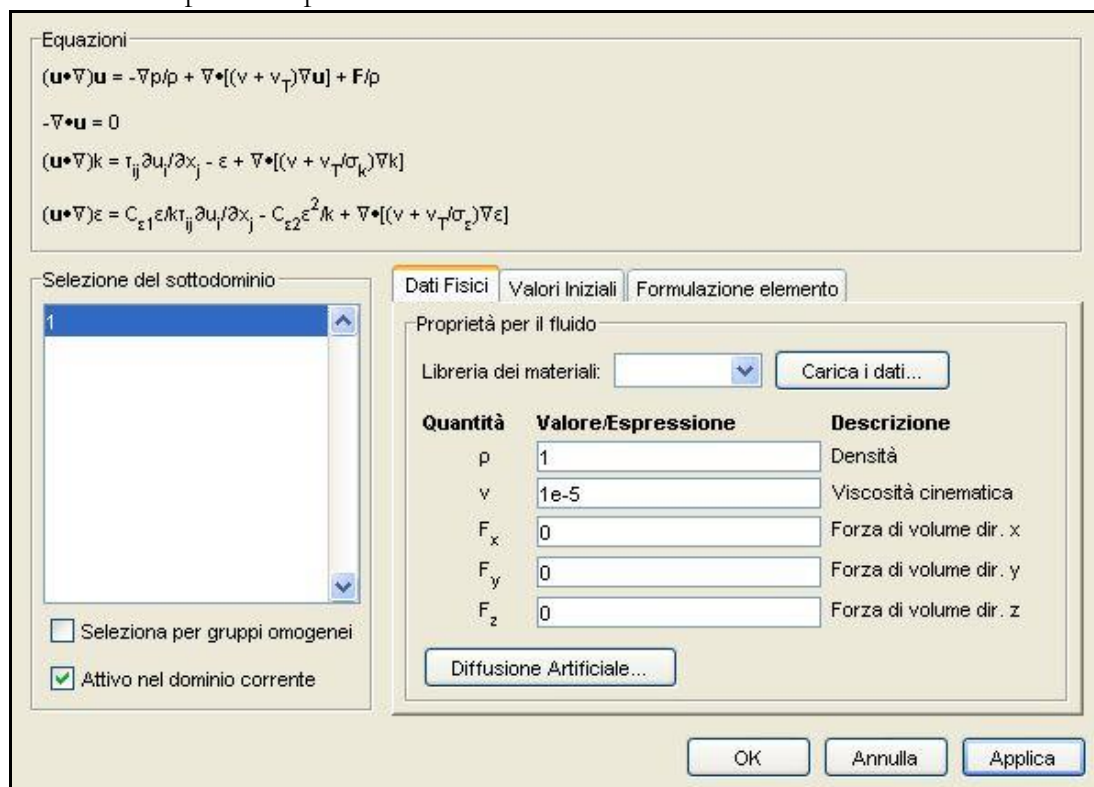


Figura 160: Finestra per il settaggio dei sottodomini

A seguire sono state impostate le condizioni al contorno (“boundary conditions”) per le quali il software offre diverse tipologie (Figura 161). Per la fisica del problema affrontato le condizioni al contorno imposte si possono riassumere come segue:

- Condizione di velocità assiale nella sezione d’ingresso, pari a 20 m/s;
- Condizione di aderenza (no slip) su tutte le superfici solide che costituiscono le pareti dei condotti e le palette dello swirler;
- Condizione di pressione pari a 3 bar nella sezione finale del sistema.

10.8.1 LA MESH DEL MODELLO

Una volta stabilite tutte condizioni fisiche del modello, si è potuto passare alla realizzazione della mesh. Quest'ultima è stata realizzata con elementi tetraedrici che meglio si adattano a casi di geometrie 3D, diversamente dalle mesh mappate con elementi quadrangolari.

Il problema esaminato, per via della sua geometria piuttosto complessa in prossimità dello swirler, presenta un elevato numero di gradi di libertà che hanno creato non pochi problemi per la gestione della memoria del calcolatore utilizzato. I valori impostati per la definizione degli elementi della mesh sono riportati nella Figura 162.

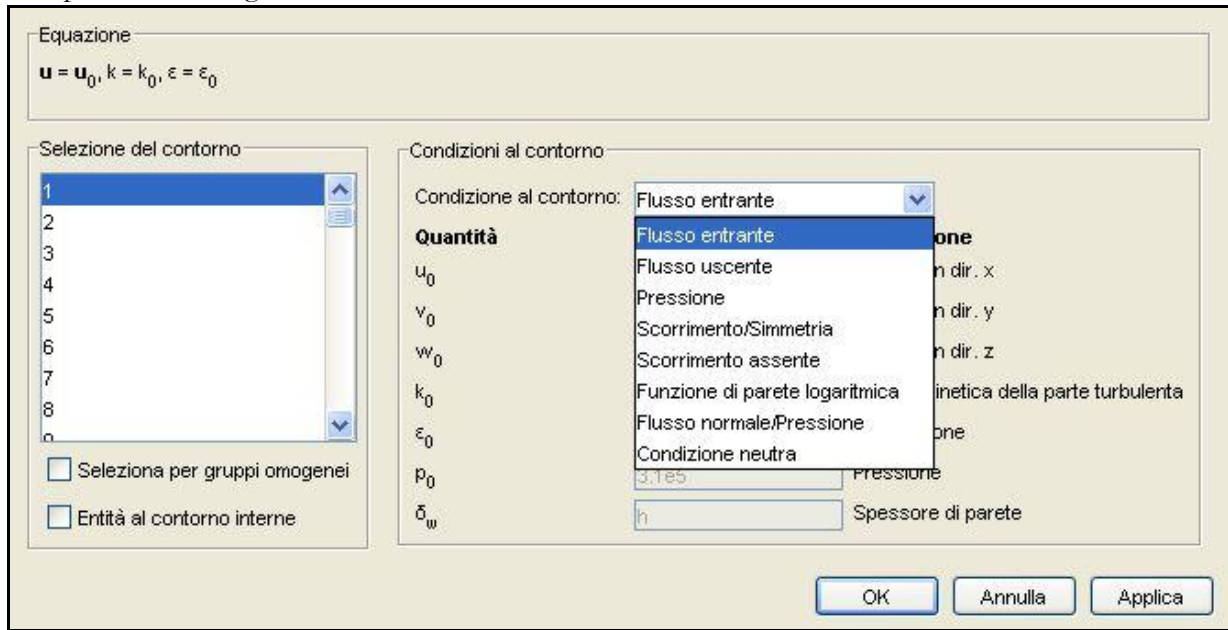


Figura 161: Finestra per il settaggio delle condizioni al contorno

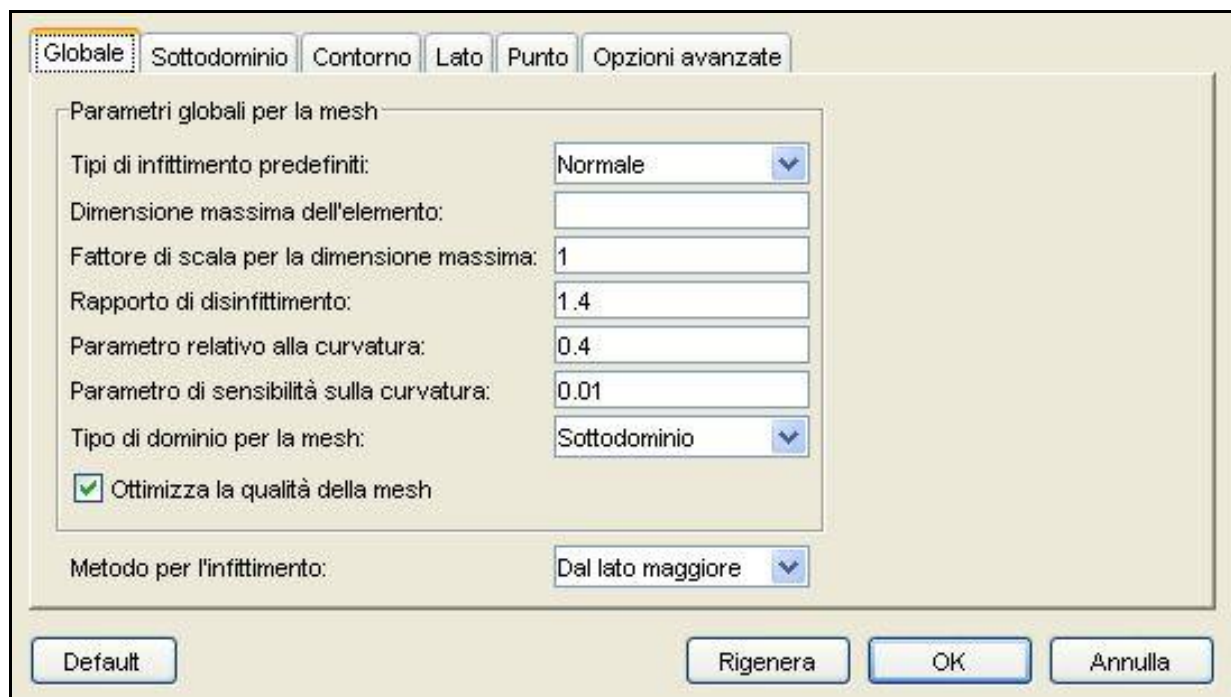


Figura 162: Finestra di settaggio per i parametri della mesh

Imponendo tali valori la mesh del modello è risultata come riportato in Figura 163.

Da questa si può osservare che la zona in cui è presente lo swirler risulta molto più densa di elementi,essendo questa suddivisa in tanti piccoli sottodomini caratterizzati dai vani compresi tra le palette. Ciò si osserva meglio nell'ingrandimento riportato in Figura 164.

Tuttavia nonostante l'apparente bontà della mesh, il numero delle maglie non è quello ottimale per ottenere risultati di precisione elevata,per i quali necessiterebbero mesh con milioni di gradi di libertà. In ogni caso l'analisi è risultata pienamente soddisfacente con il livello di approssimazione considerato e ha restituito indicazioni importanti sulle distribuzioni del campo di velocità e di pressione del sistema studiato.

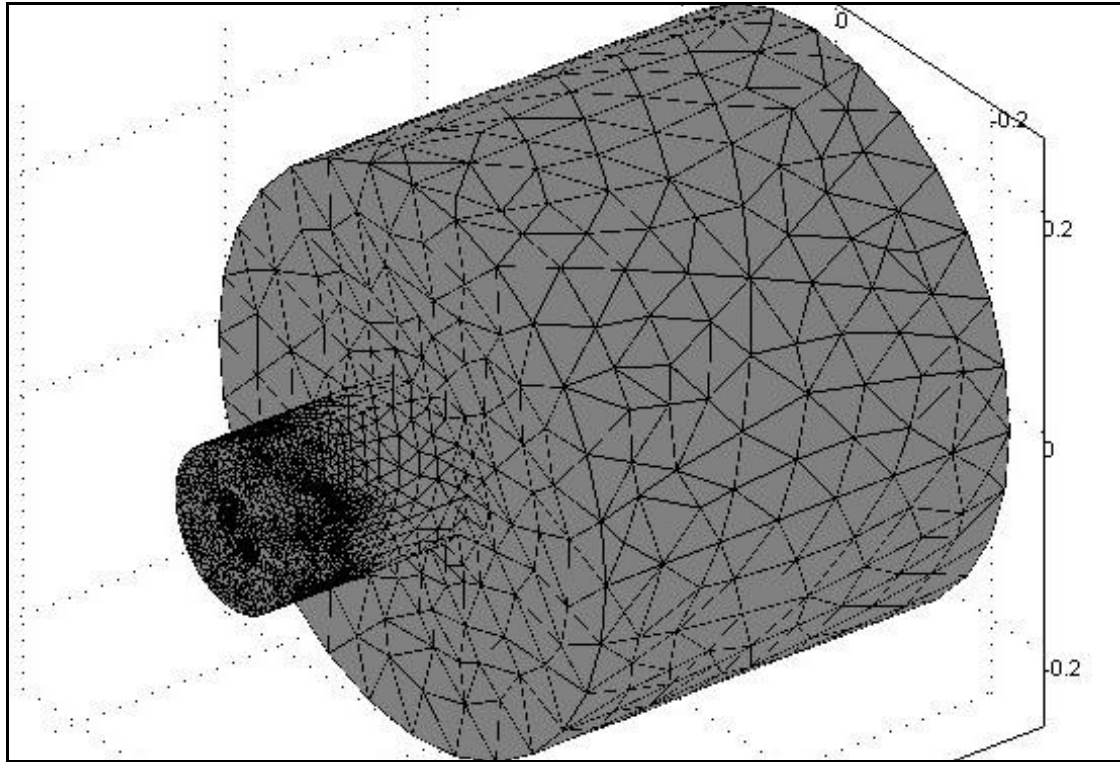


Figura 163: Mesh del modello

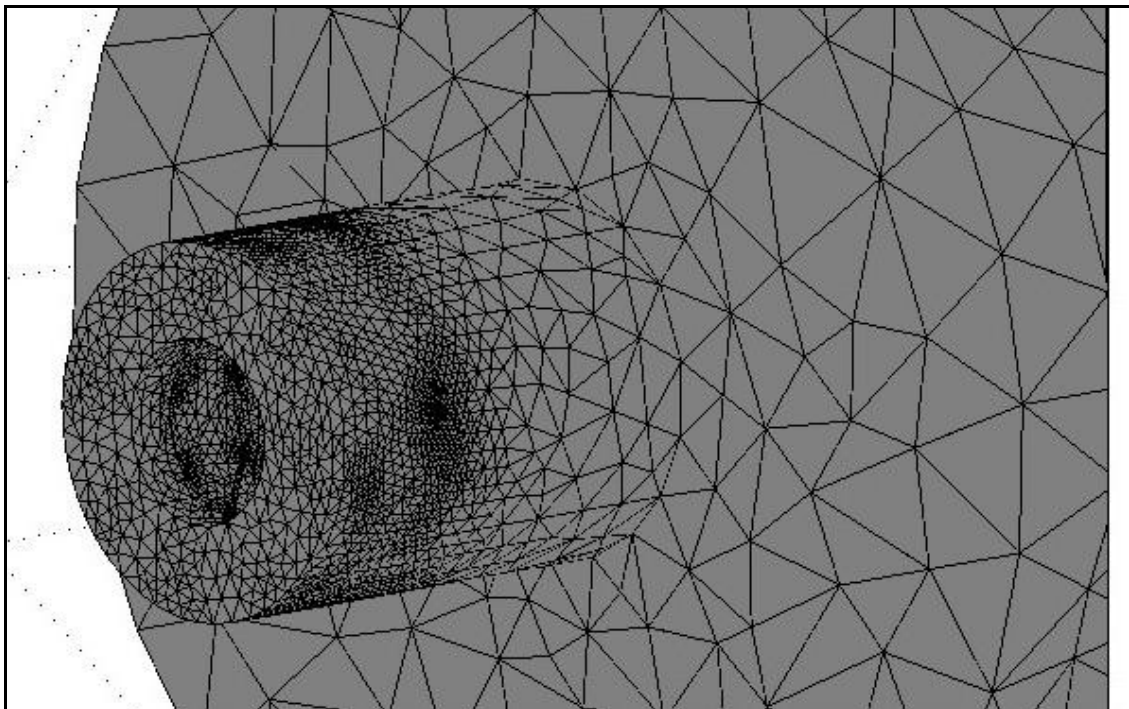


Figura 164: Ingrandimento della mesh nella zona dello swirler

10.8.2 SOLUZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA

Questa fase rappresenta sicuramente il punto cruciale nella risoluzione del problema. Il software utilizzato possiede di default una serie di solutori i quali possono essere opportunamente gestiti in funzione dell'entità del calcolo e della tipologia di problema da risolvere. In breve i solutori possono essere suddivisi come segue:

- Solutori lineari: per problemi semplici di carattere lineare;
- Solutori non lineari: per problemi complessi non lineari;
- Solutori diretti: ricavano la soluzione con metodo diretto ma con eccessivo utilizzo di memoria;
- Solutori iterativi: ricavano la soluzione in modo iterativo, sfruttando meno memoria, ma impiegando più tempo.

Normalmente per problemi come quello affrontato, in cui analizzano problemi di turbolenza con geometrie 3D, il solutore che meglio si presta per la risoluzione è sicuramente di tipo non lineare e iterativo, da un lato perché le equazioni caratteristiche del moto sono non lineari, dall'altro perché il solutore iterativo non presenta gli oneri di calcolo che presenterebbe un solutore diretto (soprattutto nel caso di geometrie 3D).

Tuttavia a causa delle numerose iterazioni che questo tipo di solutore si trova ad eseguire per risolvere il sistema di equazioni in questione, si è optato, in definitiva, per un solutore non-lineare diretto, che pur richiedendo notevole risorse di memoria ha consentito una maggiore rapidità di calcolo.

Com'è riportato in Figura 165, l'analisi effettuata risulta essere “*stazionaria non lineare*” ed il solutore prescelto risulta essere l'UMFPACK il quale è stato settato limitando il fattore di smorzamento per far convergere più rapidamente la soluzione del problema:

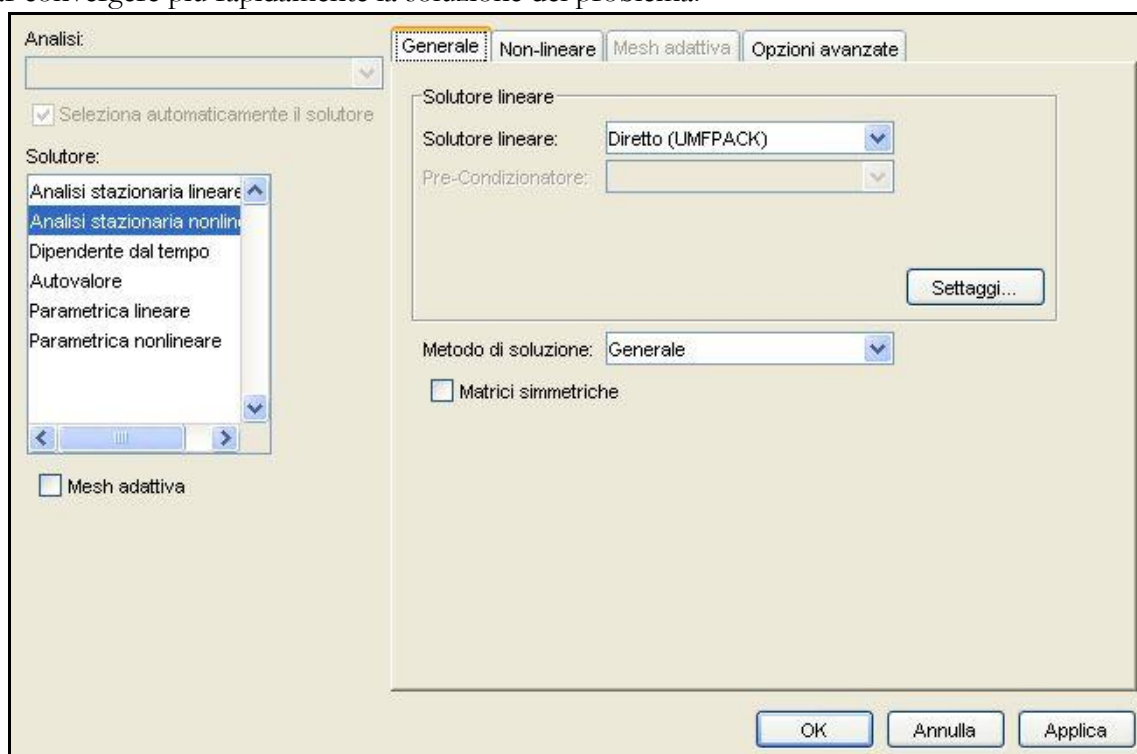


Figura 165: Finestra di gestione del solutore

Infine, il “*metodo di soluzione*” delle equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) è fissato sulla modalità “*generale*”, necessaria quando vengono affrontati problemi di natura non lineare, o semi-lineare.

10.8.3 PLOTTAGGIO DEI RISULTATI E POST-PROCESSAMENTO

Questa è la fase finale del processo di modellazione la quale consiste nel plottare i risultati ottenuti dalla simulazione e di effettuare il loro post-processamento.

Il software utilizzato ha, nel post-processamento dei risultati, uno dei suoi punti forti in quanto presenta un'interfaccia di gestione semplice da utilizzare, ma allo stesso tempo completa. Il primo risultato che è stato plottato, riporta la distribuzione del modulo del campo di velocità, analizzato in una serie di sezione trasversali del sistema ed è rappresentato in Figura 166. Si evince chiaramente dalla figura che il fluido entrando con una velocità di circa 20 m/s subisce un'accelerazione all'interno dello swirler a causa della stazionarietà del problema. Infatti, la conservazione della portata di massa comporta il conseguente aumento della velocità al ridursi della sezione.

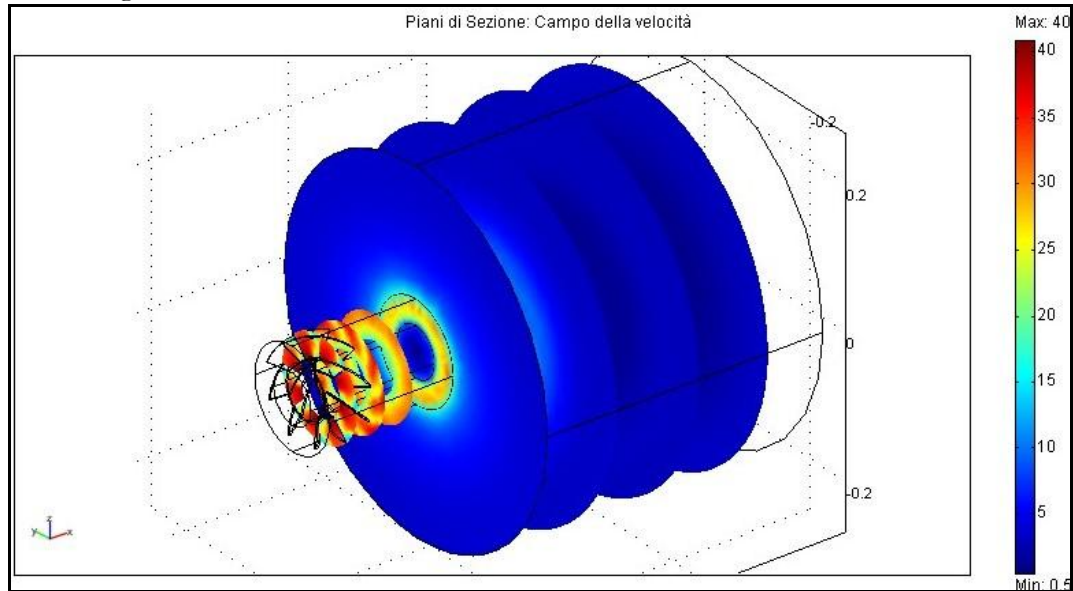


Figura 166: Piani di sezione: campo di velocità

All'interno del reattore il fluido incontra un ambiente di grosse dimensioni espandendosi e rallentando bruscamente fino a valori della velocità di 1 m/s circa. Il tutto appare più chiaro nella seguente sezione longitudinale:

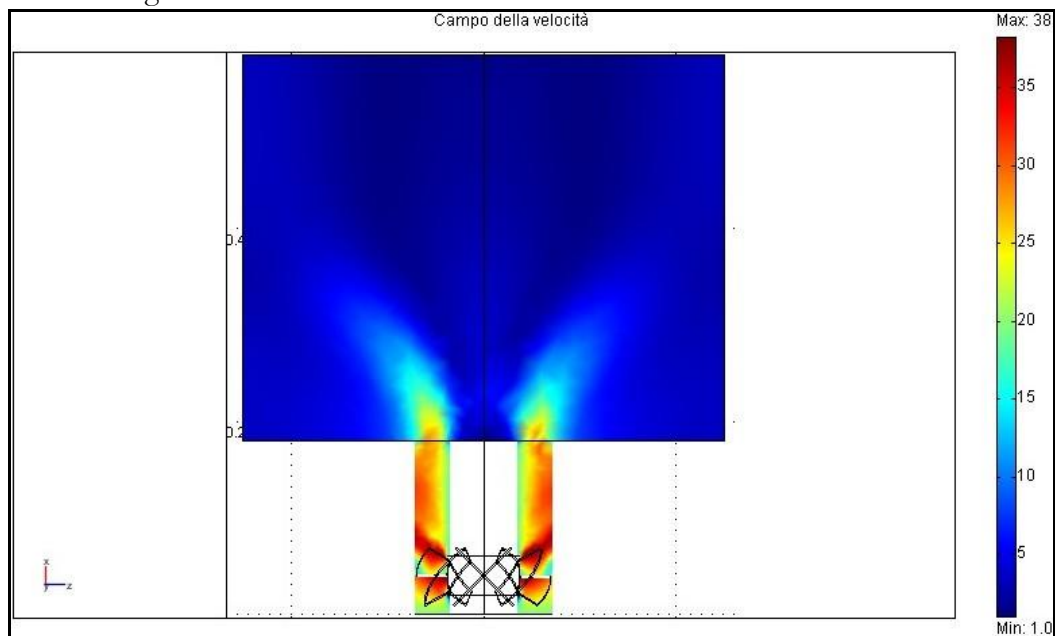


Figura 167: Sezione longitudinale del modello

Dalla Figura 167 risulta evidente l'espansione del getto fluido (con andamento tipicamente conico) al momento dell'ingresso nel reattore, con conseguente diminuzione di velocità.

Per quanto invece riguarda la direzione del campo di moto, si sono andati ad analizzare le linee di flusso²⁹ e i vettori velocità, come mostrato nelle seguenti immagini.

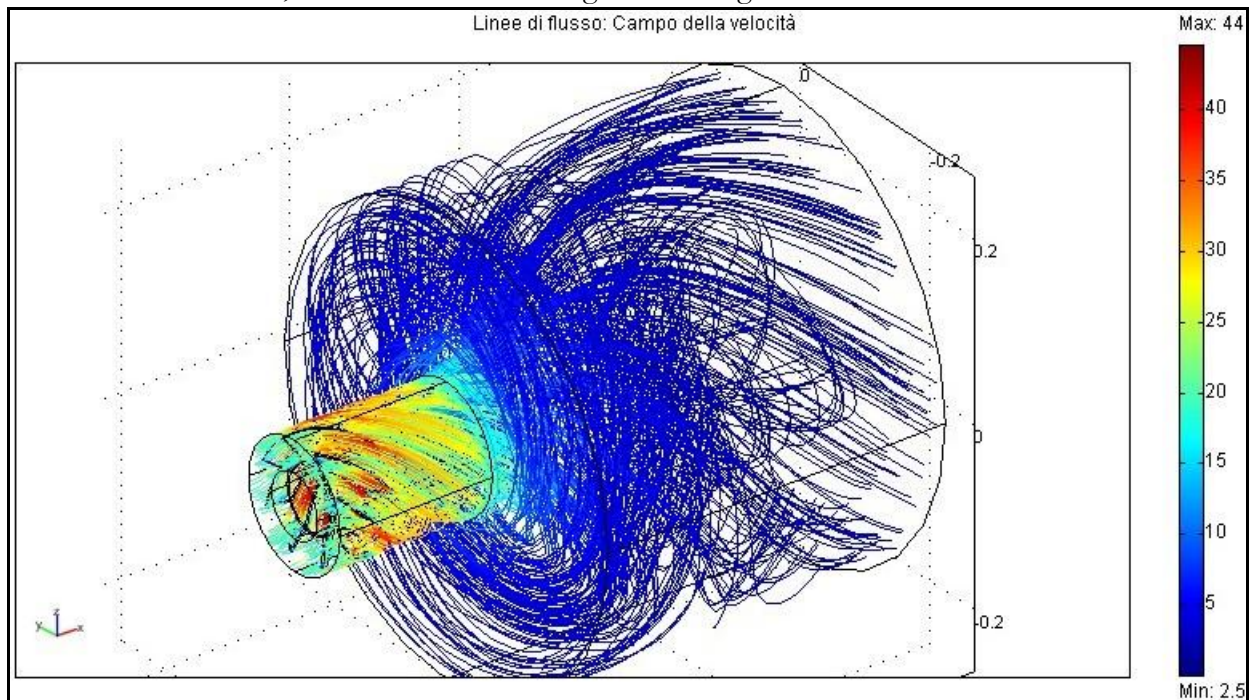


Figura 168: Linee di flusso

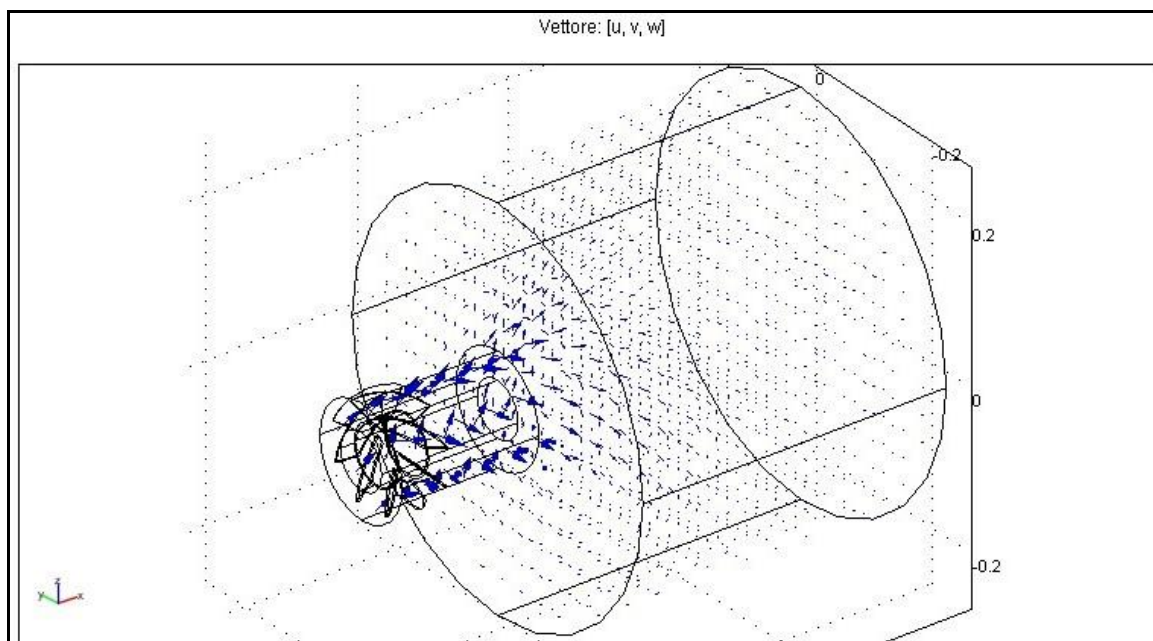


Figura 169: Vettori velocità

Risulta in questo caso ben visibile il moto a spirale tipico di un flusso swirlato. In particolare il moto impresso dalla palettatura crea, come accennato nel capitolo precedente, una zona di depressione interna con conseguente sviluppo di una zona di ricircolo centrale (“*Central Toroidal Recirculation Zone*”) che riporta il fluido verso la sezione d’uscita del bruciatore.

²⁹ Si ricorda che per linea di flusso (*streamline*) s’intende la linea che si mantiene tangente in ogni punto al vettore velocità.

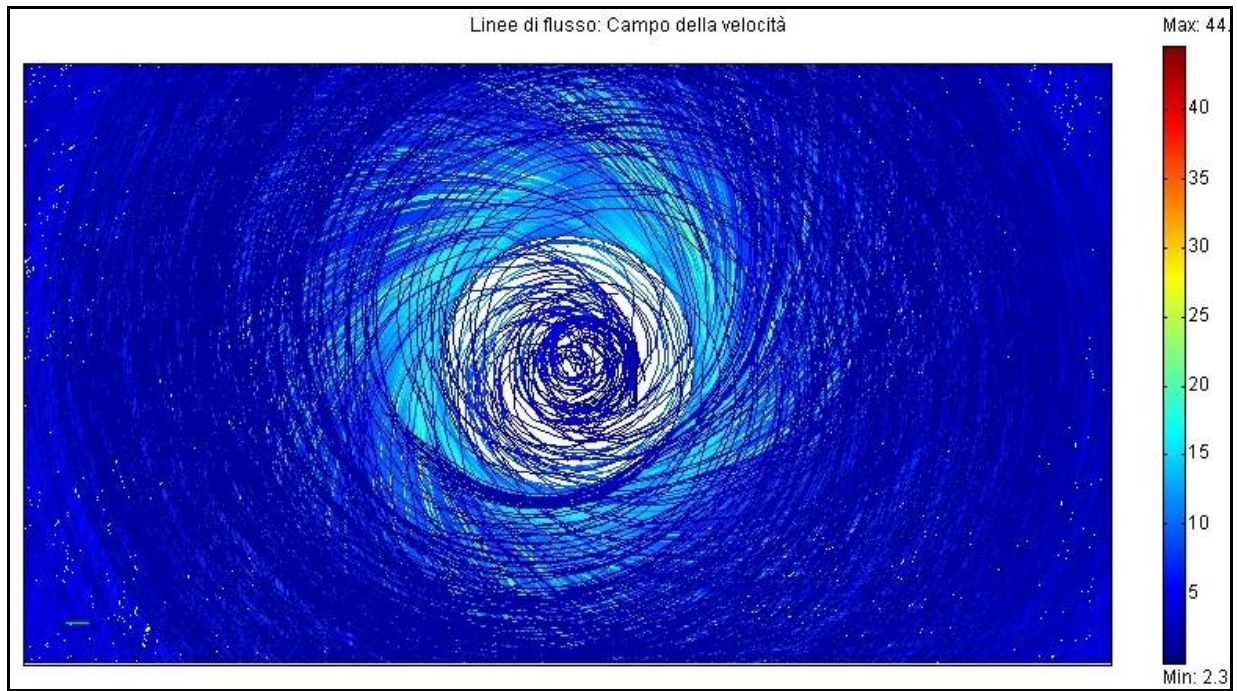


Figura 170a: Ingrandimento della zona di formazione del vortice (posteriore)

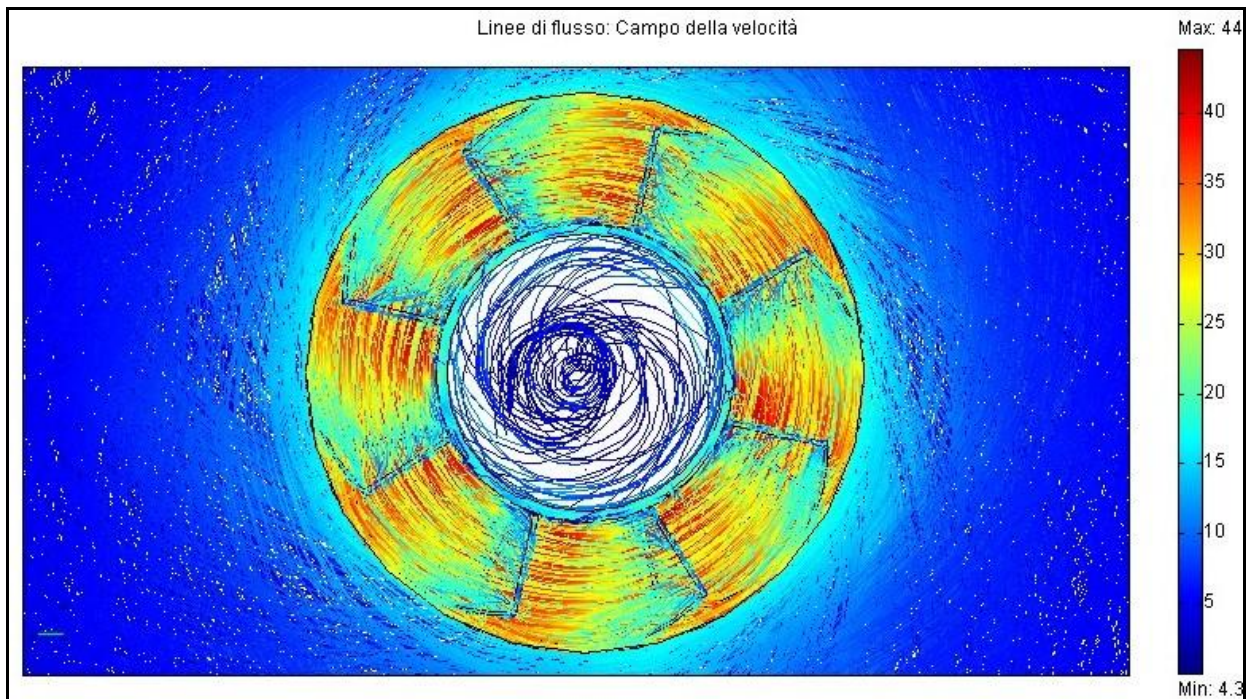


Figura 170b: Ingrandimento della zona di formazione del vortice (anteriore)

Eseguendo in prossimità di quest'ultima (ad una distanza di circa 1 cm) un'analisi della distribuzione radiale della componente assiale della velocità, è possibile osservare su un generico piano longitudinale della geometria, un andamento del tipo riportato in Figura 171.

E' facile osservare come nella zona centrale, ovvero all'interno del nucleo del vortice, il modulo della velocità assiale assuma valori negativi. Ciò, ovviamente, è collegato all'inversione del flusso causata dai gradienti pressori che si originano in suddetta zona.

I valori trovati sono aderenti ai risultati ottenuti per via sperimentale, tramite LDV e concordano con i numerosi casi analoghi ritrovabili in letteratura. I valori inerenti all'effetto di ricircolo ottenuti con la simulazione inoltre risultano concordanti con il grado di swirl posseduto dal bruciatore.

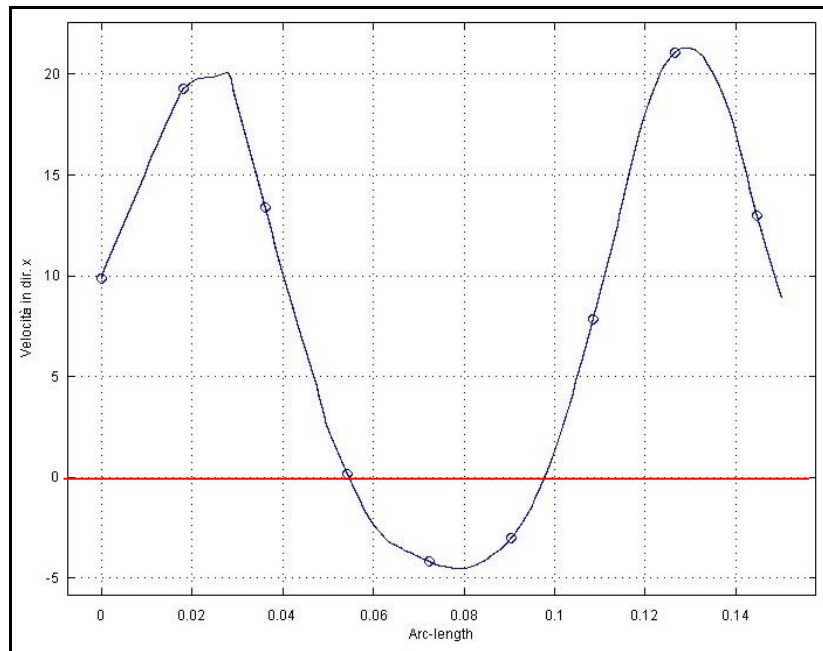


Figura 171: Distribuzione radiale della componente assiale della velocità all'uscita del bruciatore

Si è, calcolato il numero di swirl per il sistema in esame basata sulla geometria del sistema, ottenendo che:

$$S = \frac{2}{3} \left[\frac{1 - (R_h/R)^3}{1 - (R_h/R)^2} \right] \tan \alpha = 0.77$$

Secondo la suddivisione effettuata nel sesto capitolo in merito ai diversi gradi di effetto swirl, si osserva che il sistema esaminato rientra nel caso di un “*medium swirl*”, essendo il numero di swirl compreso tra 0 ed 1.

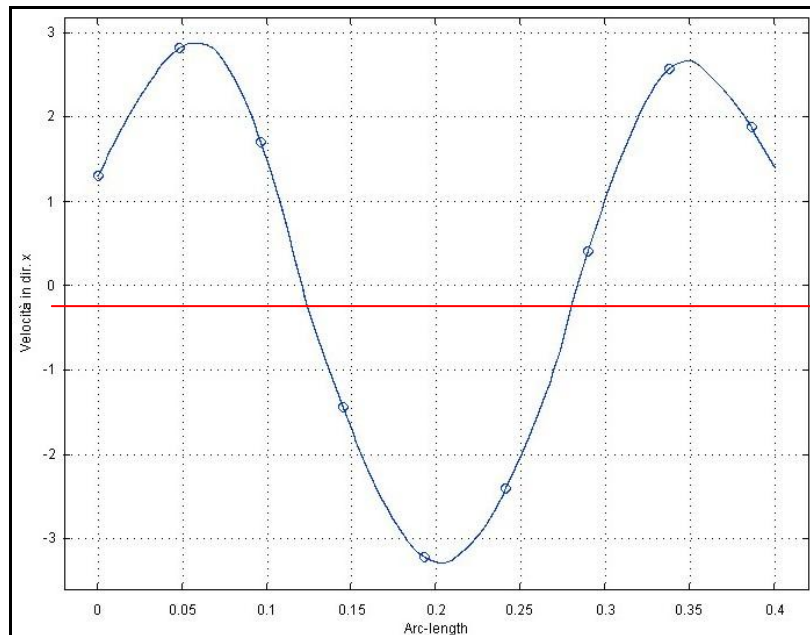


Figura 172: Distribuzione radiale della componente assiale della velocità a 20 cm dalla sezione d'uscita del bruciatore

In questa categoria, infatti, rientrano tutti i sistemi in cui l'effetto è tale da generare un gradiente di pressione assiale e radiale sufficientemente intenso da formare vortici di rientro in cui viene ricircolata una certa percentuale di massa fluida.

Ciò, quindi, corrisponde perfettamente a quanto ottenuto dalla simulazione. La stessa analisi è stata successivamente effettuata a distanze crescenti rispetto alla sezione d'uscita del bruciatore per analizzare la permanenza e la lunghezza della zona di ricircolo.

Come riportato in Figura 172 ad una distanza di circa 20 cm dalla bocca del bruciatore si ha ancora un notevole effetto di ricircolo evidenziato dai valori assunti dalla componente assiale della velocità, i quali permangono negativi.

Questo denota un elevato grado di miscelazione tra comburente e combustibile, il quale viene, in una buona percentuale, ricircolato dai vortici toroidali del comburente verso la zona d'iniezione, dando origine a tutti gli effetti benefici che sono già stati più volte sottolineati riguardo le emissioni e la stabilità di fiamma.

In maniera analoga è stato possibile analizzare la distribuzione radiale di pressione sempre in prossimità della sezione d'uscita, il cui andamento è riportato in Figura 173.

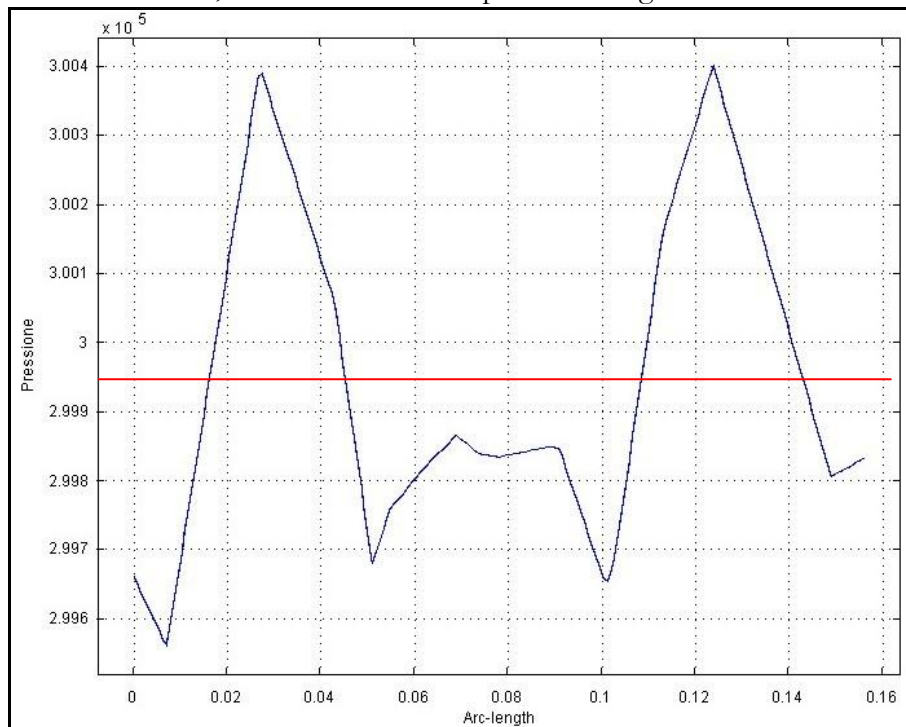


Figura 173: Distribuzione della pressione all'uscita del bruciatore

La figura è esplicativa del fatto che, pur essendo fondamentalmente tutto l'ambiente alla pressione di progetto di 3 bar, all'uscita del bruciatore si viene a creare quella leggera depressione tipica dei flussi swirlati.

La leggera discontinuità che si può notare nell'immagine, nella zona centrale, deriva dall'imprecisione di calcolo implicita nella mesh prescelta che, come già osservato, comporta degli errori durante l'analisi numerica.

11 EBOLLIZIONE E CONDENSAZIONE DEI FLUIDI

I fluidi (liquidi e vapori) possono cambiare di stato, come si è visto in *Termodinamica Applicata* con le curve di *Andrews*. Questi cambiamenti di stato, ebollizione e condensazione, rivestono una grandissima importanza industriale per le numerosissime ed importantissime applicazioni in campo energetico. Si pensi, ad esempio, al raffreddamento dei reattori nucleari, ai tubi di calore e alle applicazioni in campo elettronico (raffreddamento di componenti fortemente energetici).

Oggi con queste tecniche si riesce a raggiungere una intensità di flusso estratto dell'ordine del MW/m^2 e quindi valori elevatissimi e adatti a far fronte alle esigenze di raffreddamento di dispositivi ad elevata densità di potenza³⁰. Si vuole in questo capitolo presentare brevemente queste problematiche affrontandole più in modo qualitativo che quantitativo, anche in considerazione della natura del presente Corso. Si rimanda ai testi specializzati ogni ulteriore approfondimento.

Un altro motivo di interesse specifico di questi fenomeni di scambio termico con passaggio di stato è dovuto alla semplice considerazione che per essi non si possono applicare le relazioni adimensionali della convezione termica viste in precedenza. Si osservi, infatti, che per la convezione forzata si hanno relazioni adimensionali del tipo:

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n$$

mentre per la convezione naturale si hanno correlazioni adimensionali del tipo:

$$Nu = C \cdot Gr^m \cdot Pr^n$$

che spesso, nel caso di gas per i quali gli esponenti m ed n sono eguali, si possono ricondurre nella forma semplificata:

$$Nu = C \cdot Ra^m$$

Si ricorda che il numero di Prandtl è definito dal rapporto:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$$

e quindi dipende dal calore specifico a pressione costante del fluido interessato. Durante i passaggi di stato la pressione si mantiene costante ma anche la temperatura e quindi c_p è infinito. Ne segue che durante i passaggi di stato non possiamo usare correlazioni adimensionali ove compare c_p .

Occorre, quindi, affrontare diversamente il problema dello scambio termico in cambiamento di fase con osservazioni e metodologie di studio specifiche per questi fenomeni.

11.1 EBOLLIZIONE STATICA

Prima di affrontare lo studio dell'ebollizione è bene ricordare che questa differisce dalla *evaporazione*. Questa, infatti, è un fenomeno di transizione dalla fase liquida a quella di vapore nella regione superficiale di contatto dei due fluidi ed è determinata dalla differenza fra la pressione di saturazione e la pressione parziale del vapore. L'*ebollizione* interessa, invece, la massa del fluido ed è determinata dal raggiungimento della temperatura di saturazione nel punto specifico e alle condizioni di pressione presenti. L'ebollizione è stata studiata negli anni *quaranta* da *Nukijama* che propose il diagramma di Figura 174 per ebollizione statica: in ascisse è rappresentato ΔT_{sat} cioè la differenza di temperatura della parete, T_p , e quella di saturazione del liquido, T_s , in ordinate si ha il flusso specifico $[\text{W/m}^2]$ in unità arbitrarie.

³⁰ I reattori nucleari raggiungono densità di potenza dell'ordine di qualche centinaio di Watt per centimetro cubo. Dello stesso ordine di grandezza sono le densità di potenza dei tubi clastroon utilizzati negli impianti radar. Si pensi, ancora, che un semplice Pentium III disperde circa 40 W con una superficie di circa 2 cm² e quindi con una densità superficiale di 0.2 MW/m². E' opportuno osservare che oltre al valore assoluto della potenza termica da estrarre (ad esempio negli impianti di potenza) è importante considerare anche le densità (volumiche o superficiali). Se non si riesce a smaltire queste potenze specifiche i dispositivi interessati possono subire danni irreversibili o non funzionare affatto.

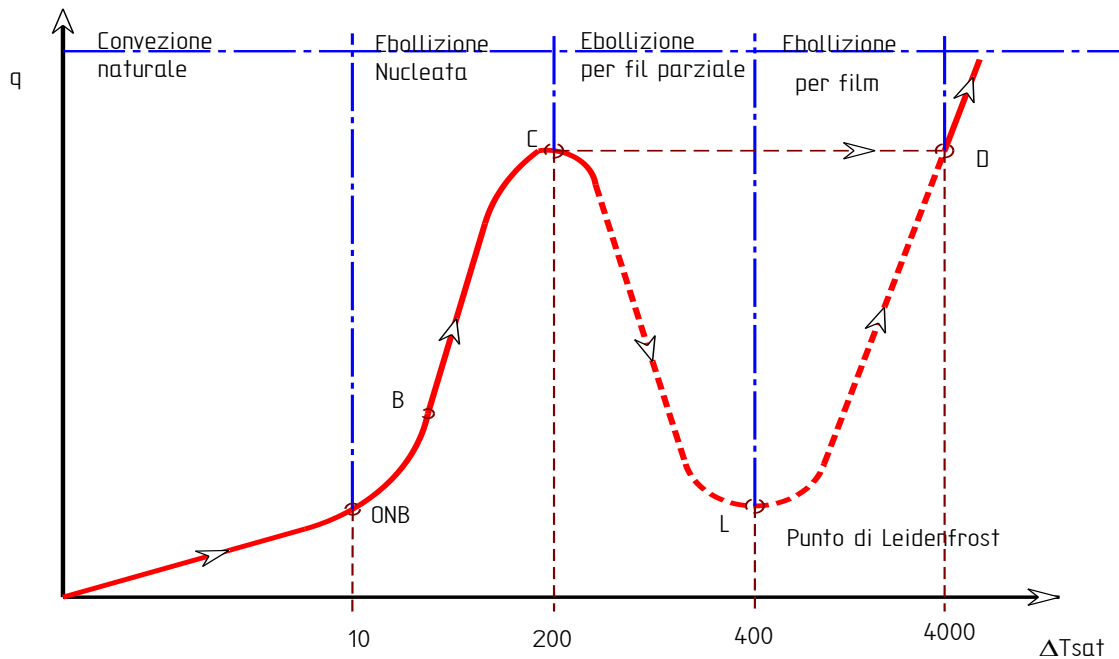


Figura 174: Curva di Nukijama

L'ebollizione statica si ha, ad esempio, ponendo la classica pentola sul fuoco: il fluido è in condizioni statiche e non in movimento, come avviene nei tubi all'interno di una caldaia.

Se si aumenta la potenza ceduta alla parete di fondo si hanno, inizialmente, valori di ΔT_{sat} bassi, dell'ordine di qualche grado, come indicato in figura.

Per effetto di questa differenza di temperatura si instaurano fenomeni convettivi per i quali il fluido caldo, a contatto con la parete di fondo riscaldata, si sposta verso l'alto, ove la temperatura è inferiore a quella di saturazione dando luogo alla convezione termica, così come vista in precedenza. In questa zona si possono utilizzare le correlazioni adimensionali solite per la convezione naturale e il flusso specifico è dato da³¹:

$$q = h\Delta T_{sat}$$

Molto usata è la correlazione di Mc Adams: $Nu = 0.56(Gr Pr)^{0.25}$ per moto laminare e $Nu = 0.13(Gr Pr)^{0.33}$ per moto turbolento.

Ad un certo punto, a seconda della combinazione di fluido e materiale delle pareti e della pressione sul fluido, si cominciano ad osservare sulla parete di fondo riscaldata alcune bollicine che appena nate subito spariscono.

Per comprendere questo fenomeno occorre ricordare che l'ebollizione del liquido avviene solo quando si supera la temperatura di saturazione e per effetto di una causa scatenante, una sorta di innesco spesso dato dalla presenza di impurezze, di gas diverso dal vapore o da asperità tipiche delle lavorazioni delle pareti metalliche.

In Figura 175 si ha un ingrandimento della parete di fondo con l'evidenziazione delle asperità dovute alle lavorazioni. Si osservi che queste asperità sono volute, come si dirà fra poco, perché aiutano il processo di formazione delle bolle.

³¹ Si utilizza il salto di temperatura ΔT_{sat} come valore di riferimento certo. Il salto reale di temperatura dipende dalle condizioni locali non sempre facilmente calcolabili.

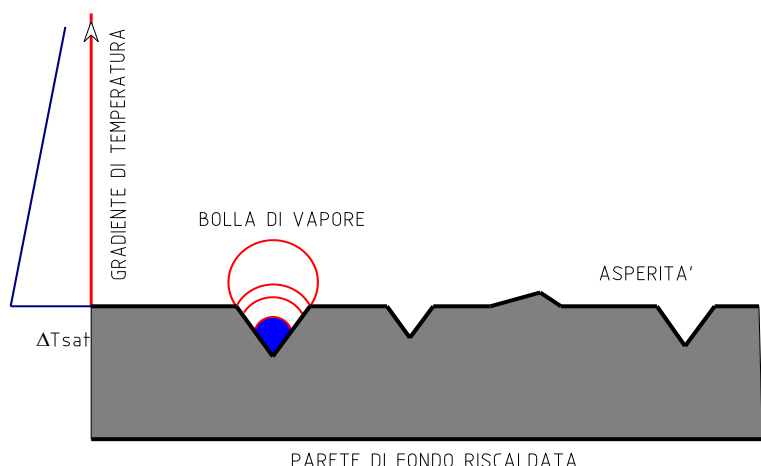


Figura 175: Nascita di una bolla di vapore

Se consideriamo una cavità si intuisce che nella cuspide di fondo si ha una concentrazione anomala di potenza termica (a parità di superficie frontale le pareti inclinate trasmettono più calore) e quindi è possibile avere l'*innesco* per l'inizio della ebollizione.

Il vapore che si viene formando occupa un grande volume e forma una bollicina che va sempre più crescendo di diametro fino ad uscire fuori dai limiti della stessa cavità e affiorare nel liquido sovrastante. Il liquido può essere ancora in condizioni di sottoraffreddamento, cioè ancora non sufficientemente riscaldato e quindi in condizioni tali da mantenere le condizioni termodinamiche di esistenza in vita della bolla.

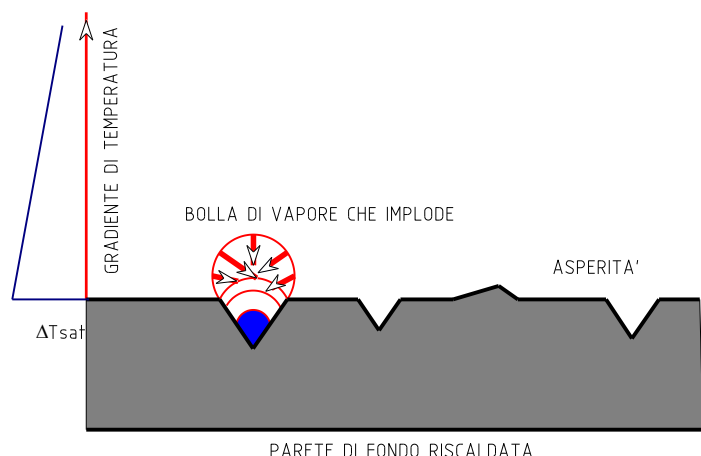


Figura 176: Implosione della bolla

Pertanto la bolla si raffredda rapidamente perché cede calore al fluido sovrastante e, quando la pressione interna diviene inferiore a quella esercitata dal liquido esterno si ha l'implosione con conseguente scoppio, vedi Figura 176 e Figura 177.

Questo semplice meccanismo si rivela efficacissimo ai fini dello scambio termico poiché il vapore all'interno della bolla cede al liquido il suo calore latente di vaporizzazione (che è elevato!). Inoltre lo scoppio produce l'effetto benefico di movimentare il liquido ossia di migliorare la convezione termica. E' come se si avessero tanti piccoli meccanismi di movimentazione del liquido e quindi la convezione si comporta come se fosse forzata.

Quanto sopra detto si chiama **ebollizione enucleata** e tale il nome proprio dalla formazione dei nuclei di ebollizione che poi implodono. La temperatura corrispondente all'insorgere di questo fenomeno è detta **onset on nucleate boiling (ONB)** e rappresenta un punto significativo della curva di *Nukijama*.

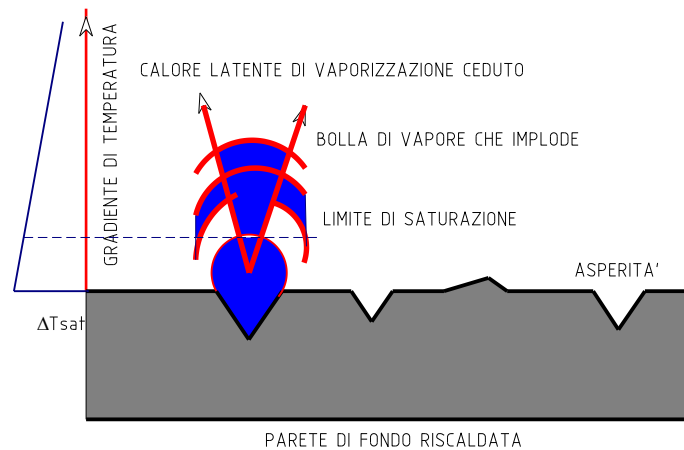


Figura 177: Scoppio della bolla

Per effetto dei meccanismi efficacissimi di scambio termico ora il flusso termico si esprime con la relazione:

$$q = h\Delta T_{sat}^{3\div 5}$$

Si osservi che ora il flusso termico dipende dalla 3÷5 potenza del ΔT_{sat} e quindi si ha una capacità di estrazione termica notevolissima. E' proprio questa la zona di maggiore interesse per le applicazioni.: l'*ebollizione nucleata*.

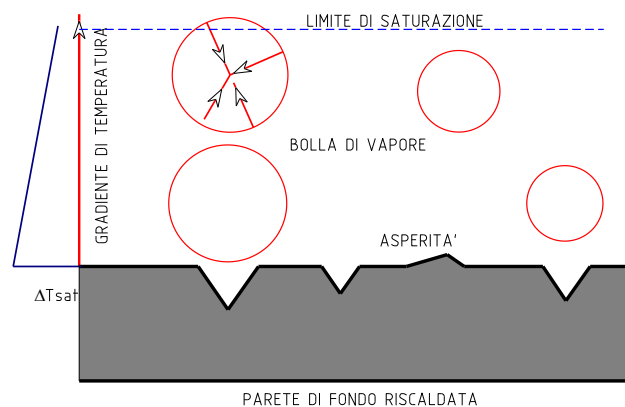


Figura 178: Distacco delle bolle

Man mano che il liquido si riscalda le bolle possono crescere ulteriormente e finalmente possono staccarsi dalla parete di fondo, come indicato in Figura 178. Le bolle ora perfettamente formate sono in grado di iniziare la loro ascesa verso la superficie superiore del liquido ma, allontanandosi dalla parete, incontrano strati di liquido più freddi e quindi si raffreddano cedendo calore attraverso la superficie di separazione.

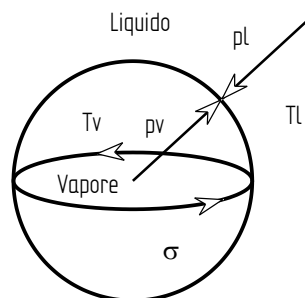


Figura 179: Equilibrio termodinamico della bolla

Quando la pressione interna della bolla non riesce più a bilanciare la pressione del liquido si ha, ancora, l'implosione della bolla e quindi nuovamente il meccanismo di scambio termico visto in precedenza con la cessione del calore latente e la movimentazione del liquido.

Con riferimento alla Figura 179 si può scrivere, per l'equilibrio:

$$p_v \pi \frac{d^2}{4} = p_l \pi \frac{d^2}{4} + \pi d \sigma$$

ove si sono indicate con:

- p_v la pressione del vapore interna alla bolla alla temperatura T_v ;
- p_l la pressione esercitata dal liquido alla pressione T_l ;
- d il diametro della bolla;
- σ la tensione superficiale della bolla,

Da questa relazione si ha:

$$p_v - p_l = \frac{4\sigma}{d}$$

Si può subito osservare che più piccolo è il diametro della bolla tanto maggiore deve essere la differenza di pressione fra l'interno (vapore) e l'esterno (liquido).

Inoltre se si vuole che il liquido e il vapore della bolla sia in equilibrio termodinamico deve essere $T_v = T_l$ e poiché il vapore è in condizioni di saturazione alla pressione $p_v > p_l$ deve anche aversi che il liquido, essendo ad una temperatura superiore a quella di equilibrio alla pressione $p_l < p_v$, è **surriscaldato**.

Allora il surriscaldamento $T_v - T_s$ in condizioni di equilibrio termico e meccanico può essere determinato facendo ricorso all'equazione di *Clapeyron - Clausius* (che possiamo ricavare dalle equazioni di *Maxwell* viste in *Termodinamica*):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v = \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T$$

che, nel caso in esame diviene:

$$\frac{dp}{dT} \cong \frac{r}{v T_s} = \frac{r p_v}{R_v T_s^2}$$

ove si è tenuto conto che deve essere $p_v v = R_v T_s$. Possiamo ancora scrivere, in prima approssimazione:

$$\frac{dp}{dT} \approx \frac{p_v - p_l}{T_v - T_s}$$

e quindi, anche in considerazione di quanto sopra visto per $p_v - p_l$ si ha:

$$T_v - T_s = t_v - t_s = \frac{4 R_v T_s^2 \sigma}{r p_v d}$$

Ora l'ebollizione nucleata non è più sul nascere ma in pieno sviluppo e siamo nel tratto di curva AB della Figura 174.

Gli scambi termici sono efficaci e il liquido subisce un vigoroso riscaldamento.

Quando il ΔT_{sat} raggiunge il punto B allora si cominciano ad avere le prime bolle che raggiungono la superficie del liquido e quindi tutta la massa del liquido è interessata dal fenomeno della enucleazione.

Dal punto B in poi, al crescere di ΔT_{sat} si formano sempre più bolle di vapore che raggiungono la superficie del liquido, fino a formare vere e proprie colonne di vapore che occupano uno spazio non trascurabile³².

Il liquido in moto convettivo dall'alto verso il basso, per continuità di massa, trova sempre meno spazio per passare e quindi aumenta la sua velocità di spostamento e ciò favorisce lo scambio termico.

Se non si fosse in equilibrio termico allora per $T_v < T_l$ si avrebbe:

$$T_l - T_s > \frac{4R_v T_s^2 \sigma}{r p_l d}$$

Il calore si scambia per conduzione all'interfaccia liquido – vapore e parte del liquido evapora e la bolla cresce. Se invece $T_v > T_l$ ovvero per :

$$T_l - T_s < \frac{4R_v T_s^2 \sigma}{r p_l d}$$

lo scambio termico si inverte e la bolla diminuisce di volume.

Ritorniamo alla curva di Nukijama osservando che quando ΔT_{sat} raggiunge il punto C di Figura 174 allora tutta la massa del liquido si è portata nelle condizioni di saturazione e può partecipare massivamente all'ebollizione.

Il punto C è particolarmente importante nello studio che si sta facendo: esso prende il nome di **punto critico** e il flusso termico corrispondente è detto **flusso di burn out** (cioè di **bruciatura**). A destra del punto critico non è facile andare se si controlla il flusso termico, come sin qui si è fatto. La curva di *Nukijama* è monocroma se si controlla il ΔT_{sat} mentre è policroma se si controlla il flusso termico q .

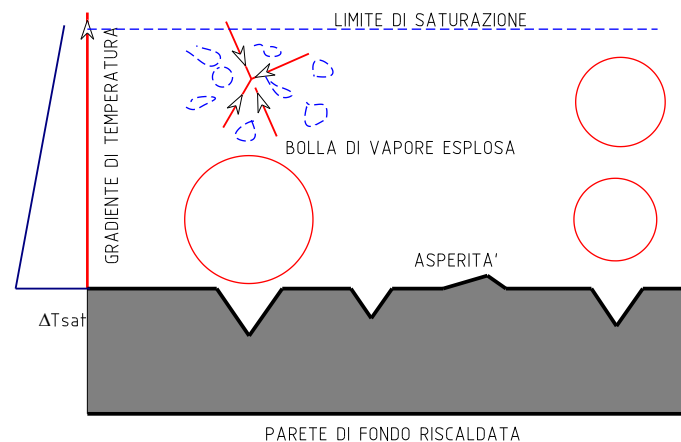


Figura 180: Implosione della bolla distaccata

Dal punto critico C con un leggero incremento della temperatura di parete si passa al punto D a cui corrisponde (si veda in ascisse) un valore elevatissimo e tale da portare a fusione la maggior parte dei materiali oggi utilizzati.

Pertanto le condizioni operative debbono essere lontane il più possibile da C per evitare la bruciatura della parete di fondo a cui seguono scoppi ed incidenti vari.

Se anziché controllare il flusso termico si potesse controllare ΔT_{sat} ad esempio mediante scambi termici con corpi in cambiamento di fase (la cui temperatura, quindi, è costante durante il cambio di fase e nota per data pressione) allora si può andare a destra di C, con grande cautela.

³² Si ricordi che il vapore ha un volume specifico molto grande rispetto al liquido, almeno per pressioni lontane da quella critica.

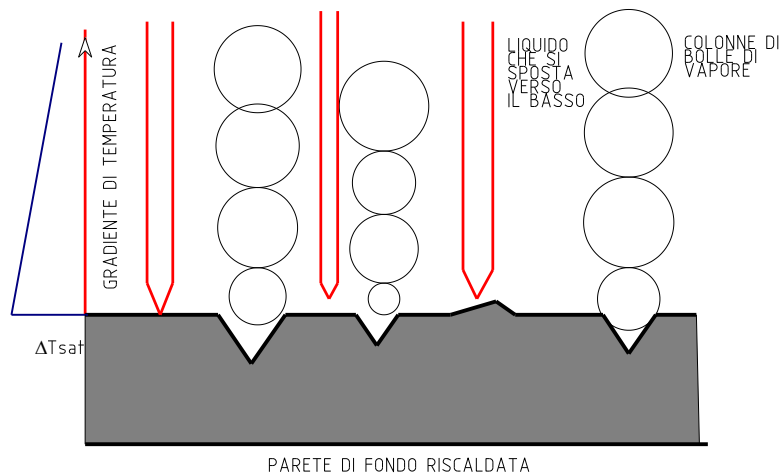


Figura 181: Formazione di colonne di bolle

Adesso la produzione di vapore è massiva e le colonne di vapore sono talmente numerose da toccarsi fra loro, specialmente in corrispondenza della parete di fondo. Si ha, pertanto, la situazione di Figura 182 ove si ha la formazione di uno strato di vapore continuo nel fondo.

Il liquido, per effetto delle velocità raggiunte a causa del restringimento delle sezioni di passaggio, riesce a squarciare questo velo di vapore e quindi a bagnare ancora, seppure parzialmente la parete di fondo.

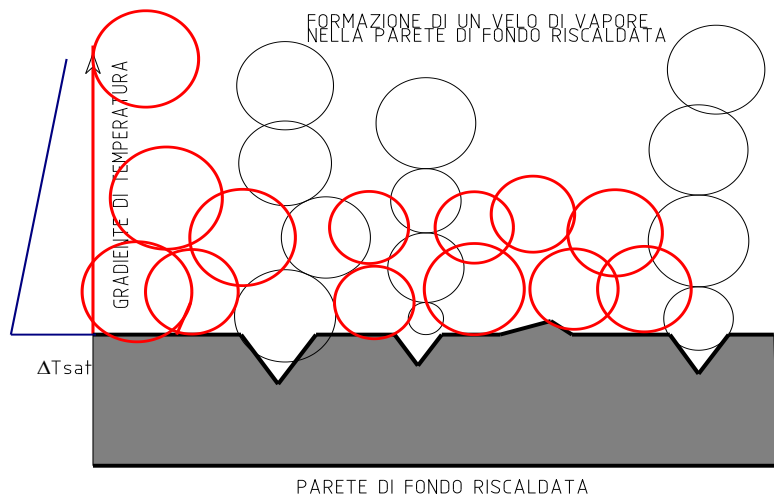


Figura 182: Formazione di uno strato di vapore sulla parete di fondo

L'alternarsi dello strato di vapore e dello strato di liquido giustifica la necessità di abbassare il flusso termico, come mostrato in Figura 174.

Si osservi, infatti, che la trasmissione attraverso il liquido è sempre più efficiente rispetto a quella con vapore e quindi la trasmittanza termica con liquido è maggiore di quella con vapore. Pertanto si ha:

$$K_{\text{liquido}} S \Delta T_{\text{sat}} > K_{\text{vapore}} S \Delta T_{\text{sat}}$$

e quindi a parità di S e di flusso termico imposta si ha un ΔT_{sat} maggiore nel caso di presenza del vapore.

Dal punto C ci si sposta, diminuendo il flusso termico, fino al punto L detto **punto di Leidenfrost** o di **calefazione** in corrispondenza del quale lo strato di vapore prende definitivamente il sopravvento rispetto al liquido che, pertanto, non riesce più a squarciare il velo di vapore.

In pratica il liquido galleggia su uno strato di vapore stabile sulla parete di fondo.

Questa situazione è facilmente riproducibile: se si gettano goccioline di acqua su una piastra di ferro infuocata si può osservare una sorta di galleggiamento delle goccioline sulla stessa piastra, fino a quando tutto il liquido diventa vapore.

Si ha in L una situazione di scambio termico con K_{vapore} e quindi con ΔT_{sat} elevati, come si vede dalla curva di Nukijama.

Ora però la situazione è stabile e quindi il flusso può nuovamente crescere al crescere di ΔT_{sat} . In Figura 183 si ha una sequenza fotografica della nascita di una bolla e del suo collasso in fase iniziale (ebollizione nucleata).

Si può osservare come l'implosione della bolla provochi un micro moto convettivo locale che incrementa fortemente lo scambio liquido – vapore.

E' questa una delle motivazioni forti della grande efficacia di scambio termico in questa tipologia di ebollizione.

In Figura 184 si ha una analoga sequenza di immagini dell'implosione di una bolla non più in fase nucleata ma del tutto sviluppata.

11.2 CORRELAZIONI DI SCAMBIO TERMICO PER L'EBOLLIZIONE

Le correlazioni di scambio termico si basano su esperienze di laboratorio in varie situazioni pratiche (cioè accoppiamento di liquidi e metalli vari). Si definisce un numero di Reynolds di bolla dato dalla relazione:

$$\text{Re}_b = \frac{\dot{m}_v D_b}{\mu_l}$$

ove con \dot{m}_v si è indicata la portata di vapore per unità di superficie, D_b il diametro della bolla al momento del distacco, μ_l la viscosità del liquido.

La correlazione di scambio sperimentale (*Zuber*) è la seguente:

$$q = \mu_l r \sqrt{\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma}} \left(\frac{c_p \Delta T_{\text{sat}}}{r \text{Pr}_l^s C_{sf}} \right)^3$$

ove r è il calore latente di vaporizzazione, ρ_l e ρ_v sono le densità del liquido e del vapore, Pr_l è il numero di Prandtl del solo liquido saturo, s e C_{sf} opportuni coefficienti dati dalle varie combinazioni di liquidi e materiali e σ è la tensione superficiale dell'interfaccia liquido - vapore.

Il flusso termico massimo, cioè il *flusso critico*, può essere calcolato con la relazione:

$$q_{\text{critico}} = 0.18 \rho_v r \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v) \sigma}{\rho_v^2} \right]^{1/4} \left(\frac{\rho_l}{\rho_l - \rho_v} \right).$$

11.3 EBOLLIZIONE CON LIQUIDI IN MOVIMENTO

Consideriamo adesso il caso che l'ebollizione avvenga con liquido in movimento all'interno di un condotto, come raffigurato in Figura 186.

Il flusso termico è ceduto lungo la superficie laterale del condotto (si immagini un tubo bollitore all'interno di una caldaia).

Il liquido entra nel condotto in condizioni di sottosaturazione.

Man mano che procede verso l'alto il liquido si riscalda fino a quando, con le stesse modalità viste in precedenza per l'ebollizione statica, si formano le prime bolle di vapore (*ONB*) sottoraffreddate e poi, ancora procedendo verso l'alto, si formano delle vere e proprie bollicine che si liberano nella matrice liquida.

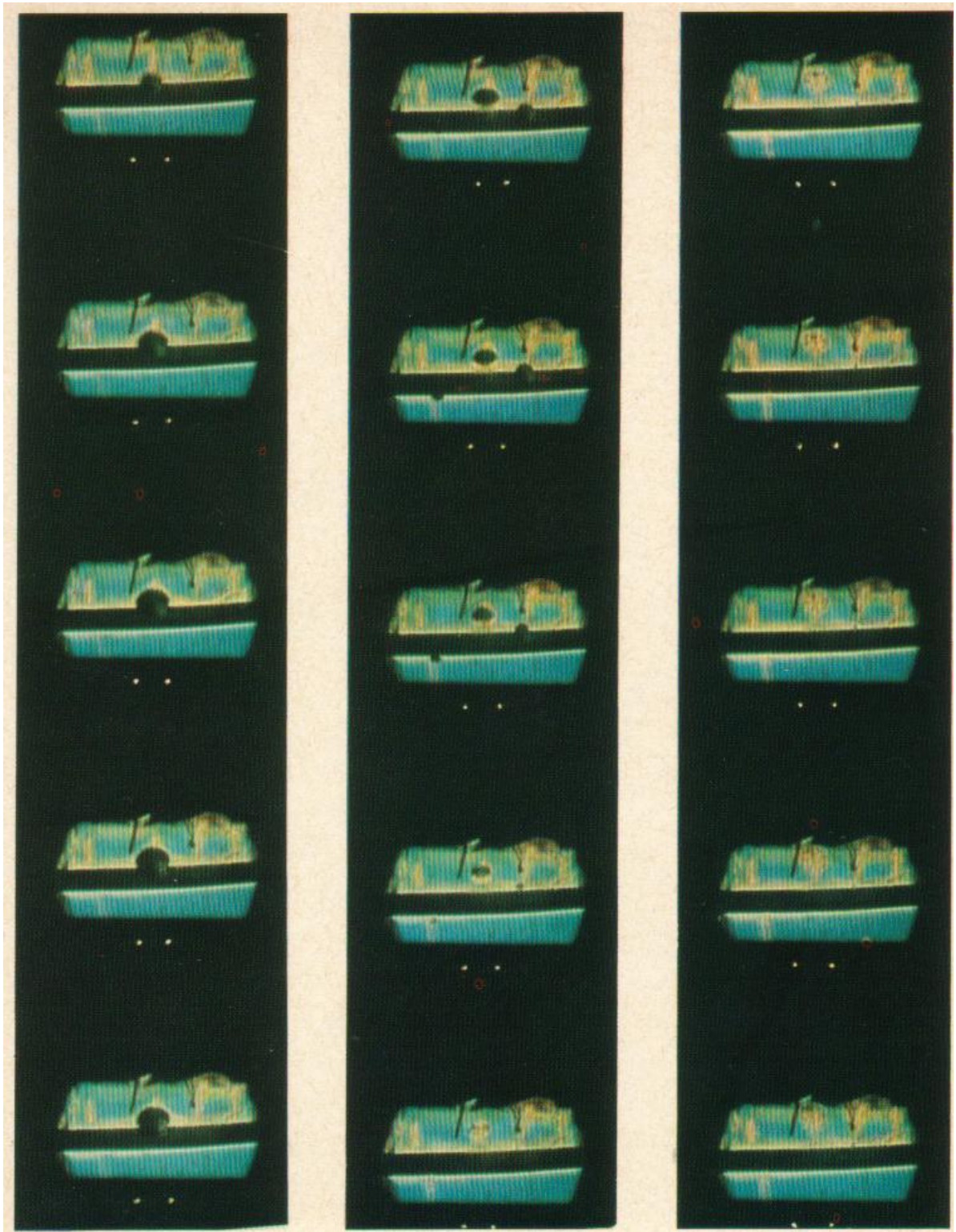


Figura 183: Sequenza di ebollizione nucleata statica attorno ad un filo caldo

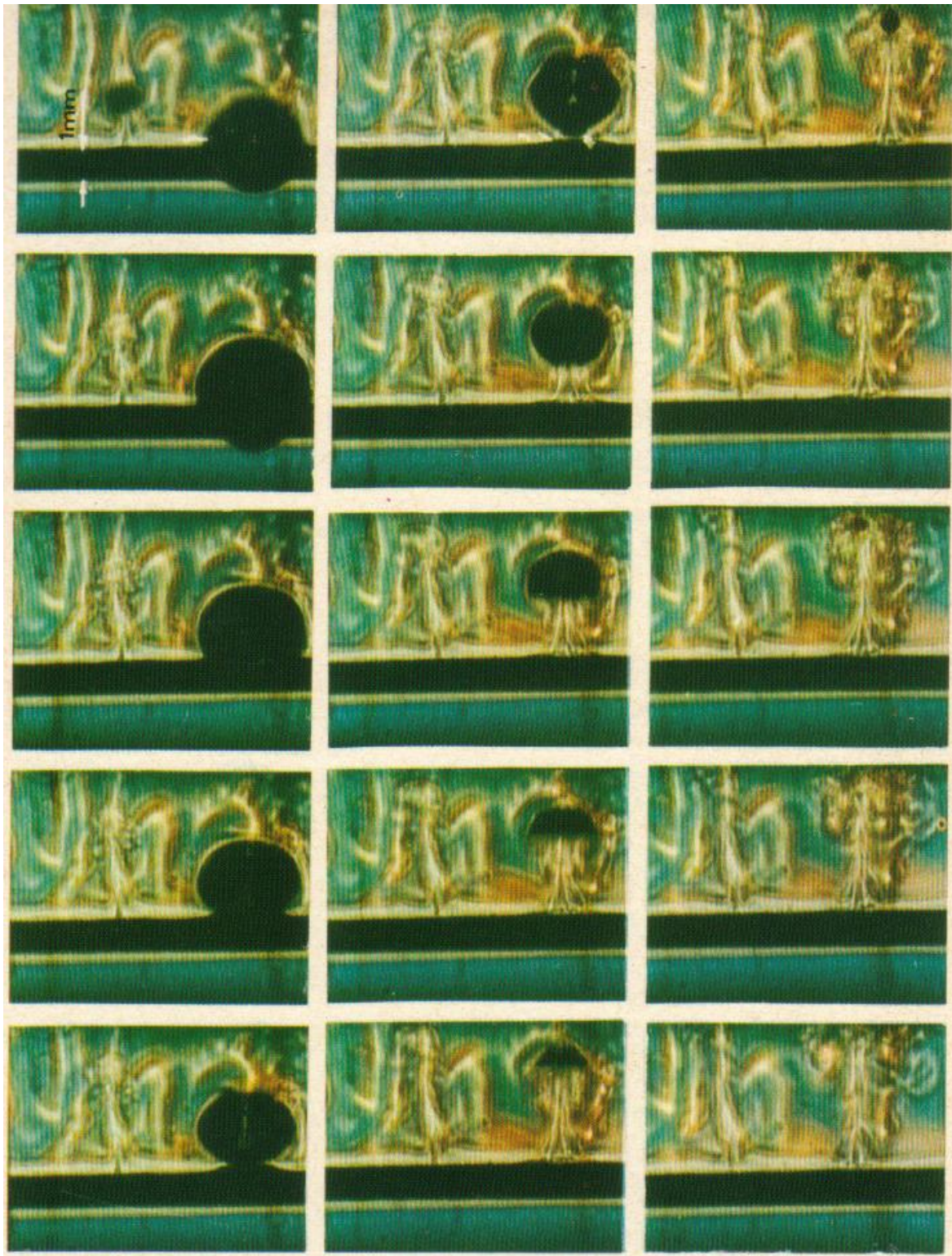


Figura 184: Sequenza delle fasi di implosione di una bolla completa

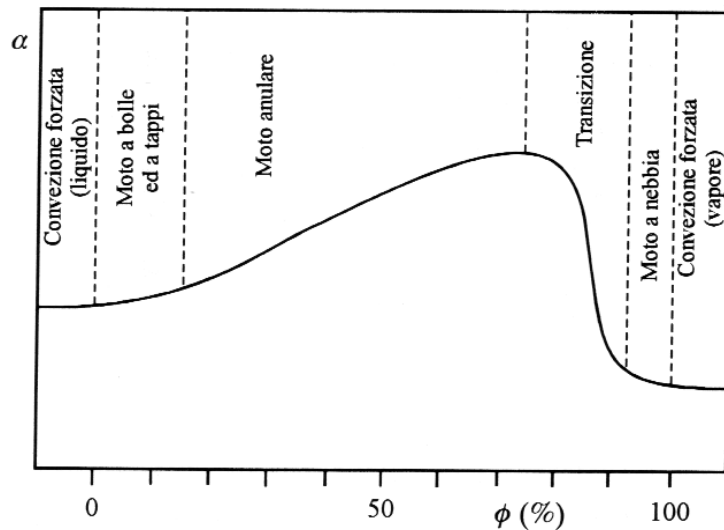


Figura 185: Curva di Nukijama per ebollizione dinamica (α è il coefficiente di convezione)

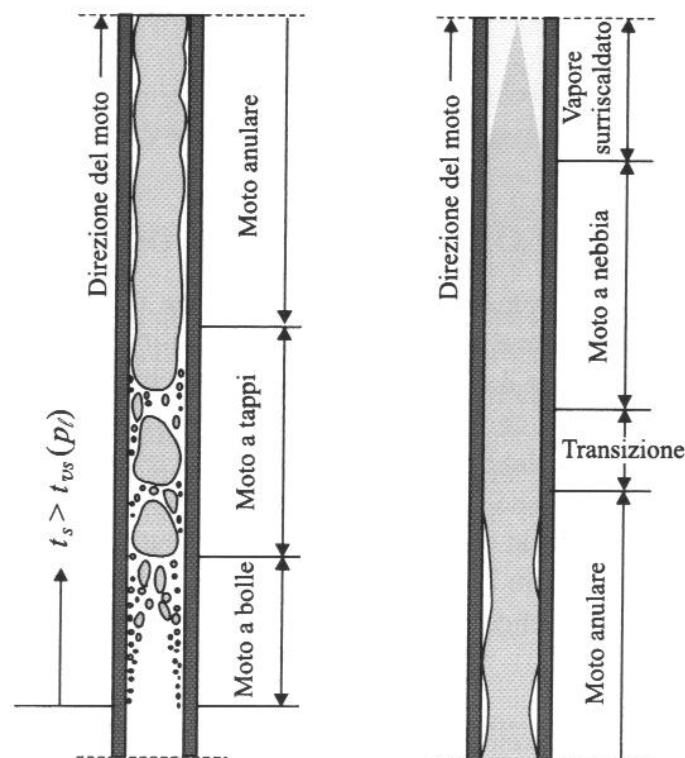


Figura 186: Ebollizione dinamica

Si ha, quindi, il **moto a bolle** di Figura 186. All'aumentare del flusso termico ricevuto si hanno sempre più bollicine che finiscono con il toccarsi formando bolle di dimensioni maggiori, dei veri e propri tappi di vapore e si ha il **moto a tappi**.

Procedendo ancora verso l'alto il vapore che si forma diviene massivo e tale da formare uno strato anulare interno al condotto, con pareti ancora bagnate dal liquido, **moto anulare**. Ad un certo punto il liquido alle pareti viene sostituito dal vapore e si ha un punto di crisi termica analogo al punto di *burn out* visto in precedenza.

Adesso si dice **punto di dry out** e cioè *punto di asciugatura*. Anche in questo caso se il vapore bagna le pareti il ΔT_{sat} cresce molto ed improvvisamente. In questo caso si hanno valori del salto di ΔT_{sat} inferiori a quelli in ebollizione statica e i tubi normalmente usati possono resistere benissimo.

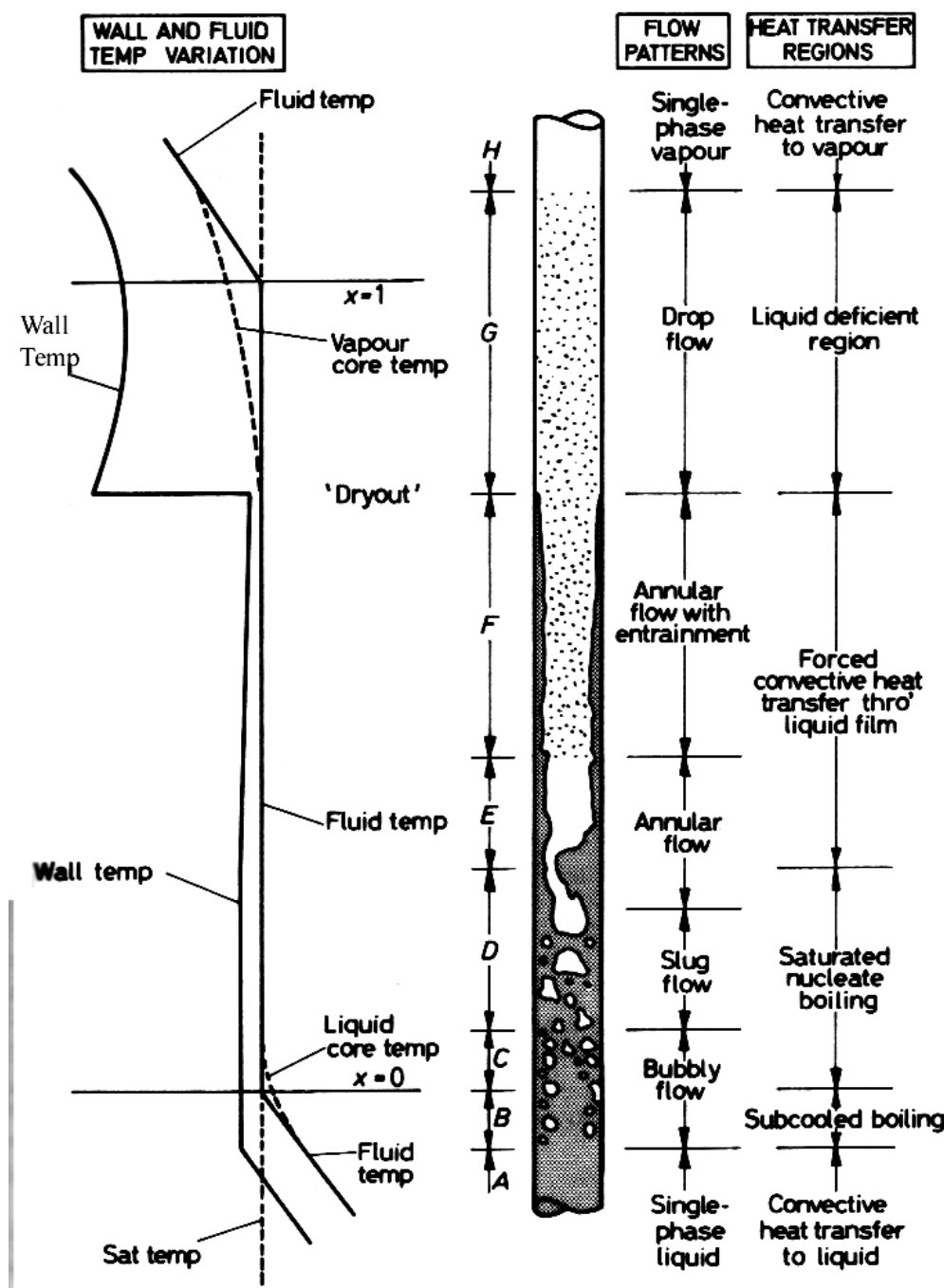


Figura 187: Distribuzione di temperatura lungo un tubo bollitore

Oltre il *punto di dry out* si ha un moto nel quale goccioline residue di liquido galleggiano in una matrice di vapore. Si ha il **moto a nebbia** utilizzato in alcune applicazioni impiantistiche.

L'andamento del tipo di moto unitamente alla distribuzione della temperatura lungo il tubo bollitore sono riportati in Figura 187. E' opportuno osservare che il tipo di moto sopra indicato non avviene sempre allo stesso moto in qualunque situazione sperimentale.

Ad esempio, per tubi orizzontali si hanno configurazioni di moto diverse con moto *stratificato* anziché anulare. Inoltre si possono avere anche unioni di masse liquide per formare una specie di tappi (*moto a slug*) che non ha corrispondenza nel moto verticale.

Per conoscere il tipo di flusso che si viene ad instaurare in un condotto non si hanno metodi certi per cui si utilizzano mappe sperimentali non sempre affidabili data la grande variabilità dei parametri.

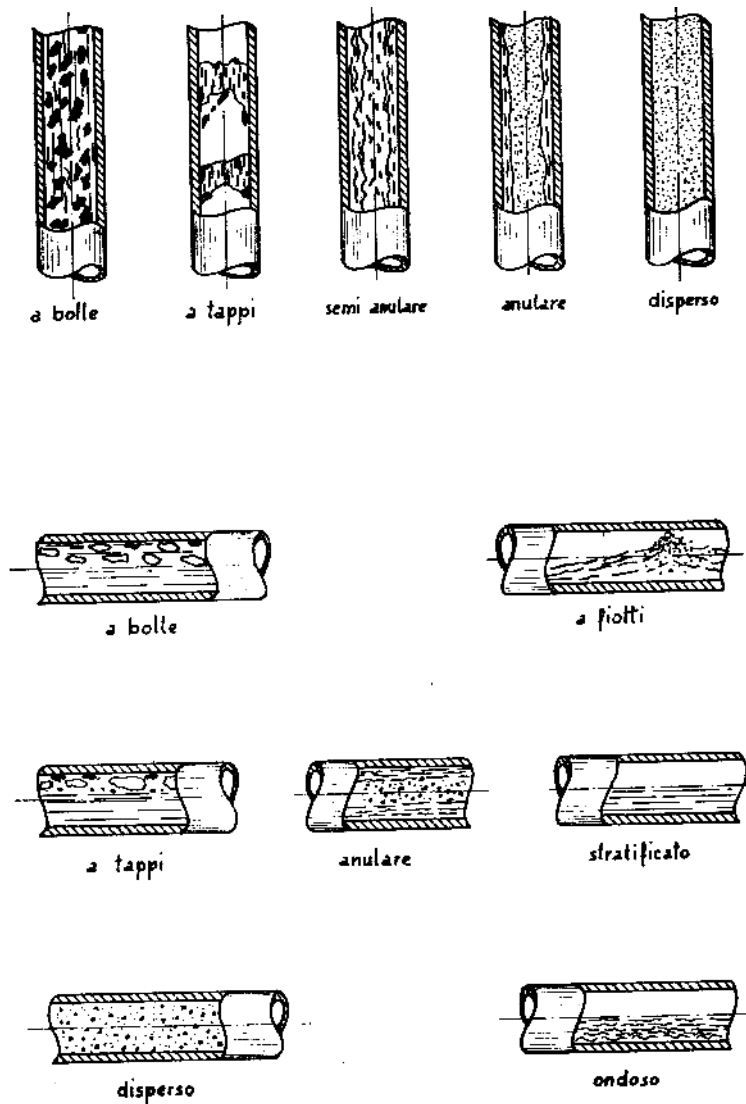


Figura 188: Tipo di moto in un tubo bollitore orizzontale

In Figura 189 si ha un tipico diagramma detto *a zone* per individuare, con approssimazione non sempre accettabile, il tipo di moto che si può instaurare in un tubo bollitore orizzontale.

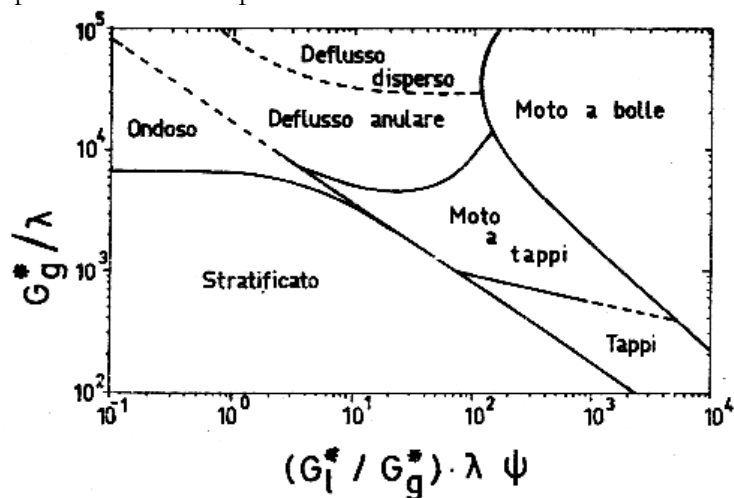


Figura 189: Diagramma a zone per il tipo di moto

Nel caso di ebollizione dinamica si hanno vari metodi per calcolare il coefficiente di convezione termica che portano a forme analitiche del tipo:

$$q = af(p)\Delta T_{sat}^b$$

con a e b costanti sperimentali opportune.

Chen consiglia di usare un coefficiente di convezione termica dato dalla somma di una componente dovuta alla convezione microscopica ed una convezione macroscopica.

Quest'ultima si può determinare mediante la relazione di Dittus – Boelter modificata:

$$h_{eb,mac} = 0.023 \text{Re}_b^{0.8} \text{Pr}_l^{0.4} \frac{\lambda_l}{D_H}$$

ove Re_b è il numero di Reynolds corrispondente al deflusso bifase dato dalla relazione:

$$\text{Re}_b = \text{Re}_l \cdot F$$

con F fattore correttivo empirico funzione del parametro di Martinelli, X_{tt} , definito come radice quadrata del rapporto fra la caduta di pressione nella fase liquida e la caduta di pressione nella fase aeriforme ed è dato a sua volta dalla relazione:

$$X_{tt} = \sqrt{\frac{\Delta p_l}{\Delta p_a}} = \left(\frac{1-x}{x} \right)^{0.9} \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} \right)^{0.5} \left(\frac{\mu_l}{\mu_v} \right)^{0.1}$$

con x titolo del vapore.

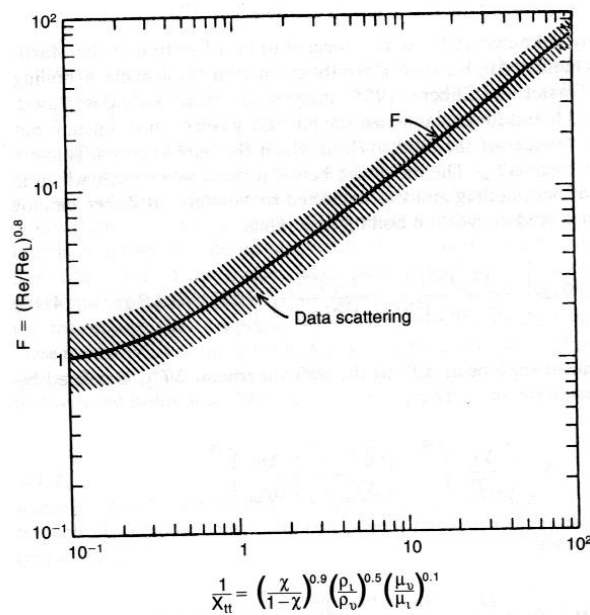


Figura 190: fattore di correzione F

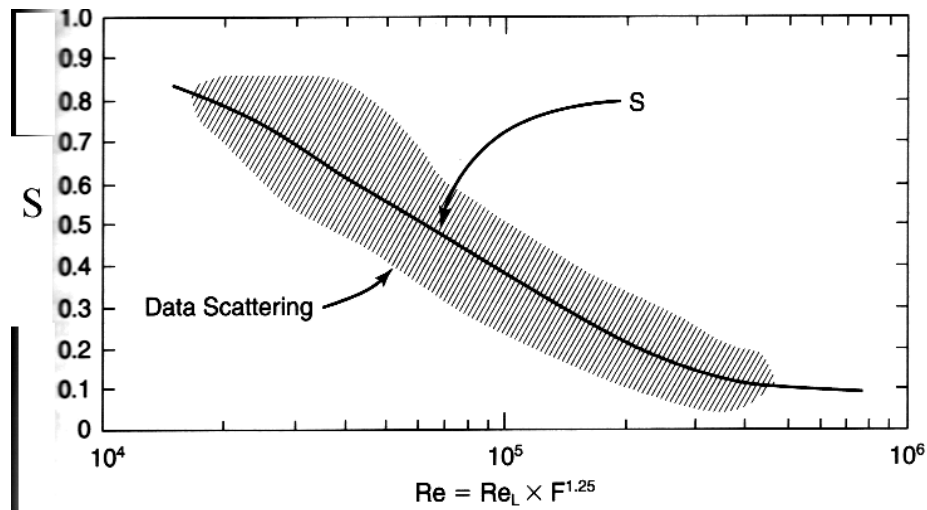
Il coefficiente di convezione microscopica è fornito dalla relazione:

$$h_{eb,mic} = 0.000122 \frac{\lambda_l^{0.79} c_{p_l}^{0.45} \rho_l^{0.49}}{\sigma^{0.5} \mu_l^{0.29} r^{0.24} \rho_v^{0.24}} \Delta T_{sat}^{0.24} \Delta p^{0.75} S$$

con S fattore correttivo funzione di Re_b . Il flusso termico critico è dato da:

$$q_{critico} = \frac{1400 \left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^{0.5}}{d^{0.2} \left(\frac{l}{d} \right)^{0.15}}$$

valida per acqua e con pressioni fino a 7 bar.

Figura 191: Fattore di correzione S

11.4 LA CONDENSAZIONE

Il processo inverso dell'ebollizione è la *condensazione* che può avvenire sia *a gocce* che per *film*. Il primo tipo (a gocce) è molto efficiente e rappresenta l'analogo dell'ebollizione nucleata.

Sfortunatamente perché questa avvenga occorre avere superfici di condensazione *non bagnabili* in modo che le goccioline di condensato restino isolate. Ciò si raggiunge spalmando le superfici con speciali additivi chimici o ricoprendole di lamine d'oro e di materiale plastico.

L'uso continuo porta comunque ad un decadimento delle proprietà superficiali e quindi alla necessità di rinnovamento delle superfici stesse. Con la condensazione a gocce si può arrivare a coefficienti di convezione fino ad $1 \text{ MW/m}^2\text{K}$. Più facile da avere e controllare è la *condensazione a film* nella quale si ha un processo di condensazione massivo (analogo dell'ebollizione di massa) con formazione di un film di condensato che scorre lungo la parete fredda, come indicato in Figura 192.

Il problema della condensazione è stato studiato da Nusselt ad inizio del novecento e la sua teoria, pur se semplificata, rimane ancora oggi valida. Nusselt suppone che il condensato si muova in regime stazionario con moto laminare lungo la parete e che il profilo del film di condensato sia liscio, cioè non si formino onde o corrugazioni.

Le equazioni della quantità di moto si riducono alla sola equazione in y e cioè:

$$\rho_l \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{dP}{dy} + \mu_l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho_l g$$

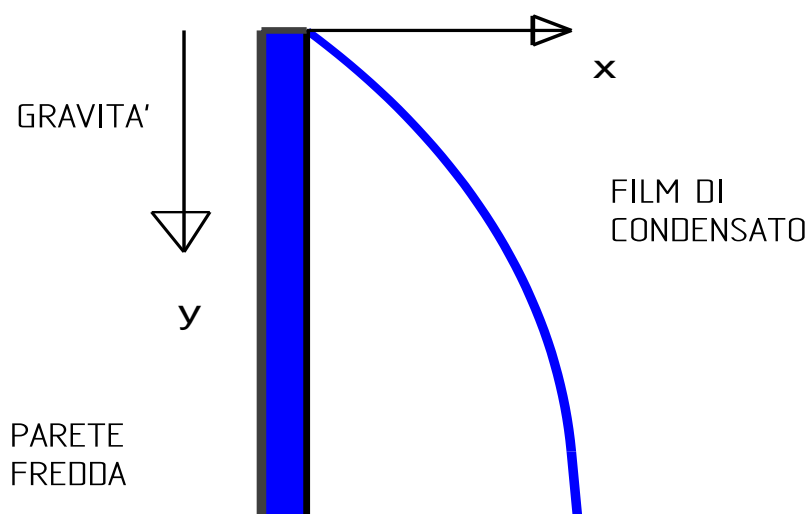


Figura 192: Formazione del film di condensato

L'ultimo termine rappresenta l'azione della gravità sull'elemento di volume di condensato. Il film di liquido si suppone sottile e in tale ipotesi il gradiente di pressione nel liquido risulta eguale (per la seconda equazione della conservazione della quantità di moto) a quello nel vapore, cioè si ha:

$$\frac{dP}{dy} = \rho_v g$$

La prima equazione della quantità di moto può essere riscritta, per effetto della precedente osservazione, in altro modo:

$$\underbrace{\rho_l \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\text{Inerzia}} = \underbrace{\mu_l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\text{Attrito}} + \underbrace{g(\rho_l - \rho_v)}_{\text{Alleggerimento}}$$

In questa relazione sono evidenziate le forze in gioco e il loro bilanciamento. Assumiamo, ancora, che le forze di inerzia siano trascurabili (per lo strato sottile) rispetto alle forze di attrito e quindi si può scrivere ancora:

$$\underbrace{\mu_l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\text{Attrito}} + \underbrace{g(\rho_l - \rho_v)}_{\text{Alleggerimento}} = 0$$

Questa equazione del secondo ordine va integrata due volte in x con le condizioni al contorno:

- $v=0$ per $x=0$, cioè scorrimento nullo alla parete;
- $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ per $x=\delta$, cioè taglio nullo all'interfaccia liquido-vapore, avendo indicato con δ lo spessore corrente del film liquido ad ordinata y ;

Si ottiene allora la seguente distribuzione di velocità:

$$v(x, y) = \frac{g}{\mu_l} (\rho_l - \rho_v) \delta^2 \left[\frac{x}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

In questa relazione non è ancora noto lo spessore δ del film di condensato. Nota la velocità del condensato si può calcolare la sua portata che vale:

$$\dot{m}_l = \int_0^\delta \rho_l u dx = \frac{g \rho_l}{3 \mu_l} (\rho_l - \rho_v) \delta^3$$

La portata di liquido condensato è qui misurata in $[kg/(ms)]$ ed è espressa per unità di lunghezza nella direzione normale al piano di Figura 192. Il vapore che va condensando cede il suo calore latente di condensazione e il calore sensibile di desurriscaldamento, supponendo che la temperatura di parete sia inferiore alla temperatura di saturazione del vapore alla pressione in cui esso si trova.

$$\bar{h} = \int_0^\delta \rho_l v \left[h_f - c_{p,l} (T_{sat} - T) \right] dx$$

ove si è considerata l'entalpia del fluido saturo h_f e non quella del liquido sottoraffreddato (perché a contatto con la parete fredda, $T_p < T_{sat}$). Nusselt suppose (e quest'ipotesi è ancora oggi valida) che la temperatura locale T sia distribuita linearmente lungo lo spessore del film di condensato e cioè si abbia:

$$\frac{T_{sat} - T}{T_{sat} - T_p} \approx 1 - \frac{x}{\delta}$$

per cui integrando la precedente relazione dell'entalpia totale di condensazione si ottiene:

$$\bar{h} = \underbrace{\left[h_f - \frac{3}{8} c_{p,l} (T_{sat} - T_p) \right]}_{h'_{lv}} \dot{m}_l$$

La quantità in parentesi quadra è l'entalpia totale del liquido condensato. L'entalpia ricevuta dal liquido viene, a regime, trasmessa verso la parete per conduzione termica e quindi deve essere:

$$q''_p = \lambda_l \frac{T_{sat} - T_p}{\delta}$$

ove λ_l è il coefficiente di conducibilità termica del liquido condensato. A regime si deve avere che il flusso di condensazione per una lunghezza dx deve eguagliare quello di conduzione e quindi:

$$\left[h_f - \frac{3}{8} c_{p,l} (T_{sat} - T_p) \right] d\dot{m}_l = \lambda_l \frac{T_{sat} - T_p}{\delta} dx$$

Combinando questa relazione con quella della portata di condensato si ottiene:

$$\frac{\lambda_l v_l (T_{sat} - T_p)}{h'_{lv} g (\rho_l - \rho_v)} dy = \delta^3 d\delta$$

Integrando e ricordando che per $y=0$ è $\delta=0$ si ha:

$$\delta(y) = \left[x \frac{4\lambda_l v_l (T_{sat} - T_p)}{h'_{lv} g (\rho_l - \rho_v)} \right]^{1/4}$$

Pertanto lo spessore del condensato cresce con x .

Il coefficiente di convezione termica può adesso essere calcolato dalla relazione:

$$h_y = \frac{q''_p}{T_{sat} - T_p} = \frac{\lambda_l}{\delta} = \left[\frac{\lambda_l^3 h'_{lv} g (\rho_l - \rho_v)}{4 y v_l (T_{sat} - T_p)} \right]^{1/4}$$

Integrando su tutta la lunghezza della parete si ottiene il coefficiente di convezione media:

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_y dy = \frac{h_{y=L}}{1 + (-1/4)} = \frac{4}{3} h_{y=L}$$

ossia:

$$\bar{h}_L = 0.943 \left[\frac{h'_{lv} g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3}{\mu_l L (T_{sat} - T_p)} \right]^{0.25}$$

Per calcolare il coefficiente di scambio termico convettivo si utilizza la teoria di Nusselt che porta alla seguente correlazione per il calcolo del valore medio sulla lunghezza L

$$\bar{h}_L = 0.943 \left[\frac{h'_{lv} g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3}{\mu_l L (T_{sat} - T_p)} \right]^{0.25}$$

In forma adimensionale la precedente si può scrivere:

$$Nu_L = 0.943 \left[\frac{h'_{lv} g \rho_l (\rho_l - \rho_v) L^3}{\mu_l \lambda_l (T_{sat} - T_p)} \right]^{0.25}$$

Oggi si hanno correlazioni più precise e sofisticate di quella di Nusselt e in particolare l'entalpia di condensazione viene data dalla relazione:

$$h'_{lv} = h_{lv} + 0.68 c_{p,l} (T_{sat} - T_p)$$

che tiene conto anche di eventuali moto ondosi del liquido e di condizioni di turbolenza che possono manifestarsi a partire da una certa sezione.

Per banchi di tubi si utilizza la correlazione di *Chen*:

$$\bar{h}_L = 0.728 \left[1 + 0.2 \frac{c_p (T_s - T_p)}{r} (n-1) \right] \left[\frac{\rho_l (\rho_v - \rho_l) g h_{lv} \lambda^3}{n d \mu_l (T_s - T_p)} \right]^{0.25}$$

ove n è il numero di tubi di diametro d .

11.5 I TUBI DI CALORE (*HEAT PIPE*)

Una interessante applicazione di quanto sopra visto per l'ebollizione e la condensazione si ha nei *tubi di calore* (*Heat Pipe*) schematizzati in Figura 193. Si tratta di un tubo le cui dimensioni possono essere di pochi millimetri e di metri, a seconda dei casi, all'interno del quale è posto un vapore saturo nelle condizioni di temperatura e pressione di esercizio.

Nella zona inferiore si ha la testata calda nella quale viene ceduto calore al fluido che, per conseguenza, vaporizza.

Per effetto di microcavità create all'interno del tubo si hanno movimenti di vapore verso l'alto (ma il fenomeno è indipendente dalla gravità per effetto della micro capillarità creata nel tubo). In alto si ha una testata fredda nella quale si asporta calore provocando il raffreddamento e quindi la condensazione del vapore. Questo cede il suo calore latente di condensazione e pertanto il trasporto di calore dal basso verso l'alto è molto efficace.

Il liquido condensato scende verso il basso sempre per capillarità, aderendo alle pareti laterali del tubo. In questo modo si riprende il ciclo di ebollizione (endotermica) in basso e condensazione (esotermica) in alto. Il tubo di calore, quindi, è un sistema efficace di trasporto di calore dalla zona a contatto con la testata calda verso la zona a contatto con la testata fredda.

La capillarità interna al tubo di calore consente il funzionamento in qualsiasi condizioni, anche in assenza di gravità. Pertanto questa tecnica viene utilizzata, ad esempio, in applicazioni spaziali, in geotermia, in energia solare, in elettronica per il raffreddamento di microprocessori.

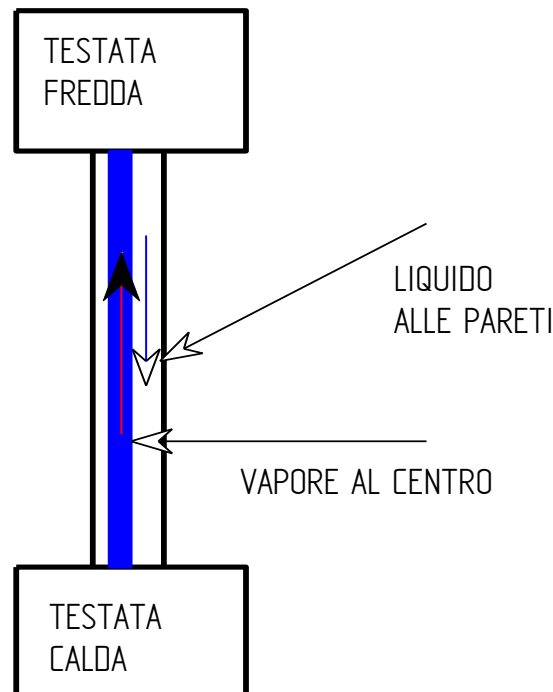


Figura 193: Schematizzazione del tubo di calore

Una applicazione recente in elettronica è costituita da una testata calda che viene posta sulla superficie di un microprocessore interno ad un computer portatile³³ ed una testa fredda collegata alla parte esterna del coperchio (dietro lo schermo) che funge, così, da radiatore.

Il calore generato dal microprocessore viene portato dai micro tubi di calore sulla superficie esterna del coperchio e da questo disperso per convezione ed irraggiamento nell'ambiente.

Questo sistema è stato ben ingegnerizzato ed ha un costo stimato, su scala industriale, di 25 \$ e quindi tale da non aggravare il costo complessivo del computer. Con l'aumentare della potenza termica prodotta dai microprocessori questo sistema sarà sempre più conveniente.

In energia solare si utilizzano i tubi di calore con freon come fluido di lavoro. Lo schema funzionale è illustrato nella Figura 194.

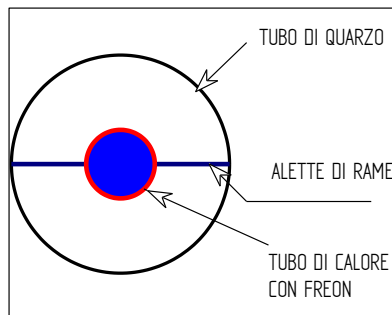


Figura 194: Sezione di un collettore solare a tubo di calore

Si tratta di tubi al quarzo, quindi trasparenti, all'interno dei quali si pone un tubo di calore con due alette laterali in rame. Le alette, investite dalla radiazione solare e per l'effetto serra che si genera all'interno del tubo di quarzo, convertono la radiazione solare in calore che viene trasmesso verso la zona centrale ove è presente il tubo di calore.

Rispetto alla configurazione di Figura 193 manca la testata calda sostituita dalle superfici alettate lungo tutto la lunghezza del tubo di calore. E' però presente la testata fredda che viene inserita all'interno di un grosso tubo all'interno del quale passa l'acqua di refrigerazione che, pertanto, viene riscaldata e quindi trasporta l'energia utile all'esterno.

Il tubo di calore ha dei limiti di funzionamento dovuti al fatto che la sezione di passaggio del liquido può essere interrotta nel caso in cui la generazione di vapore (di elevato volume specifico) sia superiore al limite consentito dalla sezione stessa.

Si definisce, quindi, un *flusso critico di flusso* come il flusso massimo consentito nella testata calda senza interruzione della circolazione del flusso interno.

³³ Il computer portatili presentano condizioni operative più critiche rispetto a desktop perché la componentistica è racchiusa in spazi limitati e miniaturizzati e perché l'utilizzo di sistemi di raffreddamento attivi consumano energia che riduce la durata delle batterie di alimentazione. Le ultime generazioni di computer usano un contenitore in lega di magnesio che è leggera ma è anche buona conduttrice di calore. Pertanto il calore prodotto dal microprocessore viene disperso da tutta la superficie di appoggio del computer e in parte dal coperchio per convezione termica naturale.

12 BIBLIOGRAFIA

Testi fondamentali

1. G. CAMMARATA: “*Fisica Tecnica Ambientale*”, Dispense A.A. 2001/2002, Facoltà di Architettura, Siracusa.
2. G. CAMMARATA: “*Impianti Termotecnici*” Vol. 1 ÷ 3, Dispense A.A. 2004-2005, Facoltà di Ingegneria di Catania.
3. G. CAMMARATA: “*Complementi di Impianti Termotecnici*”, Volume unico, A.A. 2005-2005, Facoltà di Ingegneria di Catania
4. G. CAMMARATA: “*Impianti Tecnici Edili*” Vol. 1 e 2, Dispense A.A. 2005-2006, Facoltà di Architettura, Siracusa.
5. G. CAMMARATA: “*Climatologia dell’ambiente costruito*”, Vol. I e II, Dispense A.A. 1999/2000, Facoltà di Architettura, Siracusa.
6. A. CAVALLINI – L. MATTAROLO: “*Termodinamica Applicata*” . Ed. CLEUP Padova
7. Y. A. CENGEL: “*Termodinamica e Trasmissione del Calore*”, Mc. Graw Hill, 1998
8. M. FELLI: “*Lezioni di Fisica Tecnica*” . Vol. 1. Ed. ESA
9. A. SELLERIO: “*Fisica Tecnica*”, Vol. I e II, Ed. Pezzino, Palermo
10. H. CALLEN :” *Termodinamica*”, Ed. Tamburini
11. Y. ZEMANSKY: “*Calore e Termodinamica*”, Ed. Zanichelli
12. A. CAVALLINI, M. SOVRANO: “*Gasdinamica*”, Patron Editore, Padova
13. A BONACINA - A CAVALLINI – L MATTAROLO: “*Trasmissione del Calore*”. CLEUP. Padova
14. GUGLIELMINI - PISONI : “*Elementi di Trasmissione del Calore* “. Ed. VESCHI
15. MASTRULLO – MAZZEI - NASO - VANOLI: “*Fondamenti di trasmissione del calore*”. Ed. Liguori Napoli. Vol. 1 per la teoria e Vol. 2 per le esercitazioni.
16. L. C. THOMAS: “*Fundamentals of heat transfer*”. Ed. Prentice Hall Inc.
17. M JACOB: “*Heat Transfer*”, Vol. 1, N.Y., 1949.
18. A. SACCHI – G. CAGLIERIS : “*Climatizzazione*”, UTET 1977
19. A. BADAGLIACCA: “*Fondamenti di trasmissione del calore*”, Aracne, 1997
20. H. BUCKIUS: “*Fundamentals of Engineering Thermodynamics*”, Mc Graw Hill
21. MORAN-SHAPIRO: “*Fundamentals of Engineering Thermodynamics*”, J. Wiley e Son
22. MYERS: “*Engineering Thermodynamics*”, Prentice Hall
23. J.A. DUFFIE – W.A. BECKMAN: “*Solar Engineering of thermal processes*”, J. Wiley, 1991
24. CADZOW, MARTENS: “*Discrete time and computer control systems*”, Prentice Hall, 1970.
25. ASHRAE: “*Fundamentals*”, cap. 26. 1981 e seguenti: 1985,1989,1993
26. AICARR: “*Mini Guida CARR*”, Vol 1, Milano 1998

INDICE GENERALE

<u>1</u>	<u>ENTROPIA PER I GAS IDEALI</u>	<u>2</u>
1.1	ENTROPIA NEL CAMBIAMENTO DI FASE	2
1.2	PIANO TERMODINAMICO DI GIBBS	3
1.2.1	SIGNIFICATO DELLA SOTTOTANGENTE NEL PIANO (T,S)	3
1.3	PIANO DI MOLLIER O ENTALPICO	5
1.4	PROCESSI ISOENTROPICI E ADIABATICI	6
	Espansione isoentropica e reale	6
	Compressione isoentropica e reale	7
<u>2</u>	<u>STUDIO ELASTO-TERMOMETRICO E ENERGETICO-CALORIMETRICO DEI CORPI</u>	<u>9</u>
	Esempio di studio Energetico – Calorimetrico	10
<u>3</u>	<u>EXERGIA</u>	<u>12</u>
3.1	EXERGIA DI UN SISTEMA APERTO STAZIONARIO	13
	Caso dei sistemi chiusi	15
	Caso di sistemi senza scambi di energia con l'esterno	15
3.2	TEOREMA DI GOUY STODOLA	15
3.3	COSTRUZIONE DI BOSNIAKOVIC PER L'EXERGIA	16
3.4	RENDIMENTO EXERGETICO DI ESPANSIONE	17
3.5	RENDIMENTO EXERGETICO DI COMPRESSIONE	18
3.6	IL FATTORE DI QUALITÀ, FQ	19
3.7	ESPRESSIONI DEI RENDIMENTI ENERGETICI ED EXERGETICI	19
<u>4</u>	<u>I FLUIDI REALI</u>	<u>21</u>
	Equazione di Van der Waals	23
	Equazione di Beattie - Bridgeman	24
	Equazione di Benedict – Webb - Rubin	25
	Equazione del Viriale	25
	Equazione di Dietirici	25
4.1	ESPERIENZA DI JOULE - THOMPSON	25
<u>5</u>	<u>MACCHINE TERMICHE</u>	<u>29</u>
5.1	RENDIMENTI IDEALI E REALI	29
5.1.1	RAPPORTO DEI LAVORI	30
5.2	LA MACCHINA A VAPORE (CICLO RANKINE)	31
5.2.1	IL CICLO TERMODINAMICO IDEALE	32
5.2.2	CONSUMO SPECIFICO DI VAPORE	34
5.2.3	COMPONENTI DELLE CENTRALI TERMICHE A VAPORE	35
	La Caldaia	35
	La Turbina a vapore	36
	Condensatore	38
	Pompe di alimentazione in caldaia	38

5.2.4	CICLO HIRN	38
5.2.5	CICLI RIGENERATIVI	41
5.2.6	CICLI A SPILLAMENTO	42
5.2.7	COMBUSTIBILI UTILIZZATI NEGLI IMPIANTI A VAPORE	44
5.3	FUNZIONAMENTO DEI GENERATORI DI CALORE	44
	Temperatura teorica di combustione	47
	Rendimenti e Perdite	47
5.3.1	CICLI COMBINATI E COGENERATIVI	48
	Impianti a derivazione e condensazione	48
5.3.2	IMPIANTI A CONTROPRESSIONE	50
5.3.3	DIAGRAMMA DI SUNKEY	51
	Perdite per combustione adiabatica nel generatore	51
	Perdite nello scambio di calore fumi – acqua nel generatore termico	52
	Perdite per lo scarico dei fumi al camino	52
	Perdite per espansione non isoentropica del vapore nella turbina	53
	Perdite nel condensatore	54
5.4	MOTORI ENDOTERMICI	54
5.4.1	CICLO OTTO	54
	Ciclo Termodinamico	55
5.4.2	CICLO DIESEL	57
	Ciclo Termodinamico	58
5.4.3	CICLO SABATHE ’	62
5.4.4	COMBUSTIBILI UTILIZZATI DAI DIESEL	64
5.5	IL CICLO JOULE - BRYTON	64
	Rapporto dei lavori e Backwork ratio	67
5.5.1	CICLI JOULE - BRYTON CON TRASFORMAZIONI NON ISOENTROPICHE	70
	Rapporto dei lavori per cicli non isoentropici	72
5.5.2	CICLI JOULE – BRYTON RIGENERATIVI	73
	Ciclo J-B con trasformazioni non isoentropiche e rigenerazione termica	75
5.5.3	IMPIANTI DI TERRA CON TURBINE A GAS HEAVY DUTY	79
5.5.4	COMBUSTIBILI UTILIZZATI DALLE TURBINE A GAS	79
5.5.5	POSSIBILITÀ DI COGENERAZIONE DELLE TURBINE A GAS	80
5.6	LA MACCHINA DI CARNOT A CICLO INVERSO	82
5.7	MACCHINA FRIGORIFERA A COMPRESSIONE DI VAPORI	83
5.7.1	IMPIANTI FRIGORIFERI	88
	Impianti Frigoriferi a ciclo Joule – Bryton inverso	88
5.7.2	LAMINAZIONE	90
	Valvola Termostatica	90
5.7.3	FLUIDI FRIGORIGENI	91
	Il Problema dell’Ozono	92
	Rilascio dei CFC in ambiente	93
	Caratteristiche Termofisiche dei Fluidi Frigorigeni	94
5.8	MACCHINE FRIGORIFERE AD ASSORBIMENTO	99
5.8.1	FUNZIONAMENTO DELLA MACCHINA AD ASSORBIMENTO	100
5.9	RICHIAMI DI TERMODINAMICA DELLE SOLUZIONI	101
5.10	PROGETTO DI UN IMPIANTO AD ASSORBIMENTO	102
5.11	DETERMINAZIONE DEL CICLO AD ASSORBIMENTO	107
5.12	POMPA DI CALORE E SUE APPLICAZIONI	107
6	TERMOELETTRICITÀ	109
6.1	EFFETTO SEEBECK	109
6.2	EFFETTO PELTIER	110

6.3	EFFETTO THOMSON	111
6.4	REFRIGERAZIONE TERMOELETTRICA	111
6.5	GENERATORI TERMO ELETTRICI	114
<u>7</u>	<u>ALETTE</u>	<u>117</u>
7.1	BARRA INFINITAMENTE LUNGA	118
7.2	SBARRA CON TERMINAZIONE FINALE ADIABATICA	118
7.3	SBARRA DI LUNGHEZZA FINITA (CASO GENERALE)	119
7.4	EFFICIENZA DELLE ALETTE	120
7.5	PARETE ALETTATA	120
7.6	ALETTE ANULARI	121
7.7	PROFILO OTTIMIZZATO DELLE ALETTE	123
7.8	APPLICAZIONI NUMERICHE AL PROBLEMA DELLE ALETTE	124
<u>8</u>	<u>CONVEZIONE IN REGIME TURBOLENTO</u>	<u>126</u>
8.1	NUOVA TEORIA SULLA TURBOLENZA	127
8.2	LA DIFFUSIVITÀ MECCANICA TURBOLENTO	128
8.3	LA DIFFUSIVITÀ TERMICA TURBOLENTO	129
8.4	PROFILO UNIVERSALE DI VELOCITÀ	130
8.5	PROFILO UNIVERSALE DI TEMPERATURA	132
8.6	ALTRE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA CHIUSURA	134
8.6.1	ANALISI DEGLI ORDINI DI GRANDEZZA	134
8.7	SOLUZIONE DI BLASIUS DELLE EQUAZIONI PRE STRATO LAMINARE	135
8.8	SOLUZIONE DI BLASIUS DELLO STRATO LIMITE TERMICO	138
8.8.1	ANALOGIA DI COLBURN	139
8.8.2	LA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO	139
8.9	SOLUZIONE PER STRATO LIMITE TURBOLENTO DI UNA LASTRA	139
8.9.1	STRATO LIMITE SU SUPERFICI CILINDRICHE	140
8.10	CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE FORZATA	142
8.11	CONVEZIONE TERMICA LAMINARE NEI CONDOTTI	144
8.11.1	CONDOTTI A SEZIONE NON CIRCOLARE	148
8.12	CONVEZIONE TERMICA NEI CONDOTTI IN REGIME TURBOLENTO	149
8.13	CORRELAZIONE DI COLBURN PER MOTO TURBOLENTO	151
8.14	SCAMBIO TERMICO CON I METALLI LIQUIDI	152
8.14.1	ALGORITMO DI CALCOLO PER LA CONVEZIONE FORZATA	152
	Determinazione delle proprietà termofisiche	152
	Determinazione dei numeri di Reynolds e di Prandtl	153
	Utilizzo delle correlazioni di calcolo per la determinazione di Nu	153
	Calcolo del flusso termico	153
	Calcolo degli sforzi di attrito	153
<u>9</u>	<u>CONVEZIONE NATURALE</u>	<u>154</u>
	Equazione di continuità	154
	Equazione della quantità di moto	154
	Equazione dell'energia	156
9.1	ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE PER LA CONVEZIONE NATURALE	156
9.1.1	ANALISI ADIMENSIONALE PER LA CONVEZIONE NATURALE	157
9.1.2	PROFILO DI TEMPERATURA NELLO STRATO LIMITE TERMICO	159
9.1.3	STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO LAMINARE	160

9.1.4	STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO TURBOLENTO	161
9.1.5	CONVEZIONE NATURALE CON PARETE PIANA VERTICALE ISOTERMA	161
9.1.6	FLUSSO UNIFORME DALLA PARETE	162
9.2	CONVEZIONE NATURALE SU UNA LASTRA PIANA ORIZZONTALE	163
9.3	CONVEZIONE NATURALE PER CILINDRI ORIZZONTALI LUNGI	163
9.4	CONVEZIONE NATURALE IN CAVITÀ CHIUSE	164
9.4.1	CAVITÀ RISCALDATE DAL BASSO	166
9.5	CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE NATURALE	167
9.6	GETTI E PENNACCHI	168
<u>10</u>	<u>METODI NUMERICI PER LA FLUIDODINAMICA (CFD)</u>	<u>171</u>
10.1	LE PROBLEMATICHE DELLA SIMULAZIONE NUMERICA	171
10.2	LA FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE (CFD)	171
10.3	MODELLO AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER LA VISCOSITÀ TURBOLENTE	177
10.4	MODELLO A DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI (K-ε)	180
10.5	FONDAMENTI DELLA “<i>LARGE EDDY SIMULATION (LES)</i>”	182
10.6	ESEMPIO: SIMULAZIONE DI UNO SWIRLER	185
10.7	Costruzione della Geometria	186
10.8	EQUAZIONI DEL MODELLO, SOTTODOMINI E CONDIZIONI AL CONTOURNO	187
10.8.1	LA MESH DEL MODELLO	190
10.8.2	SOLUZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA	192
10.8.3	PLOTTAGGIO DEI RISULTATI E POST-PROCESSAMENTO	192
<u>11</u>	<u>EBOLLIZIONE E CONDENSAZIONE DEI FLUIDI</u>	<u>198</u>
11.1	EBOLLIZIONE STATICA	198
11.2	CORRELAZIONI DI SCAMBIO TERMICO PER L'EBOLLIZIONE	205
11.3	EBOLLIZIONE CON LIQUIDI IN MOVIMENTO	205
11.4	LA CONDENSAZIONE	212
11.5	I TUBI DI CALORE (<i>HEAT PIPE</i>)	215
<u>12</u>	<u>BIBLIOGRAFIA</u>	<u>217</u>
	Testi fondamentali	217

INDICE DELLE FIGURE

Figura : Piano di Gibbs	3
Figura : Andamento delle isocore e delle isobare nel piano (T,s)	4
Figura : Rappresentazione di un ciclo di Carnot nel piano (Ts)	4
Figura : Andamento delle trasformazioni nel piano di Gibbs	4
Figura : Significato della sottotangente nel piano (Ts)	5
Figura : Rappresentazione della Legge di Mayer sul piano (Ts)	5
Figura : Piano entalpico di Mollier	6
Figura : Calcolo della temperatura nel piano di Mollier	6
Figura : Espansione ideale e reale	7
Figura : Compressione ideale e reale	8
Figura : Exergia di una massa a temperatura T_1	12
Figura : Sistema termodinamico stazionario	14
Figura : Costruzione di Bosniakovic	17
Figura : Espansione ideale e reale nel piano (h,s)	17
Figura :Costruzione di Bosniakovic per il rendimento exergetico	18
Figura : Costruzione di Bosniakovic per il rendimento exergetico di compressione	18
Figura : Andamento del Fattore di Carnot	19
Figura :Curve di Amagat per i gas reali	21
Figura : Curve di Amagat per alcuni gas reali	22
Figura : Curve di Amagat per valori delle grandezze ridotte	22
Figura : Isoterme di Van der Waals	24
Figura : Esperienza di Joule - Thompson	26
Figura : Andamento delle curve isoentalpiche	26
Figura : Rapporto dei rendimenti in funzione del Rapporto Lavori	30
Figura : Curva di Andrews per il vapore d'acqua	31
Figura : Ciclo di Carnot con vapore saturo	33
Figura : Ciclo delle macchine a vapore di Rankine	33
Figura : Ciclo Rankine nel piano (Ts)	34
Figura : Confronto fra il ciclo Rankine e il ciclo di Carnot	34
Figura : Layout di una caldaia di potenza per grandi centrali	36
Figura : Schema di una turbina a vapore	37
Figura : Turbina a vapore aperta	37
Figura : Turbina a vapore ad anelli contrapposti	38
Figura : Spostamento del punto D verso sinistra al crescere della pressione in caldaia	39
Figura : Ciclo Hirn nel piano (T,s)	40
Figura : Ciclo Hirn con due surriscaldamenti	40
Figura : Ciclo Rankine con rigenerazione termica	41
Figura : Layout di un ciclo Hirn con 4 spillamenti	42
Figura : Cicli a spillamento	43
Figura : Bilancio energetico per un generico recuperatore di calore	43
Figura : Sistema termodinamico di un generatore	45
Figura : Bilancio energetico per un generatore	46
Figura ; Ciclo a vapore a derivazione e condensazione	49
Figura : Schema di un impianto a vapore con turbina in contropressione	49
Figura : Schema di un impianto a contropressione con due turbine e due livelli di scarico vapore	50
Figura : Schema di un sistema cogenerativo con turbina a vapore a contropressione per reti di teleriscaldamento	50
Figura : Cicli Hirn con un solo surriscaldamento	51
Figura : Layout del ciclo Hirn ai fini del calcolo delle perdite	52
Figura : Diagramma di Sunkey per un ciclo Hirn	53
Figura : Ciclo Otto nel piano (p,v)	55

Figura : Ciclo Otto per motori a benzina	56
Figura : Ciclo Otto reale nel piano (p,v)	57
Figura : Ciclo Diesel nel piano (p,v)	58
Figura : Ciclo ideale Diesel	59
Figura : Confronto fra ciclo Otto e Diesel a pari rapporto di compressione	60
Figura : Confronto fra i cicli Otto e Diesel a pari rapporto di compressione nel piano (p,v)	60
Figura : Confronto fra i cicli Otto e Diesel a pari temperatura massima	61
Figura : Confronto fra i cicli Otto e Diesel a pari temperatura massima nel piano (p,v)	61
Figura : Ciclo Diesel reale nel piano (p,v)	62
Figura : Ciclo Sabathè nel piano (p,v)	62
Figura : Ciclo ideale Sabathè	63
Figura : Ciclo Joule – Bryton con aria standard	65
Figura : Andamento del rendimento del ciclo Joule – Bryton e del Rapporto dei lavori	66
Figura : Layout del ciclo Joule – Bryton	67
Figura : Andamento del ciclo J-B al variare del rapporto delle pressioni a pari T_{max}	67
Figura : Ciclo Bryton in una turbina di tipo aeronautico	69
Figura : Turbina a gas heavy duty Mitsubishi da 131 MW	69
Figura : Ciclo Joule Bryton con trasformazioni adiabatiche	71
Figura : Rendimenti reali per T_C/T_A pari a 3.5 e 5 e ciclo ideale	72
Figura : Rigenerazione termica in un ciclo J-B ideale	74
Figura : Ciclo rigenerativo con l'evidenziazione del calore trasferito	74
Figura : Layout di un ciclo Joule Bryton ideale con rigenerazione	75
Figura : Andamento del rendimento del ciclo J-B ideale rigenerato e del ciclo ideale	75
Figura : Ciclo reale J-B con rigenerazione termica	76
Figura : Ciclo rigenerativo reale con aree di scambio	76
Figura : rendimento di un ciclo JB reale rigenerato con vari rapporti T_C/T_A ed $\varepsilon=0.85$	78
Figura : Rendimento di un ciclo JB reale rigenerato con vari rapporti T_C/T_A ed $\varepsilon=0.8$ ed $\varepsilon=0.7$	78
Figura : Andamento di un ciclo J-B reale con intercooler	79
Figura : Impianti a gas di terra	79
Figura : Bilancio energetico per una turbina a gas	81
Figura : Ciclo combinato a gas e a vapore	81
Figura : Ciclo combinato turbina a gas - vapore	82
Figura : Ciclo inverso	82
Figura : Ciclo inverso a compressione di vapori saturi	83
Figura : Ciclo frigorifero a compressione nel piano (T's)	84
Figura : Ciclo frigorifero reale con compressione adiabatica	84
Figura : Ciclo frigorifero con compressione multipla	86
Figura : Ciclo frigorifero con sottoraffreddamento prima della laminazione	86
Figura : Ciclo frigorifero con sottoraffreddamento e surriscaldamento	87
Figura : Ciclo frigorifero nel piano (h,p)	87
Figura : Layout del ciclo Joule inverso	89
Figura : Ciclo Joule inverso per frigoriferi a gas	89
Figura : batteria evaporatrice con valvola termostatica	90
Figura : Azione della valvola Termostatica	91
Figura : Layout della valvola termostatica	91
Figura : Uso di R11 in Occidente	93
Figura : Uso di R12 in Occidente	94
Figura : Uso combinato di R11 ed R12 in Occidente	94
Figura : Diagramma h-p per R22	96
Figura : Diagramma h-p per R134a	97
Figura : Diagramma h-p per R717 (Ammoniaca)	98
Figura : Schema di una macchina frigorifera ad assorbimento	99

Figura : Rappresentazione del ciclo ad assorbimento	100
Figura : Esempio di curve Vaporus – Liquidus	101
Figura : Esempio di curve (h,ξ)	102
Figura : Abaco di Bosnjacovic per la miscela Acqua – Ammoniaca	103
Figura : Ciclo ad assorbimento con recupero di calore	104
Figura : Ciclo ad assorbimento nel piano (h,ξ)	105
Figura : Particolare del ciclo del vapore	106
Figura : Bilancio delle portate al generatore	106
Figura : Schema di un sistema di tipo Split	108
Figura : Effetto Seebeck	109
Figura : Andamento del potere termoelettrico al variare della temperatura	110
Figura : Effetto Peltier	111
Figura : Schema di un frigorifero termoelettrico	112
Figura : Efficienza di frigorifero termoelettrico in funzione delle figura di merito	113
Figura : Schema costruttivo di un frigorifero Peltier	114
Figura : Schema di un generatore termo elettrico	115
Figura :Rendimento dei generatori termoelettrici	116
Figura : Schematizzazione di una aletta	117
Figura : Efficienza di una aletta rettangolare	120
Figura : Efficienza di una aletta rettangolare con soluzione esatta	121
Figura : Rappresentazione di una aletta circolare di spessore costante	122
Figura : Distribuzione della temperatura nelle alette cilindriche	123
Figura : Efficienza alette anulari	123
Figura : Profilo rettangolare, iperbolico e triangolare	124
Figura : Griglia di calcolo	124
Figura : Distribuzione della temperatura in una flangia	125
Figura . Distribuzione del flusso per un tubo flangiato	125
Figura : Pennacchio originato da un focolare in basso	128
Figura : Lunghezza di mescolamento termica	129
Figura : Scambio di quantità di moto e di energia fra particelle in moto turbolento	131
Figura : Profilo universale di velocità	132
Figura : Profili di velocità e di temperatura per moto su lastra piana riscaldata	133
Figura : Profilo universale di temperatura	134
Figura : Similitudine dei profili di velocità	136
Figura : Deflusso sopra superfici cilindriche	140
Figura : Fattore di Drag	141
Figura : Numero locale di Nusselt	141
Figura : f e Z per passo quadrato	142
Figura : f e Z per passo triangolare	142
Figura : Strato limite dinamico in un condotto circolare	145
Figura : Calcolo del diametro equivalente per uno scambiatore di calore	148
Figura : Diametro equivalente per condotti rettangolari	148
Figura : Convezione naturale con lastra piana verticale	155
Figura : Convezione naturale in una cavità chiusa	165
Figura : Cavità riscaldate dal basso (Celle di Bènard)	166
Figura : Formazione del getto (zona turbolenta)	169
Figura : Formazione di un pennacchio	170
Figura : Formazione di un pennacchio in una torcia di raffineria	170
Figura : Schema della modellizzazione fluidodinamica	172
Figura : Applicazione delle ipotesi spaziali e temporali al modello CFD	174
Figura : Gerarchia dei modelli di simulazione	176

Figura : Le tre bande caratteristiche dello spettro d'energia della turbolenza: scale energetiche, inerziali e dissipative	183
Figura : Strato limite turbolento in Large Eddy Simulation	184
Figura : Finestra iniziale FEMLAB	186
Figura : Modellazione geometrica dello swirler	186
Figura : Geometria completa del sistema studiato	187
Figura : Finestra di selezione dei sottomoduli di risoluzione	188
Figura : Finestra per il settaggio dei sottomoduli	189
Figura : Finestra per il settaggio delle condizioni al contorno	190
Figura : Finestra di settaggio per i parametri della mesh	190
Figura : Mesh del modello	191
Figura : Ingrandimento della mesh nella zona dello swirler	191
Figura : Finestra di gestione del solutore	192
Figura : Piani di sezione: campo di velocità	193
Figura : Sezione longitudinale del modello	193
Figura : Linee di flusso	194
Figura : Vettori velocità	194
Figura a: Ingrandimento della zona di formazione del vortice (posteriore)	195
Figura : Distribuzione radiale della componente assiale della velocità all'uscita del bruciatore	196
Figura : Distribuzione radiale della componente assiale della velocità a 20 cm dalla sezione d'uscita del bruciatore	196
Figura : Distribuzione della pressione all'uscita del bruciatore	197
Figura : Curva di Nukijama	199
Figura : Nascita di una bolla di vapore	200
Figura : Implosione della bolla	200
Figura : Scoppio della bolla	201
Figura : Distacco delle bolle	201
Figura : Equilibrio termodinamico della bolla	201
Figura : Implosione della bolla distaccata	203
Figura : Formazione di colonne di bolle	204
Figura : Formazione di uno strato di vapore sulla parete di fondo	204
Figura : Sequenza di ebollizione nucleata statica attorno ad un filo caldo	206
Figura : Sequenza delle fasi di implosione di una bolla completa	207
Figura : Curva di Nukijama per ebollizione dinamica (α è il coefficiente di convezione)	208
Figura : Ebollizione dinamica	208
Figura : Distribuzione di temperatura lungo un tubo bollitore	209
Figura : Tipo di moto in un tubo bollitore orizzontale	210
Figura : Diagramma a zone per il tipo di moto	210
Figura : fattore di correzione F	211
Figura : Fattore di correzione S	212
Figura : Formazione del film di condensato	212
Figura : Schematizzazione del tubo di calore	215
Figura : Sezione di un collettore solare a tubo di calore	216

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 1: Rapporto exergia-potere calorifico inferiore per alcuni combustibili	20
Tabella 2: Proprietà dei frazioni leggere per Diesel	64
Tabella 3: Proprietà dei frazioni pesanti per Diesel	64
Tabella 4: Proprietà dei combustibili gassosi per turbine a gas	80
Tabella 5: Proprietà dei combustibili liquidi per turbine a gas	80

Tabella 6: Efficienze frigorifere per varie tipologie di scambio	85
Tabella 7: Classificazione degli impianti frigoriferi	88
Tabella 8: Indici ODP per alcuni CFC	93
Tabella 9: Proprietà termofisiche di alcuni fluidi frigorigeni	95
Tabella 10: Confronto delle efficienze per funzionamento standard $-10, +30\text{ }^{\circ}\text{C}$	95
Tabella 11: Grandezze termodinamiche per R22	96
Tabella 12: Grandezze termodinamiche per R134a	97
Tabella 13: Grandezze termodinamiche per R717 (Ammoniaca)	98
Tabella 14: Altre soluzioni del problema della chiusura	135
Tabella 15: Soluzione dell'equazione di Blasius	137
Tabella 16: Correlazioni per convezione forzata	143
Tabella 17: Correlazioni per convezione forzata	143
Tabella 18: Correlazioni per convezione forzata	144
Tabella 19: Correlazioni per convezione forzata	145
Tabella 20: Correlazioni per convezione forzata	147
Tabella 21: Numeri di Nusselt per varie tipologie di condotti	150
Tabella 22: Correlazioni per la convezione naturale	167
Tabella 23: Correlazioni per la convezione naturale	167
Tabella 24: Correlazioni per la convezione naturale	168
Tabella 25: Correlazioni per la convezione naturale	168
Tabella 26: Correlazioni per la convezione naturale	168