

**UNIVERSITA' DI CATANIA
FACOLTA' DI INGEGNERIA**

FISICA TECNICA INDUSTRIALE

VOLUME SECONDO: TRASMISSIONE DEL CALORE

**TRASMISSIONE PER CONDUZIONE
TRASMISSIONE PER CONVEZIONE
TRASMISSIONE PER IRRAGGIAMENTO
EBOLLIZIONE – CONDENSAZIONE
TUBI DI CALORE - ALETTE
SCAMBIATORI DI CALORE**

PROF. ING. GIULIANO CAMMARATA

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E MECCANICA
SEZIONE DI ENERGETICA INDUSTRIALE ED AMBIENTALE**

AGGIORNAMENTO DEL 05/11/2007

FILE: FISICA TECNICA VOL 2 - TRASMISSIONE DEL CALORE.doc

AUTORE: PROF. ING. GIULIANO CAMMARATA

DATA ULTIMO AGGIORNAMENTO: 5 NOVEMBRE 2007

www.gcammarata.net
gcamma@diim.unict.it

Il presente volume può essere liberamente copiato e diffuso dagli Allievi per uso didattico e a condizione che rimangano invariati i riferimenti sopra indicati.

INTRODUZIONE ALLA TRASMISSIONE DEL CALORE

La *Trasmissione del Calore* è per gli Allievi probabilmente la parte più nuova della *Fisica Tecnica* poiché non è mai stata affrontata in altri corsi, come invece avviene, ad esempio, per la *Termodinamica*.

Questa Scienza si è sviluppata a partire dalla seconda metà dell'*ottocento* quando *Fourier* enunciò il suo postulato sulla conduzione termica attraverso una parete. Quella relazione pose le base, fra l'altro, ad una vera e propria rivoluzione culturale che ha portato negli anni 'settanta *Ilia Prigogine* a formulare le sue leggi sulla *Termodinamica Irreversibile* della quale altre volte si è fatto cenno nello studio della *Termodinamica Applicata*.

Il postulato di *Fourier* poneva per la prima volta in forma esplicita la *dipendenza fenomenologica* del flusso di calore ad una *differenza di temperatura*:

$$dQ^* = -\lambda \frac{dT}{ds} S d\tau$$

(si vedrà in seguito il simbolismo qui indicato) cosa che non andava d'accordo con l'impostazione della *Termodinamica Classica* per la presenza di una *freccia* nella trasmissione del calore (*da temperatura maggiore verso temperatura minore e mai viceversa, spontaneamente!*).

Successivamente molte leggi furono formulate sulla stessa falsariga del postulato di *Fourier*, ad esempio la *Legge di Fick* per la diffusione, la legge di *Ampère* per la corrente elettrica, la legge di *Bernoulli* per il moto dei fluidi reali. Tutte queste leggi avevano in comune il **legame funzionale fra un flusso** (*di calore, di massa, di corrente,*) con una causa prima e cioè una **differenza di potenziale** (ΔT , ΔV , ΔC , Δp ,.....).

Si cominciavano a porre le basi per le considerazioni entropiche di *Boltzmann* e di *Gibbs* e, negli ultimi due decenni, per la stessa *Termodinamica Irreversibile* di Y. Prigogine.

In breve vedremo che tutta la *Trasmissione del Calore* è basata sull'**irreversibilità** dovuta alla differenza di temperatura. Possiamo allora definire la *Trasmissione del Calore* più semplicemente come una applicazione della *Termodinamica* dei processi *Irreversibili*.

Questa Scienza assume oggi un'importanza fondamentale in tutti i settori della *Tecnica*, dalla *Meccanica* all'*Elettronica*, dall'*impiantistica* alla *energetica* degli edifici ed industriale e alla stessa vita dell'Uomo.

I meccanismi di scambio termico sono alla base di tutti i fenomeni reali sia perché direttamente voluti o perché indotti da trasformazioni passive per attrito in calore.

L'evoluzione dell'*Elettronica*, ad esempio, è oggi fortemente legata al miglioramento degli scambi termici. Si pensi, ad esempio, all'enorme densità di potenza termica dei transistori di potenza o dei tubi per impianti radar: si raggiungono gli stessi valori di densità di potenza (cioè di kW/m^2) degli impianti nucleari di potenza. Come fare a raffreddare questi componenti in modo che possano lavorare correttamente?

Tutti sappiamo che un moderno microprocessore consuma una potenza specifica (cioè riferita alla superficie) molto elevata ($70 W/cm^2 = 700 kW/m^2$) e che il suo raffreddamento è un problema gravoso da risolvere, specialmente per installazioni su computer portatili dove si hanno spazi ridotti e possibilità di scambi di calore con l'esterno estremamente difficili.

Le applicazioni e le ricadute industriali della *Trasmissione del Calore* sono immense e non facilmente riassumibili in questa sede.

Ogni impianto, ogni componente di macchine, ogni struttura progettata e costruita dall'Uomo è soggetta ai fenomeni di scambio termico e quindi di *Trasmissione del Calore*. E non si può neppure lontanamente immaginare una progettazione *cosciente* e *congruente* che non tenga conto dei fenomeni termici di qualunque natura essi siano.

Nei prossimi capitoli si affrontano gli argomenti principali della *Trasmissione del Calore* e in particolare gli argomenti classici:

- La *Conduzione termica*;
- La *Convezione termica*;
- L'*Irraggiamento termico*.

Si vedranno alcune applicazioni quali gli scambiatori di calore e i collettori solari.

L'impostazione degli argomenti è in questa sede volutamente tradizionale ritenendo l'impostazione della teoria del trasporto solistica ed ostica per gli allievi del corso di *Fisica Tecnica*.

Data la limitatezza del Corso, inoltre, non si potranno sviluppare argomenti importanti presenti nei corsi annuali di *Trasmissione del Calore*. In particolare non si è dato spazio ai fenomeni di diffusione oggi di fondamentale importanza, ad esempio, per i fenomeni ambientali.

Pur tuttavia si è voluto fare alcuni cenni ai metodi di risoluzione numerica sia per la conduzione che per la convezione lasciando ai corsi specialistici (*Termotecnica, Energetica, Impianti Termotecnici*) lo sviluppo più approfondito di questi argomenti.

L'impostazione che si è data a questo testo è, per necessità sia di spazio che di tempo, limitata alla trattazione degli argomenti più importanti.

Laddove possibile i singoli argomenti saranno presentati in modo completo, cioè incluse le dimostrazioni. In alcuni casi si presenteranno solamente i risultati finali.

Un po' di attenzione ho voluto prestare all'ebollizione, alla condensazione e ai fluidi bifase dei quali si farà cenno anche al calcolo delle perdite di pressione: questi argomenti risultano fondamentali nell'impiantistica di potenza (generatori di vapore, impianti industriali, impianti nucleari,...)

Una estensione ai testi fondamentali può aiutare ad approfondire gli argomenti trattati e a colmare eventuali mancanze di argomenti.

Si fa presente che nel biennio di laurea specialistica in Ingegneria Meccanica (per tutte le specializzazioni) è presente il corso di TermoFluidodinamica nel quale saranno approfonditi con maggior attenzione gli argomenti qui trattati.

Buon lavoro ragazzi!

Catania 05/11/2007

1 INTRODUZIONE ALLA TRASMISSIONE DEL CALORE

Si vuole qui presentare alcuni concetti alla base della *Trasmissione del Calore*. Non si intendi qui esaurita la trattazione di argomenti che da soli richiederebbero un intero corso annuale ma si ritiene necessario comunque affrontare gli argomenti che si ritengono più importanti per gli studi futuri degli Allievi Ingegneri.

La *Trasmissione del Calore* può avvenire con meccanismi diversi che possiamo qui classificare:

- *Conduzione;*
- *Convezione;*
- *Irraggiamento.*

A questi si aggiunge la *Diffusione* di massa (*e con essa anche di energia*) che in questa sede non viene affrontata. Ciascun meccanismo di trasmissione è caratterizzato da peculiarità legate ai materiali, alla topologia o anche alla geometria. Non tutti questi parametri è necessario che siano presenti nei meccanismi di scambio, come vedremo nel prosieguo.

Si tenga presente che l'esposizione separata dei meccanismi di scambio non deve mascherare la reale difficoltà che si ha nella pratica di affrontare globalmente la *Trasmissione del Calore* spesso somma di due o più modalità diverse. Così, ad esempio, il calore generato da transistor di potenza si trasmette per conduzione in superficie dove, per convezione e per irraggiamento viene disperso nell'ambiente esterno.

Le leggi fondamentali di ciascun meccanismo di trasmissione del calore sono le seguenti:

Conduzione Termica

Il già citato postulato di **Fourier** esprime il flusso termico (W) per conduzione attraverso una parete avente facce isoterme, di spessore s (m) e conducibilità termica¹ λ (W/mK), e con T_1 e T_2 le temperature superficiali (K) e di superficie S (m^2) secondo l'equazione:

$$\Delta Q = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{s} S$$

Convezione Termica

La *convezione termica* è un fenomeno complesso dato da un insieme di più fenomeni apparentemente semplici: essa è il risultato del movimento di fluidi (*attivato o non da dispositivi esterni*) che trasportano nel loro movimento energia termica. La complessità di questi fenomeni è formalmente mascherata dalla legge di definizione di **Newton** che si esprime nella forma:

$$Q = h \cdot S \cdot (T_p - T_f)$$

ove Q è il flusso in W , h è il coefficiente di convezione termica (W/m^2K , di cui dirà nel prosieguo), T_p la temperatura della parete calda e T_f la temperatura del fluido (K).

Irraggiamento Termico

E' una forma particolare di trasmissione del calore attuata mediante *onde elettromagnetiche* che, una volta assorbite da un corpo, si trasformano in energia interna e quindi in calore.

Tutti i corpi al di sopra dello $0\ K$ emettono onde elettromagnetiche. La legge fondamentale è di **Stefan – Boltzmann** che per corpi grigi² si esprime nella forma:

$$Q = \sigma_0 \varepsilon S F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

¹ Si dirà più diffusamente di questo parametro nel prosieguo.

² Si vedrà nel prosieguo la definizione di *corpi grigi*.

con σ_0 costante pari a $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$, ε emissività specifica del corpo (di cui si parlerà nel prosieguo) e T la temperatura assoluta (K), F_{12} è il *fattore di vista* relativo allo scambio fra corpo 1 e corpo 2 (di cui parimenti si dirà nel prosieguo).

1.1 CONDUZIONE IN UNA PARETE PIANA

Se consideriamo due superfici *isotermiche* a temperatura T_1 e T_2 , ove $T_1 > T_2$, all'interno di un materiale che supponiamo, a solo scopo euristico e semplificativo, *omogeneo* ed *isotropo*³ allora il più volte citato postulato di *Fourier* dice che (vedi Figura 1):

$$\Delta Q^* = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{s} S \Delta \tau \quad [1]$$

ove si ha il seguente simbolismo:

- λ è una proprietà termofisica del corpo e viene detta **conducibilità termica**. Le sue unità di misura sono, nel S.I. $[W/(mK)]$ mentre nel S.T. sono $[kcal/(hm^\circ C)]$;
- s lo spessore di materia fra le due superfici isoterme considerate, unità di misura $[m]$;
- S è la superficie attraverso la quale passa il calore; unità di misura $[m^2]$;
- $\Delta \tau$ è l'intervallo di tempo considerato; unità di misura $[s]$;
- ΔQ^* è l'energia termica (in J) trasmessa nell'intervallo Δt attraverso la superficie S di materiale avente spessore s e conducibilità termica λ e temperature T_1 e T_2 .

La [1] si può scrivere anche in forma differenziale:

$$dQ^* = -\lambda \frac{dT}{ds} S d\tau \quad [2]$$

Il segno *negativo* che compare nella [1] e [2] deriva dall'enunciato stesso del secondo principio della termodinamica secondo il quale il calore si trasmette, *spontaneamente*, da temperature maggiori verso temperature minori; la differenza $T_2 - T_1$ è **negativa** e pertanto il segno meno serve a rendere positiva la quantità di calore trasmessa uscente dalla superficie più calda.

1.1.1 LA CONDUCIBILITÀ TERMICA

I coefficiente λ rappresenta una **proprietà termofisica** del corpo in esame. Ciò significa che il suo valore è funzione solo del *tipo di materiale* scelto e dalle sue condizioni fisiche (cioè a quale temperatura e in quale stato fisico, solido o liquido o gas, si trovi). Nella Tabella 1 seguente sono riportati alcuni valori di λ per i materiali più usuali. I valori sopra indicato mostrano come λ vari molto dai materiali gassosi a solidi e in quest'ultimo caso ai conduttori.

Questi ultimi presentano, infatti, i valori di λ più elevati, in accordo con la teoria della conduzione elettrica che li vede primeggiare sugli altri materiali. In effetti il meccanismo di conduzione termica è associato strettamente, ove possibile, al meccanismo di *conduzione elettronica*: sono, infatti, sempre gli elettroni che oltre a trasportare elettricità trasportano energia (di *agitazione termica*) lungo i metalli.

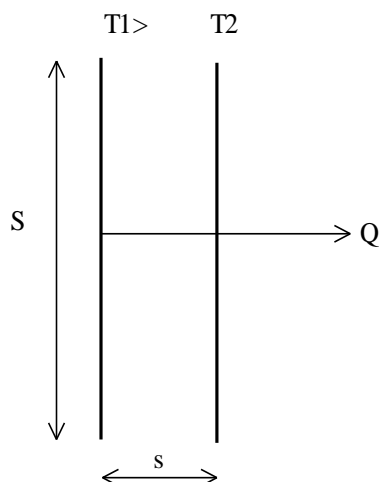
Per la conduzione termica di tipo elettronico il parallelismo fra conduzione elettrica dovuta agli elettroni liberi nella banda di conduzione e conduzione termica ad essi associati è ben descritto dalla relazione di *Wiedemann – Franz – Lorenz* la quale ci dice che:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_e} = G \cdot T$$

ove G è una costante pari a $24.5 \cdot 10^9 \text{ W}^2/\text{A}^2\text{K}^2$. In definitiva il meccanismo conduttivo, sia elettrico che termico, è lo stesso ed è dovuto essenzialmente al movimento delle cariche elettroniche.

³ Un corpo si dice *omogeneo* se ha caratteristiche chimiche costanti in tutti i suoi punti e si dice *isotropo* se il suo comportamento non dipende dalla direzione considerata. Ad esempio l'acqua è un materiale omogeneo ed isotropo, il legno è omogeneo ma non isotropo poiché ha caratteristiche che variano con la direzione delle fibre.

Appare a prima vista strano che il *diamante* abbia valori di λ elevatissimi: esso, si ricorda, è un cristallo perfetto di atomi di carbonio disposti in modo geometricamente esatto ai vertici di un icosaedro.



Il calore si trasmette dalla superficie a temperatura T_1 verso la superficie a temperatura inferiore T_2 , nel verso indicato.

Le superfici sono isoterme e il materiale omogeneo e isotropo, di spessore s e estensione S .

Le caratteristiche trasmissive del materiale sono date dal coefficiente di conducibilità termica.

Il postulato di Fourier si esprime dicendo che la quantità di energia termica trasmessa è proporzionale, secondo il coefficiente di conducibilità, alla differenza di temperatura ($T_1 - T_2$) e alla superficie S ed è inversamente proporzionale allo spessore di materiale s fra le due superfici considerate.

Figura 1: Postulato di Fourier per la conduzione.

Materiale	Conducibilità [W/(mK)]
Vapore acqueo saturo a 100 °C	0,0248
Ammoniaca	0,0218
Elio	0,1415
Ossigeno	0,0244
Acqua	0,5910
Alcool Etílico	0,1770
Mercurio	7,9600
Olio di oliva	0,1700
Pomice	0,2300
Polistirolo espanso (25 kg/m ³)	0,0350
Sughero in lastre	0,0500
Calcestruzzo	0,93-1,5
Laterizi	0,7-1,3
Terreno asciutto	0,8200
Acciaio	30-50
Ferro	75
Piombo	35
Oro	296
Rame	380
Argento	419
Diamante	2100

Tabella 1: Conducibilità di alcuni materiali

Il diamante, proprio per il fatto di non avere elettroni liberi di conduzione, è anche il miglior isolante elettrico. Allora come mai conduce così bene il calore?

In realtà è proprio la sua struttura cristallina perfetta la giustificazione dell'elevato valore di λ : i cristalli, infatti, oscillano perfettamente in modo elastico e così possono trasmettere l'agitazione termica delle molecole da un punto all'altro molto bene.

Pertanto nei cristalli puri la conduzione avviene non più per via *elettronica* bensì per via *elastica*⁴.

Ciò spiega anche perché il ferro conduca meglio il calore dell'acciaio: si ricorda, infatti, che l'acciaio è una lega del ferro e quindi una composizione di ferro con percentuali di carbonio, zinco, nichel, cromo, ecc, e pertanto questi componenti ostacolano la conduzione reticolare del ferro e la conduzione termica è solo elettronica e ad un livello inferiore di quella del ferro puro.

Quanto sopra detto giustifica l'affermazione che λ sia una **proprietà termofisica** dei corpi e quindi reperibile in tutti i manuali specializzati. Tutte le *proprietà termofisiche* (e in genere tutte le proprietà *fisiche*) sono catalogate e raccolte in Manuali tecnici specialistici. La conducibilità termica λ varia con la temperatura dei corpi in modo diverso a seconda dello stato fisico in cui si trovano.

In genere, tranne alcune eccezioni riportate nei manuali tecnici, la conducibilità termica λ cresce con la temperatura nei solidi e nei liquidi.

Nei gas l'aumento della temperatura comporta un incremento dell'agitazione atomica o molecolare e quindi un maggiore intralcio reciproco fra gli atomi o le molecole e quindi λ diminuisce.

Fra le eccezioni importanti alla regola sopra indicata si ricorda che **l'acqua** fra 0 e 4 °C ha densità maggiore del ghiaccio e anche λ maggiore. La relazione [2] può essere scritta anche in modo più comodo, ponendo $q'' = \frac{q}{s}$, nella seguente forma :

$$q'' = -\lambda \frac{\Delta T}{s} = -\lambda \text{ grad}(T) = \lambda \nabla T \quad [3]$$

ove si ha:

q'' calore trasmesso per unità di tempo e di superficie (detto anche *flusso termico specifico*).
Unità di misura $[W/m^2]$ o $[kcal/(hm^2)]$.

La trasmissione del calore per conduzione nei corpi è materia alquanto complessa da studiare al di fuori del caso limite sopra indicato con il postulato di Fourier.

1.2 EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

Allorquando si desidera studiare il problema della trasmissione del calore in un corpo di geometria non semplice occorre scrivere e risolvere l'*equazione generale della conduzione* ottenuta da un bilancio di energia per un elemento di volume interno ad un corpo. Per un generico corpo solido possiamo scrivere l'equazione di bilancio dell'energia, come già indicato in Termodinamica, nella forma:

Energia_Entrante – Energia_Uscente + Energia_Sorgente = Energia_Accumulata

e quindi, in forma analitica:

$$-\int_S q'' \cdot \vec{n} dA + \int_V q''' dv = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \rho u dv \quad [4]$$

In questa espressione il primo termine rappresenta il flusso termico netto (*differenza fra quello entrante ed uscente*) attraverso la superficie del corpo, il secondo termine è relativo all'energia generata internamente (*sorgente*) e il secondo membro rappresenta l'energia *accumulata* che, per un solido, coincide con la sola energia interna u . Applicando il teorema della divergenza al primo membro si può scrivere:

$$-\int_S q'' \cdot \vec{n} dA = -\int_V \nabla q'' dv \quad [5]$$

⁴ Si suole dire che la conduzione è di tipo *fononica* mutuando l'attributo dal *fonone* che è la più piccola quantità di energia oscillatoria (suono) a data temperatura in un cristallo, in analogia con il fotone che è la più piccola quantità di energia di un'onda elettromagnetica (luce).

Pertanto sostituendo nella [4], tenendo conto che è $\nabla q'' = \nabla(-\lambda \nabla T)$ per Fourier, passando ai differenziali si ha:

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad [6]$$

ove q''' è il calore per unità di volume (W/m^3) generato all'interno del corpo, a è la diffusività termica data dal rapporto $a = \lambda/\rho c$. Il laplaciano $\nabla^2 T$ può essere espresso in vari modi a seconda della *geometria* di riferimento. Per le geometrie più comuni si hanno le seguenti espressioni:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{per coordinate rettangolari} \quad [7]$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{per coordinate cilindriche} \quad [8]$$

La risoluzione dell'equazione della conduzione non è agevole al di fuori di geometrie semplici ed è oggetto di studi approfonditi che fanno ricorso a metodologie matematiche complesse⁵.

Oggi si cerca di superare a tali complessità con il ricorso ai metodi numeri approssimati che possono essere utilizzati su computer da tavolo (vedi §1.2.6).

Qualunque sia il metodo utilizzato per integrare l'equazione occorre porre correttamente le condizioni al contorno, in genere spazio-temporali, che possono essere essenzialmente di quattro tipi.

Condizione del 1° tipo (di Dirichlet:)

- Occorre conoscere le temperature in tutti i punti della superficie ad un dato istante, cioè occorre conoscere la funzione $T(x, y, z, \tau)$ per l'istante iniziale;

Condizione del 2° tipo (di Neumann)

- Occorre conoscere i *gradienti* di temperatura in tutti i punti della superficie ad un dato istante, cioè occorre conoscere la funzione $\frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial n}$ per l'istante iniziale. Se si ricorda il postulato di

Fourier appare evidente che una tale condizione equivale a conoscere il *flusso termico* ($q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$) in ogni punto della superficie.

Condizione del terzo tipo

- Matematicamente si esprime nell'essere il *gradiente di temperatura proporzionale alla temperatura stessa*. Se si considera il caso di corpo immerso in un mezzo fluido esterno avente temperatura T_f e si ricorda l'equazione di *Newton* sulla convezione (vedi §4) si intuisce come questa condizione equivalga a porre il flusso conduttivo uscente dalla superficie pari a quello convettivo scambiato con il fluido. Si riconosce facilmente il significato fisico di questa posizione. Infatti per la [3] si ha, anche:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q$$

$$q = h(T - T_f)$$

⁵ Ad esempio con il *metodo integrale*, con il metodo dei *complessi* o della *trasformata di Laplace* per i casi di trasmissione monodimensionale non stazionaria, metodi dell'integrale di *convoluzione* (teorema di *Dubamel*) per transitori termici di cui sia nota la risposta al *gradino* o all'*impulso* oppure si utilizzano le equazioni di *Sturm-Liouville* per i casi più complessi.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_f)$$

da cui deriva:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{h}{\lambda}T + \frac{1}{\lambda}T_f$$

e quindi la condizione del 3° tipo equivale a imporre che il flusso termico specifico uscente dal corpo sia pari a quello scambiato per convezione termica con il fluido circostante.

Condizione del quarto tipo:

si tratta di una combinazione della condizione del secondo tipo (di *Neumann*) fra due corpi solidi a contatto superficiale. Infatti la condizione in oggetto si esprime dicendo che il gradiente uscente dal primo corpo deve essere uguale a quello entrante nel secondo corpo, ovvero anche:

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial n} \right|_s = -\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial n} \right|_s$$

In definitiva la condizione del quarto tipo rappresenta una condizione di congruenza al contorno nel passaggio fra due corpi.

1.2.1 PARETE PIANA

L'equazione della conduzione (vedi [6]) è integrata per uno strato piano indefinito, come rappresentato in Figura 2, e quindi con la sola dimensione x che fornisce contributo variabile alla distribuzione della temperatura. Ciò porta ad avere il seguente sviluppo:

$$\nabla^2 T = 0 \quad [9]$$

che integrata due volte fornisce l'integrale generale:

$$T = ax + b \quad [10]$$

Le costanti a e b si determinano in base alle condizioni al contorno:

$$T = T_1 \quad \text{per } x = 0$$

$$T = T_2 \quad \text{per } x = s$$

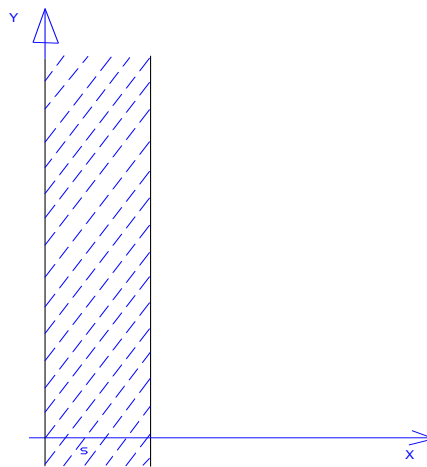


Figura 2: Parete piana indefinita

Effettuando i calcoli si trova:

$$T = -\frac{T_1 - T_2}{s}x + T_1 \quad [11]$$

che rappresenta una distribuzione lineare di temperatura (nell'ipotesi di λ costante) per la parete piana indefinita nell'ipotesi di λ costante (materiale omogeneo ed isotropo). Nella realtà le pareti sono di dimensioni finite e quindi si hanno sempre effetti di bordo da tenere in conto e che in questa sede, per sola semplicità, si trascurano.

Applicando la [3] si ottiene:

$$q'' = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s}{\lambda}} \quad [12]$$

la cui derivazione poteva essere fatta direttamente mediante il postulato di Fourier considerato che le superfici isoterme, essendo la parete indefinita, coincidono con piani paralleli alle facce esterne.

1.2.2 CONDUZIONE DEL CALORE IN UNO STRATO CILINDRICO

Nel caso in cui si abbia uno strato cilindrico (detto anche *manicotto cilindrico*), come in Figura 3, l'applicazione della [6]) in coordinate cilindriche porta ad avere:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

che può essere scritta anche nella forma più comoda da integrare:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) \right) = 0$$

che integrata due volte conduce all'integrale generale:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad [13]$$

Le costanti di integrazione C_1 e C_2 si determinano mediante le condizioni al contorno (del 1° tipo) seguenti:

$$\begin{aligned} T(r_1) &= T_1 \\ T(r_2) &= T_2 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema e sostituendo nella [13] si ottiene la distribuzione della temperatura nel manicotto cilindrico:

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1}$$

Applicando la [3] si ottiene il flusso termico:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad [14]$$

ove l è la lunghezza del manicotto, λ è la conducibilità termica.

Se la differenza $s = r_2 - r_1$ è piccola rispetto ad r_1 allora si dimostra che anziché usare la relazione [14] si può ancora utilizzare la [3]. Infatti risulta:

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \left(\frac{r_1 + s}{r_1} \right) = \ln \left(1 + \frac{s}{r_1} \right) \cong \frac{s}{r_1}$$

ove l'ultimo termine rappresenta lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo termine. Sostituendo questo risultato nella [14] si ottiene:

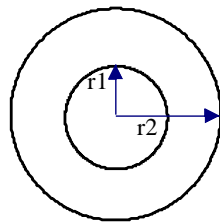
$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi l \lambda} \frac{s}{r_1}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s}{(2\pi l r_1) \lambda}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s}{S \lambda}}$$

e pertanto il flusso termico risulta ancora dato dalla [3].

In pratica se lo spessore del manicotto è piccolo esso si comporta come se fosse una parete piana, come sopra dimostrato.

Ciò risulta utile quando si deve calcolare il flusso trasmesso attraverso una parete curvilinea: se il raggio di curvatura è grande allora si può considerare la parete piana ed applicare le solite relazioni.

La superficie di scambio termico da prendere in considerazione è quella interna o quella esterna a seconda il lato di scambio termico che interessa.



Nel caso di uno strato cilindrico di materiale omogeneo ed isotropo con conducibilità termica λ si ha una relazione del flusso termico specifico che dipende dal rapporto dei raggi esterno ed interno.

Figura 3: Trasmissione per conduzione in un manicotto cilindrico

1.2.3 RAGGIO CRITICO

Possiamo immediatamente fare una semplice applicazione dei concetti sopra esposti determinando il *raggio critico di isolamento* per un condotto cilindrico. Si abbia un condotto, come indicato in Figura 4, con raggio esterno pari ad r_1 e raggio di isolamento r . Il flusso termico scambiato verso l'ambiente esterno nel quale si suppone il fluido a temperatura t_f vale:

$$Q = \frac{t_1 - t_f}{\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2\pi r l h}}$$

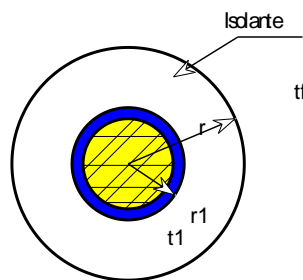


Figura 4: Condotto cilindrico isolato

A denominatore si ha la resistenza termica totale somma di due resistenze: quella del condotto circolare di raggio r_1 , cioè $\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r}{r_1}$, e quella dell'isolante termico, cioè $\frac{1}{2\pi r l h}$.

Poiché la prima resistenza ha andamento logaritmico con r mentre la seconda è con andamento iperbolico, si può immaginare che esista un valore minimo dato dalla condizione:

$$\frac{dR_t}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2\pi r l h} \right) = 0$$

Il valore cercato, detto *raggio critico*, vale:

$$r_{critico} = \frac{\lambda}{h}$$

La derivata seconda della resistenza totale è positiva e quindi si ha un punto di minimo. In Figura 5 si ha la rappresentazione di quanto detto. In corrispondenza del minimo della resistenza totale, R_t , si ha un massimo del flusso trasmesso verso il fluido esterno e pertanto si possono fare due considerazioni:

- Se il raggio totale r (tubo più isolante) è minore del raggio critico r_c allora un aumento dell'isolante porta ad avere una diminuzione della resistenza totale e quindi anche un incremento del flusso trasmesso. Questo caso interessa i cavi elettrici per i quali si desidera che l'isolante esterno, con funzioni sia di isolante elettrico che termico, disperda più potenza possibile per evitare il riscaldamento del conduttore di rame interno;
- Se il raggio totale r è maggiore del raggio critico r_c allora un incremento dell'isolante comporta un aumento della resistenza totale, ossia anche una diminuzione del flusso trasmesso all'esterno. E' questo il caso dei condotti per acqua calda o fredda e per vapore per i quali si desidera limitare il più possibile i disperdimenti verso l'esterno.

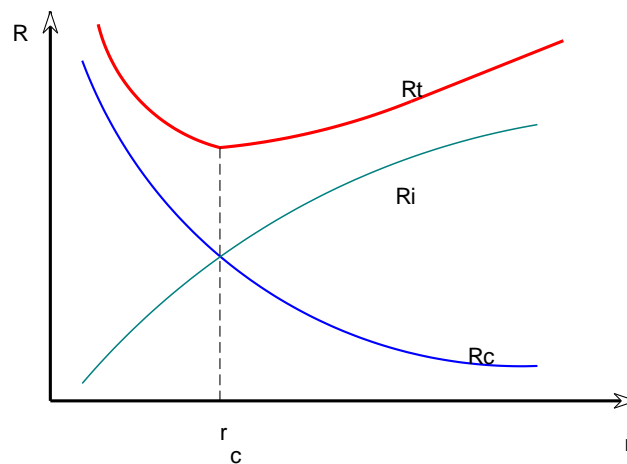


Figura 5: Andamento delle resistenze

Poiché il *raggio critico* dipende sia dalla conducibilità termica dell'isolante che dal valore del coefficiente di convezione esterna, si comprende come il valore corrispondente sia praticamente imposto nelle applicazioni. Ad esempio per $\lambda = 0.032 \text{ W/mK}$ (*buon isolante termico*) ed $h = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ (*convezione naturale*) si avrebbe $r_c = 0.0032 \text{ m}$.

Pertanto per condotti di diametro maggiore di 6.4 mm si ha convenienza ad isolare ($r > r_c$) mentre per condotti con raggio inferiore a 6.4 mm (tubi piccoli usati, ad esempio, negli impianti frigoriferi) non si ha convenienza ad isolare e quindi vengono lasciati nudi.

Per far variare il raggio critico si può agire, per dato isolante (e quindi per dato λ) sul meccanismo di convezione termica, ad esempio, passando dalla convezione naturale a quella forzata che, come si vedrà, produce un incremento di h .

1.2.4 CONCETTO DI RESISTENZA TERMICA PER CONDUZIONE

La [3] può essere scritta in una forma del tutto equivalente:

$$q'' = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s}{\lambda}}$$

del tutto *formalmente analoga* alla relazione di *Ohm* per la conduzione elettrica:

$$i = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

ove l'analogia (detta *elettro-termica*) è fra le seguenti grandezze:

- $T_1 - T_2$, differenza di temperatura, con $V_1 - V_2$, differenza di tensione;
- q , flusso termico, con i flusso di corrente;
- s/λ , resistenza termica, R resistenza elettrica.

Pertanto al rapporto:

$$R_t = \frac{s}{\lambda}$$

si dà il nome di **resistenza termica di conduzione**.

1.2.5 CONDUZIONE TERMICA NEI MATERIALI IN SERIE E IN PARALLELO

L'analogia elettro-termica può facilmente portare a trovare la relazione del flusso termico attraverso materiali in serie e in parallelo. Nel caso di **materiali in serie** (vedi Figura 6a) si ha q costante e quindi combinando la [3] per i due materiali si ottiene la relazione:

$$q'' = q_1'' = q_2'' = \frac{T_1 - T_3}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2}} = \frac{T_1 - T_3}{R_{t_1} + R_{t_2}} \quad [15]$$

In pratica se si hanno due o più materiali in *serie* si sommano le *resistenze termiche* come nel caso del collegamento in serie dei conduttori elettrici.

Per **materiali in parallelo**, (vedi Figura 6b), si ha che è comune la temperatura della facce esterne mentre i flussi termici si sdoppiano in q_1 e q_2 ciascuno dato dalla [3] con pari ΔT ma con s/λ dato da ciascuno strato. In definitiva si ha la relazione :

$$q'' = q_1'' + q_2'' = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s_1}{\lambda_1}} + \frac{T_1 - T_2}{\frac{s_2}{\lambda_2}} = (T_1 - T_2) \left(\frac{\lambda_1}{s_1} + \frac{\lambda_2}{s_2} \right) = (T_1 - T_2) (G_1 + G_2) \quad [16]$$

Pertanto nei casi di materiali in parallelo si sommano le *ammettenze termiche* date dagli inversi delle resistenze termiche.

Nei casi misti di **materiali in serie e in parallelo** si applicano le regole sopra viste in cascata partendo dalla faccia più esterna a sinistra e andando verso la faccia più esterna a destra.

Quanto sopra detto a proposito della [15] e della [16] riveste grande importanza nelle applicazioni alla termofisica degli edifici. Infatti se colleghiamo in serie e parallelo strati di materiali aventi caratteristiche trasmissive molto diverse fra loro si possono avere effetti indesiderati.

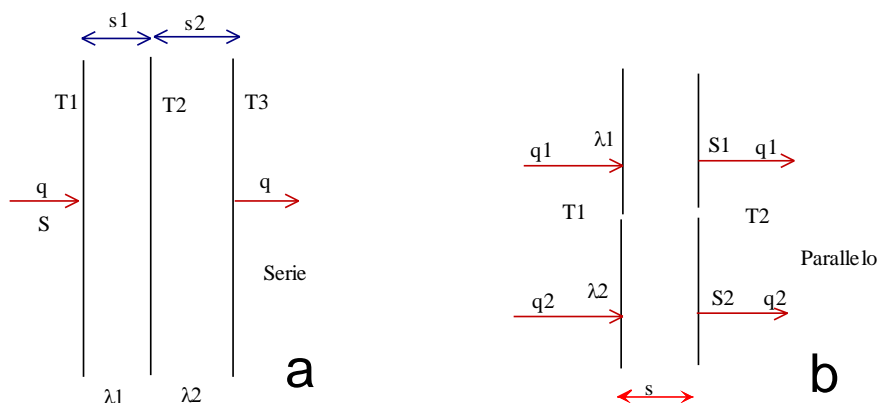


Figura 6: Modalità di trasmissione per conduzione in serie e in parallelo

In particolare, se un materiale è molto più conduttore degli altri allora il flusso termico si addensa in esso più che negli altri. Si ha un effetto di *by pass* del calore detto **ponte termico** che risulta molto negativo, ad esempio, nelle prestazioni termiche delle pareti degli edifici.

Si consideri, ad esempio il caso di una parete avente una finestra inserita nella muratura. Essendo il vetro molto più conduttore del calore della muratura conduce meglio il calore e funge da *by pass* per la parete.

Poiché la temperatura nelle zone di contatto fra materiali a diversa conducibilità è poco variabile (per la condizione del 4° tipo) ne consegue che la parete in vicinanza del vetro si porta ad una temperatura più bassa di quella in zone maggiormente lontane.

E' facile, pertanto, che si raggiungano valori di temperatura inferiore alla *temperatura di rugiada* e quindi che si formi condensa superficiale interna che produce ammuffimento e decomposizione dei materiali componenti.

Lo stesso fenomeno si ha a contatto fra la muratura (ancora di più se isolata) e gli elementi strutturali in calcestruzzo (notevolmente più conduttore della muratura) e quindi se non si provvede ad isolare la zona di contatto si rischia di avere condensa di vapore e quindi danni alle pareti stesse.

1.2.6 PARETE PIANA CON SORGENTE DI CALORE INTERNA

L'equazione generale della conduzione [6] fornisce, con riferimento alla geometria di Figura 7, l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q'''}{\lambda} = 0 \quad [17]$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$T = T_p \quad \text{per } x=L$$

e ancora:

$$q=0 \quad \text{per } x=0$$

Risolvendo la [17] si ottiene l'integrale generale:

$$T = -\frac{q'''}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2 \quad [18]$$

Applicando le sopra indicate condizioni al contorno si ottiene la nuova distribuzione di temperatura nello strato piano:

$$T = T_p + \frac{q'''}{2\lambda} (L^2 - x^2)$$

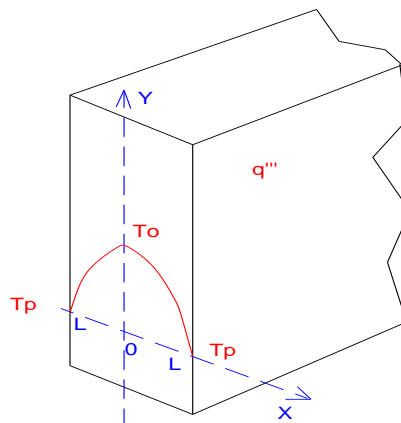


Figura 7: Strato piano monodimensionale con sorgente interna

Come si può osservare (e come indicato in Figura 7) la distribuzione di temperatura è ora *parabolica* e non più lineare, come la [11] indicava nel caso di assenza di sorgente interna.

Il caso qui studiato si può presentare, ad esempio, studiando la distribuzione di temperatura in un getto di cemento durante la reazione esotermica di presa, oppure nella generazione di calore per effetto *Foucault* nelle lamelle di un trasformatore o di una macchina elettrica e nella produzione di calore per effetto Joule nei conduttori.

In genere si può affermare che la sorgente interna di calore porta ad avere distribuzioni di temperatura di grado superiore di uno rispetto ai casi senza sorgenti interne.

1.2.7 CONDUZIONE STAZIONARI BIDIMENSIONALE

Si vuole qui dare un breve cenno alla risoluzione della [6] nel caso di regime stazionario, senza sorgenti di calore interne e per in caso bidimensionale semplice: una lastra piana rettangolare aventi dimensioni a e b e con temperatura esterna pari a T_1 su tre lati e T_2 sul quarto lato, come indicato in Figura 8. La [6] fornisce la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad [19]$$

Per integrare la [19] occorre ipotizzare una condizione di omogeneità della funzione $T(x,y)$ cercata, cioè si suppone che sia possibile scrivere:

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad [20]$$

Sostituendo nella [19] si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad [21]$$

Poiché ciascuno dei due membri è funzione di una sola variabile deve necessariamente essere una costante il valore comune. Indicato con $-\lambda^2$ tale costante si ha, dalla [21]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y &= 0 \end{aligned} \quad [22]$$

Gli integrali generali di ciascuna delle due equazioni differenziali sono i seguenti:

$$X = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

$$Y = C \sinh \lambda y + D \cosh \lambda y$$

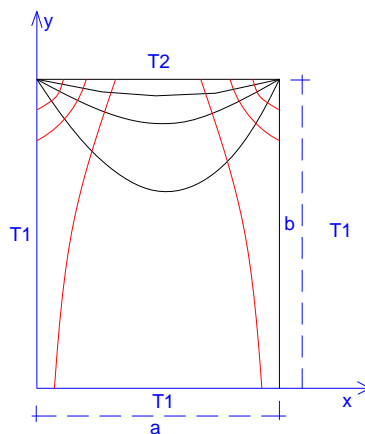


Figura 8: Strato piano bidimensionale

Pertanto per la [20] si può scrivere:

$$T(x, y) = (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x)(C \operatorname{shn} \lambda y + D \operatorname{chs} \lambda y) \quad [23]$$

Le quattro costanti di integrazione (2 per x e 2 per y) si determinano con le condizioni:

$$T = T_1 \quad \text{per } x = 0$$

$$T = T_1 \quad \text{per } x = a$$

$$T = T_1 \quad \text{per } y = 0$$

$$T = T_2 \quad \text{per } y = b$$

Risulta più agevole risolvere ponendo $\theta = T - T_1$ e pertanto la [23] diviene:

$$\theta(x, y) = (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x)(C \operatorname{shn} \lambda y + D \operatorname{chs} \lambda y) \quad [24]$$

e le condizioni al contorno:

$$\theta = 0 \quad \text{per } x = 0$$

$$\theta = 0 \quad \text{per } x = a$$

$$\theta = 0 \quad \text{per } y = 0$$

$$\theta = (T_2 - T_1) \quad \text{per } y = b$$

La prima e la terza condizione comportano $B=0$ e $D=0$. La seconda condizione fornisce:

$$0 = AC \sin \lambda a \cdot \operatorname{shn} \lambda y$$

ovvero, assumendo $\operatorname{shn} \lambda y \neq 0$:

$$0 = \sin \lambda a$$

per la legge dell'annullamento del prodotto. Questa equazione ammette soluzioni per:

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Sostituendo in [24] si ottiene:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (AC)_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot \operatorname{shn}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad [25]$$

ove si è escluso il caso $n=0$ perché non fornisce contributo. Le nuove costanti $(AC)_n$ si ricavano con la quarta condizione al contorno, cioè:

$$\theta_0 = T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (AC)_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot \operatorname{shn}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \quad [26]$$

Se ora si confrontano i termini di questa equazione con quello dello sviluppo in serie di Fourier di $\theta_0 = T_2 - T_1$ tra x ed a si ottiene:

$$T_2 - T_1 = f(x) = \sum C_n' \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

e pertanto la [26] diviene, dopo alcuni passaggi:

$$\theta = 2(T_2 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{\operatorname{shn}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\operatorname{shn}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}$$

In Figura 8 si ha anche la rappresentazione grafica delle isoterme e delle linee di flusso.

Come si vede il problema diviene molto complesso già per un caso di geometria semplice (bidimensionale) e regolare. Diventa esplicitamente irrisolvibile per i casi più comuni della realtà e pertanto occorre utilizzare metodi di calcolo non esatti.

1.2.8 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE

La risoluzione della [6] nel caso di regime variabile porta ad avere equazioni differenziali in coordinate spazio-temporali di complessa risoluzione. Data la limitazione di tempo del presente Corso si ritiene di non approfondire ulteriormente gli sviluppi analitici per i quali si rimanda ai testi specialistici di *Trasmissione del Calore*.

Si vuole qui sottolineare l'importanza che il transitorio termico (dato proprio dal *regime variabile*) ha in vari campi di applicazione fra i quali il comportamento termofisico dell'edificio.

Spesso, infatti, si supporranno, per semplicità di calcolo, condizioni stazionarie (più facili da studiare) ma nella realtà queste non si verificano mai.

Si pensi, ad esempio, alle variazioni climatiche esterne (che sono le condizioni forzanti per l'edificio) che risultano variabili durante il giorno (per effetto del cammino solare apparente e delle condizioni climatiche esterne) e durante i vari mesi dell'anno. Si desidera qui presentare alcuni casi semplici di transitorio termico che, però, risultano molto interessanti nelle applicazioni pratiche.

1.2.9 TRANSITORIO DI RISCALDAMENTO E RAFFREDDAMENTO DI UN CORPO A RESISTENZA TERMICA TRASCURABILE.

Questo argomento, pur se semplificativo di alcuni aspetti termotecnici, è molto importante perché ci consente di fare alcune considerazioni utili sul piano pratico dei transienti dei corpi.

Supponiamo per il momento di avere il corpo a *resistenza termica interna trascurabile*⁶ a temperatura iniziale T_i e che questo sia immerso in un fluido avente temperatura costante (ambiente di grande capacità termica) T_a . Se un corpo ha resistenza termica interna trascurabile (quindi è un ottimo conduttore di calore, ossia ha λ elevato, come, ad esempio nei metalli) allora la temperatura interna del corpo varia molto poco e si può assumere che essa si mantenga uniforme (la medesima T in qualunque punto) in tutto il corpo stesso.

Quest'ipotesi facilita molto i calcoli perché nella [6] non vi è più il contributo della variazione spaziale ma resta solo quello temporale che può essere determinato facilmente con il seguente ragionamento. Il corpo si raffredda se $T_0 > T_a$ e possiamo scrivere la semplice equazione di bilancio energetico:

$$Q_i - Q_u = \text{Accumulo}$$

che in forma analitica diviene:

$$0 - hA(T - T_a) = mc \frac{dT}{d\tau}$$

Indicando con $\theta = T - T_a$ la precedente equazione diviene:

$$-hA\theta = mc \frac{d\theta}{d\tau} \quad [27]$$

che è una semplice equazione differenziale a variabili separabili e a coefficienti che possiamo ritenere costanti. Integrando si ha:

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{mc} \int_0^{\tau} d\tau$$

⁶ Se la resistenza interna di un corpo fosse nulla allora la temperatura sarebbe uniforme. L'ipotesi di resistenza trascurabile è necessaria per potere assegnare un solo valore di temperatura, con poco errore, a tutto il corpo. Ciò è vero se la conducibilità termica è elevata e se lo spessore è piccolo ($R = s/\lambda$).

da cui si ottiene:

$$\theta = \theta_i \cdot e^{-(hA/mc)\tau}$$

Ricordando la posizione per la differenza di temperatura si ha:

$$T = T_a + (T_i - T_a) \cdot e^{-(hA/mc)\tau} \quad [28]$$

In Figura 9 si ha l'andamento del transitorio di raffreddamento ($T_i > T_a$) e di riscaldamento ($T_i < T_a$). La velocità di variazione della temperatura T del corpo nel tempo è data da:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{d(T - T_a)}{d\tau} = -(T_i - T_a) \cdot \frac{hA}{mc} e^{-(hA/mc)\tau} \quad [29]$$

e all'istante $\tau = 0$ si ha:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{d(T - T_a)}{d\tau} = -(T_i - T_a) \cdot \frac{hA}{mc} \quad [30]$$

La tangente all'origine delle curva di raffreddamento, avente pendenza $dT/d\tau$, interseca l'ordinata $(T - T_a) = 0$ in corrispondenza al tempo $\tau_c = mc/hA$ detto **costante di tempo**.

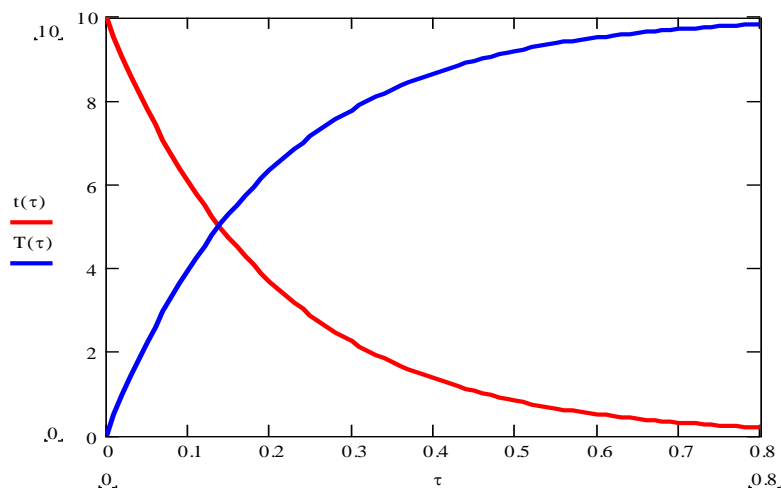


Figura 9: Andamento del transitorio di riscaldamento e/o di raffreddamento

Ricordando che mc è una *capacità termica* e $1/hA$ è una *resistenza termica* si può dire che la *costante di tempo* è $\tau_c = RC$, prodotto della resistenza termica per la capacità termica. In pratica si può studiare il raffreddamento di un corpo in analogia alla carica/scarica di un condensatore in un circuito RC.

Osservando il diagramma di Figura 9 si può ancora dire che dopo un tempo pari a τ_c si ha una diminuzione del 63.2% del salto iniziale e che dopo 4÷5 costanti di tempo il transitorio si è esaurito.

Pertanto il tempo di raffreddamento e/o di riscaldamento del corpo dipende dal prodotto RC : una maggiore massa e quindi una maggiore capacità termica comporta un maggior tempo di raffreddamento o di riscaldamento, a parità di resistenza termica.

Qualche insegnamento in più possiamo ancora avere da questo studio, seppure semplificato, di transitorio di raffreddamento/riscaldamento di un corpo. L'esponente dell'equazione di raffreddamento può scriversi sotto altra forma che lascia intravedere interessanti osservazioni:

$$\tau_c = \frac{mc}{hA} = \frac{\rho Vc}{hA} = \frac{V}{A} \cdot \frac{\rho c}{h} \quad [31]$$

L'ultimo membro ci dice che la costante di tempo è tanto maggiore (per cui si hanno periodi di raffreddamento e di riscaldamento lunghi) quanto maggiore è, a parità del rapporto $\rho c/h$, il rapporto V/A cioè il rapporto di forma dell'oggetto.

L'*iglu* esquimese ha la forma emisferica e per questo solido il rapporto V/A è il massimo possibile: la sfera, infatti, ha il maggior volume a parità di superficie disperdente o, se si vuole, la minor superficie disperdente a parità di volume.

Pertanto la forma di quest'abitazione è geometricamente ottimizzata per il minimo disperdimento energetico e quindi per un maggior transitorio di raffreddamento.

Analoga osservazione si può fare per la forma dei forni di cottura a legna: anch'essi hanno forma emisferica che consente loro di immagazzinare meglio il calore nella massa muraria e di disperderla il più lentamente possibile, a parità di condizioni esterne, rispetto ad altre forme geometriche.

1.2.10 REGIME VARIABILE IN UNA LASTRA PIANA INDEFINITA

Si consideri una lastra piana indefinita di spessore $2L$, come indicato in Figura 10. Le condizioni di geometria indefinita in y e in z comportano la possibilità di descrivere nella sola coordinata x l'equazione della conduzione:

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad [32]$$

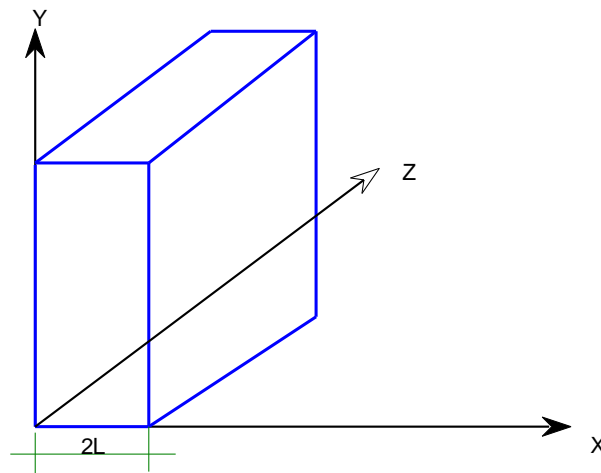


Figura 10: Lastra piana indefinita

Ove con a si indica la diffusività termica del materiale di cui è fatta la lastra. La [32] rappresenta un'equazione differenziale alle derivate parziali in x e in τ per la cui soluzione ipotizziamo che si possa determinare una funzione a variabili separate del tipo:

$$T(x, \tau) = X(x)\theta(\tau) \quad [33]$$

con $X(x)$ funzione della sola x e $\theta(\tau)$ funzione solo del tempo.

Quest'ipotesi è valida se vale il principio di omogeneità delle condizioni al contorno che sono:

- a) $\tau=0$ per $0 \leq x \leq 2L$ $H = H_1 = T_1 - T_0$
- b) $\tau > 0$ per $x=0$ $H = 0$
- c) $\tau > 0$ per $x=2L$ $H = 0$

Operando la sostituzione della [33] nella [32] si ottiene l'equazione:

$$a\theta \frac{d^2 X}{dx^2} = X \frac{d\theta}{d\tau}$$

dalla quale separando le variabili si ottiene:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{a\theta} \frac{d\theta}{d\tau} = -\mu^2 \quad [34]$$

ove si è posto $-\mu^2$ nell'ultimo membro per congruenza fisica⁷. La precedente equazione equivale alle due seguenti:

$$\frac{d\theta}{d\tau} + a\mu^2\theta = 0 \quad [35]$$

e ancora:

$$\frac{dX^2}{dx^2} + \mu^2 X = 0 \quad [36]$$

Abbiamo trasformato l'equazione differenziale spazio - temporale nella somma di due equazioni differenziali funzione una del solo tempo ed una della sola ascissa. Gli integrali generali sono:

$$\theta(\tau) = C_1 e^{-a\mu^2\tau} \quad [37]$$

$$X(x) = C_2 \sin \mu x + C_3 \cos \mu x \quad [38]$$

Le tre costanti (2 per l'equazione nello spazio ed 1 per l'equazione nel tempo) vanno determinate mediante le condizioni al contorno ed iniziali. L'integrale generale può essere scritto, per l'omogeneità della soluzione posta nella [33], nella forma:

$$T(x, \tau) = C_1 e^{-a\mu^2\tau} [C_2 \sin \mu x + C_3 \cos \mu x]$$

che può ancora scriversi nella forma:

$$T(x, \tau) = e^{-a\mu^2\tau} [C_m \sin \mu x + C_n \cos \mu x] \quad [39]$$

con costanti C_m e C_n da determinare con le condizioni al contorno ed iniziali.

La condizione $\tau > 0$ per $x=0$ e $\Theta = 0$ comporta che deve essere $C_n = 0$ per $\tau > 0$.

Per la condizione $\tau > 0$ per $x=2L$ e $\Theta = 0$, scartando la soluzione banale $C_m = 0$, deve essere $\sin \mu L = 0$ e pertanto:

$$2\mu L = n\pi \quad \text{per } n=1, 2, \dots, \infty$$

da cui derivano gli autovalori:

$$\mu_n = \frac{n\pi}{2L}$$

per ciascuno dei quali si ha un integrale particolare della [39]. Ne segue che la soluzione generale è data dalla somma di tutti le soluzioni particolari e pertanto deve essere:

$$T(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 a\tau} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \quad [40]$$

Per la condizione iniziale $\tau=0$ per $0 \leq x \leq 2L$ e $\Theta = \Theta_i = T_i - T_0$ si ha:

$$H_i = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(\mu_k x) \quad [41]$$

Se osserviamo la forma della soluzione generale [40] si può dire che essa rappresenta lo sviluppo in serie di Fourier della distribuzione di temperatura a primo membro. Pertanto risulta:

$$C_k = \frac{1}{L} \int_0^{2L} H_i \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx \quad [42]$$

da cui si ha:

⁷ Cioè per non avere fenomeni divergenti all'infinito.

$$C_k = \frac{2H_i}{n\pi} [1 - \cos(k\pi)] \quad [43]$$

Si osservi che risulta $C_k = 0$ per $k = 2, 4, 6, \dots$. E pertanto la soluzione generale diviene:

$$T(x, \tau) = \frac{4H_i}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 \alpha \tau} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{2L}\right) \quad [44]$$

con $k = 1, 3, 5, \dots$

Nota la distribuzione iniziale di temperatura H_i si può risolvere la precedente soluzione. Ad esempio se la distribuzione iniziale è di tipo generico $f(x)$ allora la soluzione diviene:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 \alpha \tau} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{2L}\right) \int_0^{2L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{2L}\right) dx$$

sempre con $k = 1, 3, 5, \dots$

Le condizioni iniziali possono essere diverse da quelle indicate in precedenza che erano del tipo Dirichlet.

Si possono avere anche condizioni di tipo Neumann o miste. In ogni caso si tratta sempre di seguire la procedura sopra descritta per pervenire a soluzioni generali valide sempre per geometrie elementari (strato piano indefinito) valide solo a scopo euristico.

Pertanto non si procederà oltre in questa trattazione limitandoci a far osservare come non appena ci si allontana dalle condizioni geometriche semplicissime (caso monodimensionale) si deve affrontare un problema molto complesso⁸ non sempre (o meglio, quasi mai) risolvibile analiticamente in modo esplicito.

Vedremo, pertanto, nella trattazione dei metodi numerici come superare questi limiti che la soluzione dell'equazione della conduzione ci pone.

1.2.11 TRANSITORIO TERMICO IN UN MEZZO SEMINFINITO

E' questo un caso molto importante per l'analisi dei disperdimenti in strati di notevole spessore, come ad esempio nel suolo. Esso, infatti, può intendersi come un mezzo seminfinito, cioè ha origine sulla superficie terrestre e si estende in profondità in modo tale da poterlo considerare infinitamente profondo, come indicato in Figura 11.

Temperatura alla superficie imposta

La [6] diviene:

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad [45]$$

Le condizioni iniziali sono:

$$T(x, 0) = T_i$$

e sulla superficie:

$$T(0, \tau) = T_o$$

La soluzione della [45] non è semplice a causa della doppia variabilità spazio-temporale. Considerato lo scopo del corso se ne trascura lo sviluppo analitico e si scrive subito la soluzione:

⁸ Nei classici testi di trasmissione del calore si possono leggere interessanti capitoli dedicati allo studio di conduzione in regime transitorio per geometrie semplici bi e tridimensionali. I risultati di queste analisi sono sempre riportati in forma grafica con abachi adimensionali dalla complessa interpretazione e dal non sempre agevole utilizzo. Questa trattazione non apporta nulla di nuovo e/o di interessante alle conoscenze dell'Allievo in questa fase di studio. Meglio spendere qualche parola in più per affrontare le moderne metodologie di analisi dei problemi termici complessi. E' ciò che verrà fatto nel prossimo capitolo per la conduzione e più avanti per la convezione e per l'irraggiamento.

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_o - T_i} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz = 1 - \text{erf}(\eta) \quad [46]$$

ove è $\eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$ ed inoltre:

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$$

la funzione errore di Gauss.

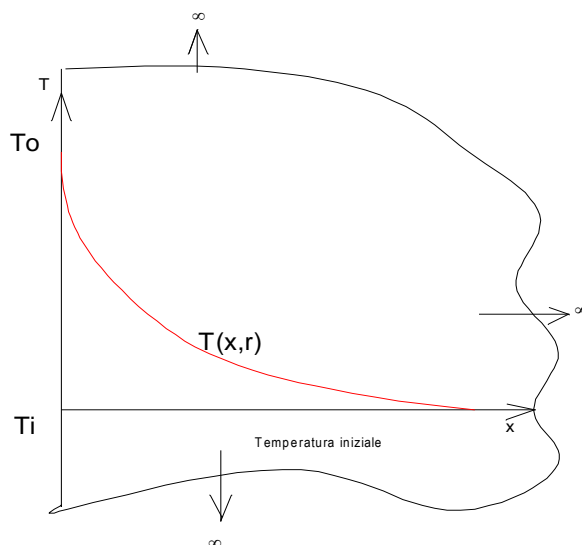


Figura 11: Strato seminfinito—distribuzione della temperatura istantanea

Si definisce funzione errore complementare la funzione:

$$\text{erfc}(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)$$

L'andamento della temperatura dato dalla [46] è rappresentato nella seguente Figura 12.

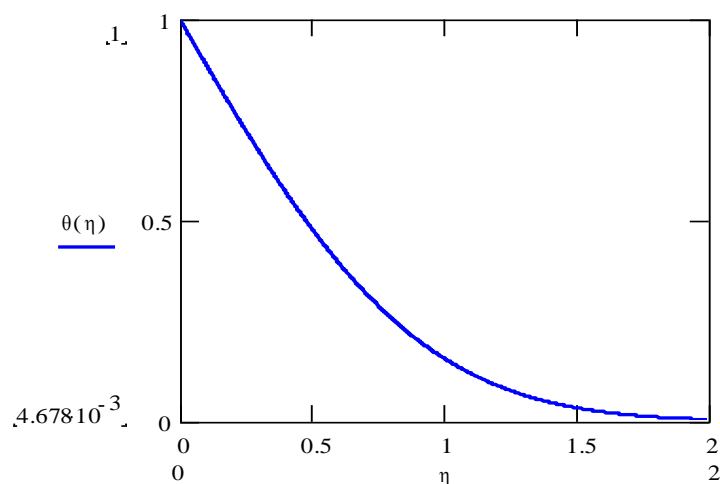


Figura 12: Andamento della temperatura in uno strato seminfinito con T imposta

Flusso alla superficie imposto

Se allo strato di Figura 11 si impone che sia:

$$q''(x, 0) = 0$$

e che alla superficie sia:

$$q''(0, \tau) = q''_0$$

allora l'equazione [45] si può ancora scrivere nella forma (differenziando rispetto ad x):

$$a \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \tau} \quad [47]$$

Essendo:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad [48]$$

si può ancora scrivere:

$$a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial q}{\partial \tau} \quad [49]$$

che è formalmente analoga alla [45] e pertanto la soluzione è:

$$\frac{q''}{q''_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz = 1 - \operatorname{erf}(\eta) \quad [50]$$

La distribuzione di temperatura si ottiene integrando la [48] per cui si ottiene:

$$T_p - T_i = \frac{q_0}{\lambda} \int_0^\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) dx$$

che fornisce la soluzione:

$$T(x) - T_i = \frac{2q_0 \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}}}{\lambda} e^{\left(\frac{-x^2}{4a\tau}\right)} - \frac{q_0}{\lambda} \cdot x \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) \quad [51]$$

1.2.12 REGIME PERIODICO STABILIZZATO

Un caso molto importante per le applicazioni pratiche (sia in campo industriale che civile) si ha quando si applica una forzante (cioè una temperatura) variabile in modo periodico ad uno strato piano seminfinito.

E' questo il caso, ad esempio, della variazione della temperatura ambientale esterna negli edifici, della variazione periodica di temperatura all'interno di un cilindro di un motore a combustione interna.

Per studiare questo caso supporremo inizialmente che la variazione di temperatura sia di tipo sinusoidale e quindi ci si riferisca alla più semplice variazione periodica.

L'importanza di questo caso si deduce immediatamente se si pensa che una qualunque forzante periodica può essere scomposta in una serie di Fourier in termini di seni e/o coseni e quindi in termini di funzioni periodiche elementari e pertanto la soluzione generale è data dalla somma (se rimangono valide le ipotesi di linearità del problema) delle soluzioni parziali.

Con riferimento alla Figura 13 si supponga di applicare alla superficie esterna dello strato seminfinito una variazione di temperatura periodica sinusoidale della forma:

$$T(0, \tau) = T_m + \Delta T_0 \sin \omega \tau$$

con:

- $\omega = 2\pi f$ pulsazione ed f la frequenza;
- T_m la temperatura media, $[^\circ\text{C}]$;
- ΔT_0 la variazione di temperatura massima ; $[^\circ\text{C}]$

Per comodità di calcolo poniamo $\theta = T - T_m$ e pertanto la precedente si può scrivere:

$$\theta(0, \tau) = \Delta T_0 \sin \omega \tau$$

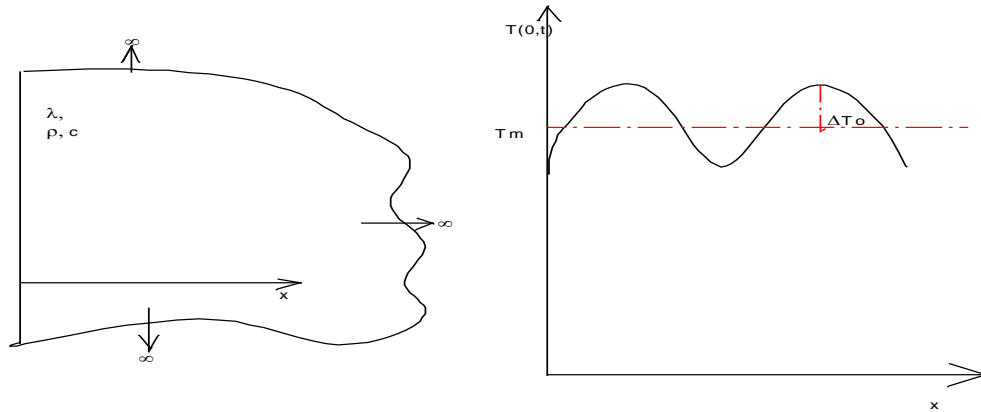


Figura 13: Variazione periodica di temperatura in uno strato seminfinito

L'equazione della conduzione diviene, in regime variabile monodimensionale:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

Se ora definiamo la temperatura coniugata:

$$\bar{\theta}(0, \tau) = \Delta T_0 \cos \omega \tau$$

possiamo riferirci all'equazione della conduzione per la soluzione coniugata:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau}$$

Deriviamo ora la temperatura complessa data dalla combinazione lineare:

$$\theta_c(x, \tau) = \bar{\theta}(x, \tau) + j\theta(x, \tau)$$

soluzione dell'equazione complessa:

$$\frac{\partial^2 \theta_c}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau}$$

con la condizione al contorno:

$$\theta_c(0, \tau) = \Delta T_0 e^{j\omega \tau}$$

In forma euleriana la temperatura complessa si scrive nella forma:

$$\theta_c(x, \tau) = X(x) e^{j\omega \tau}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione differenziale complessa e tenendo conto della proprietà dell'esponenziale si ottiene:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - j \frac{\omega}{a} X(x) = 0$$

con l'ovvia condizione al contorno:

$$X(0) = \Delta T_0$$

Poiché al tendere ad infinito del tempo la temperatura reale e quella complessa debbono sempre essere finite allora si deve avere $X(\infty) \neq \infty$. La precedente equazione differenziale è notevolmente più semplice di quella originaria perché è una equazione differenziale ordinaria nella sola $X(x)$ le cui soluzioni dell'equazione caratteristica sono date, per il teorema di De Moivre⁹ sulle potenze dei numeri complessi, da:

$$\sqrt{j \frac{\omega}{a}} = \pm(1+j) \sqrt{\frac{\pi f}{a}} = \pm(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale diviene:

$$X(x) = A_1 e^{-(1+j)\sqrt{\frac{\pi f}{a}}x} + A_2 e^{(1+j)\sqrt{\frac{\pi f}{a}}x}$$

La condizione della non divergenza della temperatura porta ad avere $A_2 = 0$ e quindi la soluzione finale diviene:

$$X(x) = A_1 e^{-(1+j)\sqrt{\frac{\pi f}{a}}x}$$

La soluzione complessa completa diviene quindi:

$$\theta_c(x, \tau) = A_1 e^{-j\sqrt{\frac{\pi f}{a}}x} e^{[j(\omega\tau) - \sqrt{\frac{\pi f}{a}}x]}$$

Ritornando alla forma trigonometrica si ha:

$$\theta_c(x, \tau) = A_1 e^{-x\sqrt{\frac{\pi f}{a}}} \left[\cos\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\pi f}{a}}x\right) + j \sin\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\pi f}{a}}x\right) \right]$$

Se vogliamo la soluzione alla forzante reale (coefficiente dell'immaginaria nella forma complessa) allora dobbiamo interessarci al coefficiente dell'immaginario anche della soluzione e pertanto si ha:

$$\theta(x, \tau) = A_1 e^{-x\sqrt{\frac{\pi f}{a}}} \sin\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\pi f}{a}}x\right)$$

che, per la condizione limite ad ascissa $x=0$, fornisce:

$$\theta(0, \tau) = \Delta T_0 e^{-x\sqrt{\frac{\pi f}{a}}} \sin\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\pi f}{a}}x\right)$$

Si osservi che si ha anche $\sqrt{\frac{\pi f}{a}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$ e quindi la soluzione cercata si può anche scrivere nella forma seguente:

⁹ Nel caso di numero complesso $z=a+ib$ si ha che $\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \right)$. Nel nostro caso si ha:

$$\sqrt{\left(0 + j \frac{\omega}{a}\right)} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a}} \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2a}} (1 + j)$$

$$\theta(x, \tau) = \Delta T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} \sin\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right)$$

L'andamento della funzione $\theta(x, \tau)$ è riportato nella Figura 14.

La precedente ci dice che la variazione della temperatura ad una distanza x dalla superficie ha sempre lo stesso periodo della variazione di temperatura imposta alla superficie ma di ampiezza decrescente esponenzialmente con la distanza, essendo tale ampiezza data dalla:

$$\Delta T_x = \Delta T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}$$

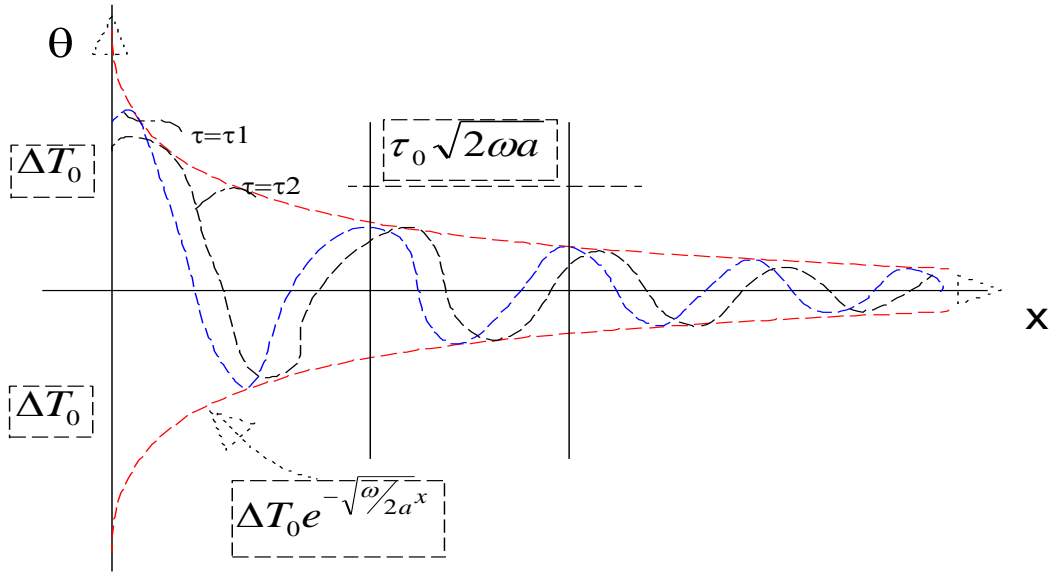


Figura 14: Andamento delle oscillazioni all'interno dello strato

Lo sfasamento dell'onda di temperatura cambia con x secondo la relazione:

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}{\omega} = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega a}}$$

L'onda termica viaggia ad una velocità che è possibile calcolare imponendo che sia:

$$\omega\tau_0 - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}\lambda = 0$$

dalla quale si ricava:

$$v = \frac{\lambda}{\tau_0} = \sqrt{2\omega a}$$

Pertanto la velocità di propagazione dell'onda termica nello strato dipende sia dalla frequenza (tramite ω) che dalla diffusività termica del mezzo stesso (a).

Il flusso termico specifico che attraversa la superficie esterna vale:

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0}$$

E tenendo conto della soluzione sopra trovata si ottiene:

$$q(\tau) = \lambda \Delta T_0 \sqrt{\frac{\omega}{a}} \sin\left(\omega\tau + \frac{\pi}{4}\right)$$

Pertanto anche il flusso termico è periodico ed è sfasato di $\pi/4$ rispetto alla temperatura. Se integriamo la precedente su un semiperiodo nel quale il flusso termico è positivo (da $\tau = -\pi/4\omega$ a $\tau = 3\pi/4\omega$) si ottiene l'energia immagazzinata dal corpo:

$$Q = \lambda \Delta T_0 \sqrt{\frac{\omega}{a}} \int_{-\pi/4\omega}^{3\pi/4\omega} \sin\left(\omega\tau + \frac{\pi}{4}\right) d\tau = \frac{2\lambda}{\sqrt{\omega a}} \Delta T_0$$

Ne segue che sebbene l'ampiezza del flusso termico sia maggiore per elevate pulsazioni l'energia termica immagazzinata nel semiperiodo è tanto maggiore quanto più piccola è la frequenza dell'oscillazione di temperatura della forzante esterna.

Le applicazioni delle relazioni qui esposte sono numerose nella *Termofisica degli edifici*.

Le pareti esterne, infatti, si possono considerare strati di spessore tale da considerare valide le ipotesi di spessore seminfinito.

Un'onda termica che possiamo assimilare alla variazione periodica sinusoidale (che si ha tutti i giorni fra il dì e la notte) porta alla trasmissione all'interno degli edifici con velocità data dalla

$$v = \frac{\lambda}{\tau_0} = \sqrt{2\omega a} \quad \text{e con sfasamento dato dalla } \Delta\tau = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega a}}.$$

Anche l'ampiezza dell'onda subisce l'attenuazione e pertanto si conclude che pareti di grande spessore e con materiali non conduttori attenuano e sfasano molto (come avviene nelle antiche abitazioni con mura spesse o nelle chiese con mura spesso oltre gli 80 cm).

Viceversa una parete avente poca massa e buon conduttrice (come sono le pareti in calcestruzzo o le pareti di materiale leggero oggi molto utilizzate nell'edilizia corrente) porta ad attenuazioni e sfasamenti modesti: la variazioni termiche esterne si trasmettono in breve tempo (*entro 0,5÷2 ore*) all'interno degli ambienti, diversamente dalle pareti spesse e pesanti che ritardano di alcune ore la trasmissione dell'onda termica.

2 METODI AVANZATI PER LA CONDUZIONE TERMICA

Lo studio della conduzione termica e in particolare la risoluzione dell'equazione generale della conduzione nei casi concreti richiede notevoli sviluppi matematici che non sempre si concludono positivamente. Già con forme reali diverse da quelle geometricamente elementari si hanno sviluppi matematici notevoli con risultati espressi da serie di funzioni che portano inevitabilmente ad errori di troncamento.

Allo stesso modo i fenomeni transitori non risultano agevoli da trattare giacchè alla complessità derivante dalla forma geometrica si aggiunge anche la condizione transitoria (*presenza del 2° membro nell'equazione della conduzione*) che porta ad avere una variabile di integrazione in più.

Si vedranno in questo capitolo alcuni metodi che definiamo avanzati perché solitamente richiedono strumenti matematici tipici dei corsi superiori di *Analisi Matematica*.

Tali metodi, tuttavia, sono ancora applicati a casi semplici e concreti per non appesantire eccessivamente la trattazione.

Va tuttavia osservato che proprio le osservazioni sopra riportate sulla complessità della soluzione per i casi reali ha portato oggi a sviluppare metodi di risoluzione alternativi (vedi i metodi numerici per la conduzione) che utilizzano algoritmi semplificati, ma con errore controllato, di possibile utilizzo in programmi di calcolo. Il grande sviluppo della trasmissione di calore degli ultimi decenni è dovuto proprio a questi algoritmi.

2.1 METODO INTEGRALE

Questo metodo, la cui validità è generale e si applica anche per la convezione termica, consente di risolvere l'equazione generale della conduzione sia per casi lineari che non lineari.

La soluzione che si ottiene è di solito approssimata ma è importante precisare che l'equazione integrale alla base di questo metodo è di per sé esatta mentre la tecnica risolutiva porta ad avere approssimazioni.

Questo metodo è stato originariamente utilizzato da *von Karman* e da *Pohlhausen* per risolvere i problemi della convezione termica (integrazione delle equazioni della conservazione della quantità di moto e dell'energia) ma si applica molto bene anche a tutti i problemi che obbediscono ad equazioni di tipo diffusivo come, ad esempio, nella conduzione non stazionaria nei solidi.

Landahl ha usato questo metodo nel 1953 anche in Biofisica ed in seguito vari ricercatori lo hanno utilizzato per numerosi problemi pratici, specialmente di tipo non lineari, in transitorio termico.

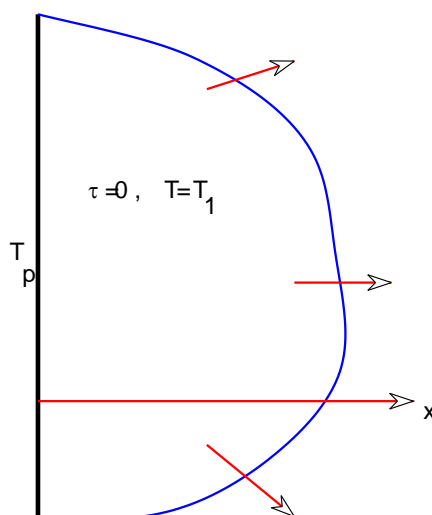


Figura 15: Strato piano seminfinito

Si consideri lo strato piano seminfinito di Figura 15 e si supponga che inizialmente sia a temperatura uniforme T_1 .

All'istante $\tau=0$ si vari la temperatura della faccia esterna ($x=0$) con il valore T_p e questo valore sia mantenuto costante anche per $\tau>0$. Assumendo proprietà termofisiche costanti, l'equazione della conduzione in regime variabile monodimensionale (la sola dimensione considerata è la x) diviene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

con le condizioni limiti:

- $T(x,0)=T_p$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x,\tau) = T_i$

con a diffusività termica della lastra. Definiamo ora una quantità $\delta(\tau)$ detta *profondità di penetrazione* o anche *strato termico* in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$T(\delta,\tau) = T_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial T(\delta,\tau)}{\partial x} = 0$$

In pratica per valori di x oltre $\delta(\tau)$ il solido è ancora alla temperatura iniziale T_i e pertanto non si ha flusso oltre questa profondità. Integriamo l'equazione della conduzione da 0 a $\delta(\tau)$ ottenendo:

$$\int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial T}{\partial \tau} dx$$

Il termine a primo membro diviene:

$$\int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \underbrace{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\delta}}_{\text{Flusso}=0} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Il termine a secondo membro può essere riscritto applicando la regola di Leibnitz:

$$\Phi'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y) - f[(\alpha(y),y) \cdot \alpha'(y)] + f[\beta(y),y] \cdot \beta'(y)$$

che per $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ costanti diviene:

$$\Phi'(y) = \int_{\alpha}^{\beta} f'_y(x,y)$$

Pertanto si ha:

$$\int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial T}{\partial \tau} dx = \frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} T(x,\tau) dx - \underbrace{T(\delta,\tau)}_{=T_i} \frac{d\delta}{d\tau}$$

Per quanto detto sulla definizione dello strato $\delta(\tau)$ si ha anche:

$$\int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial T}{\partial \tau} dx = \frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} T(x,\tau) dx - T_i \frac{d\delta}{d\tau}$$

L'equazione della conduzione integrata diviene, allora, per effetto degli sviluppi sopra esposti:

$$- \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{a} \left[\frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} T(x,\tau) dx - T_i \frac{d\delta}{d\tau} \right]$$

che può ancora essere scritta nella forma:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} [T(x,\tau) - T_i] dx = -a \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Questa è detta *equazione di bilancio energetico in forma integrale* e rappresenta un modo diverso di rappresentare il fenomeno della conduzione: non più in forma differenziale ma in forma integrale rispetto al volume di controllo fra la superficie iniziale e lo strato di penetrazione a profondità $\delta(\tau)$.

Si osservi che questo risultato poteva immediatamente essere dedotto scrivendo il bilancio energetico nello strato fra $x=0$ ed $x=\delta(\tau)$ e cioè:

$$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} - \left(-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=\delta} \right) = \rho c \frac{d}{d\tau} (T - T_i)$$

e quindi integrando fra 0 e $\delta(\tau)$ si ottiene la precedente *equazione integrale*. Si osservi che questa equazione è del tutto esatta e rappresenta un diverso modo di scrivere l'equazione generale della conduzione. In questo caso, infatti, il bilancio non è più effettuato per un elemento di volume ma per un volume finito (detto *volume di controllo*) compreso fra la faccia esterna ($x=0$) e lo strato di penetrazione (a profondità $x = \delta(\tau)$). La soluzione di questa equazione, tuttavia, non è agevole poiché, come si può osservare facilmente, si hanno due incognite contemporaneamente $\delta(\tau)$ e $T(x, \tau)$. E' proprio nel tentativo di voler risolvere questa indeterminazione che si introducono errori di calcolo che sono però di piccola entità.

In definitiva assumiamo di conoscere la distribuzione di temperatura $T(x, \tau)$ e risolviamo l'equazione integrale per trovare $\delta(\tau)$. Poiché il profilo di temperatura non è a priori noto siamo costretti ad immaginarlo sulla base di osservazioni sperimentali o per analogia con casi simili. E' questa la limitazione del metodo. Nel caso in esame si supponga di avere una distribuzione polinomiale della temperatura, cioè supponiamo che sia una distribuzione quadratica del tipo:

$$T(x, \tau) = a + bx + cx^2$$

I coefficienti polinomiali sono calcolabili imponendo le condizioni al contorno già indicate.

Si ottengono allora i seguenti valori:

$$a = T_p, \quad b = 2 \frac{T_i - T_p}{\delta}, \quad c = -\frac{T_i - T_p}{\delta^2}$$

Ne segue che il profilo di temperatura è dato dalla relazione:

$$\frac{T(x, \tau) - T_i}{T_p - T_i} = 1 - 2 \left(\frac{x}{\delta} \right) + \left(\frac{x}{\delta} \right)^2$$

Il profilo reale di temperatura non è parabolico ma si discosta poco da questo andamento, come si vedrà fra poco. Ora possiamo risolvere l'equazione integrale:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} [T(x, \tau) - T_i] dx = -a \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

essendo $T(x, \tau)$ nota. Sostituendo ed effettuando i calcoli si ottiene:

$$\delta \frac{d\delta}{d\tau} = 6a$$

poiché $\delta(0)=0$, la precedente equazione fornisce:

$$\delta = \sqrt{12a\tau}$$

Ora anche la distribuzione di temperatura è univocamente determinata.

Il flusso alla superficie ($x=0$) è dato dalla relazione:

$$q_p'' = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\lambda (T_p - T_i)}{\sqrt{a\tau}}$$

La soluzione esatta porta al risultato:

$$\frac{T(x, \tau) - T_i}{T_p - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$$

e il flusso alla superficie iniziale è dato da:

$$q''_p(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda(T_p - T_i)}{\sqrt{a\tau}}$$

Un confronto con la soluzione approssimata ottenuta con il metodo integrale porta ad valutare l'errore finale che risulta pari al 2.3% e quindi del tutto accettabile nelle applicazioni pratiche. La bontà del metodo integrale deriva dal fatto che esso si propone come un algoritmo generale per la risoluzione di problemi complessi anche non lineari.

Qualora si fosse ipotizzato un profilo di temperatura cubico, iterando lo stesso metodo visto in precedenza, si sarebbe ottenuta una soluzione approssimata con un errore del 6% rispetto alla soluzione esatta. Va detto che non sempre si dispone di una soluzione esatta con la quale paragonarsi ed è per questo motivo che il metodo integrale risulta valido.

Esso, infatti, ci permette di ottenere risultati validi (cioè con approssimazione accettabile) anche nei casi difficili dove la soluzione teorica (esatta) non è possibile trovare. Questo metodo consente di ottenere soluzioni anche per problemi non lineari quali, ad esempio, il caso di conducibilità termica dello strato variabile o condizioni al contorno non lineari.

Si rimanda alla letteratura tecnica specializzata per lo studio di questi casi.

2.2 METODO DELLA TRASFORMATATA DI LAPLACE

Un metodo efficace per la soluzione di problemi in transitorio termico monodimensionale è quella dell'utilizzo della *Trasformata di Laplace* cioè di una trasformazione di variabili da reali a complesse ma con la possibilità di risolvere in modo apparentemente più semplice i problemi monodimensionali.

2.2.1 DEFINIZIONE DELLA TRASFORMATATA DI LAPLACE

Brevemente si ricorda che questa trasformata è definita nel campo dei numeri complessi dalla relazione:

$$F(p) = \mathcal{L}(f(\tau)) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau$$

ove $F(p)$ è la *trasformata di Laplace* e p è una variabile complessa. La trasformata esiste se l'integrale sopra indicato converge per alcuni valori di p . In particolare debbono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

- La funzione $f(\tau)$ è continua o continua a tratti in qualunque intervallo $\tau_0 < \tau < \tau_1$ con $\tau_0 > 0$;
- $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^n f(\tau) = 0$ per n tale che sia $0 < n < 1$;
- la funzione $f(\tau)$ è di ordine esponenziale γ per $\tau \rightarrow \infty$.

Ad esempio, si può facilmente calcolare la trasformata di Laplace per casi semplici quale la funzione lineare τ (con $\tau > 0$). Infatti si ha:

$$\mathcal{L}(\tau) = \int_0^{\infty} \tau e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{p^2}$$

per $p > 0$. Allo stesso modo si ha per $f(\tau) = 1$:

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{p}$$

per $p > 0$. Per $f(\tau) = e^{\alpha\tau}$ si ha:

$$\mathcal{L}(e^{\alpha\tau}) = \int_0^{\infty} e^{\alpha\tau} e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{p-\alpha}$$

per $p > \alpha$. Allo stesso modo si procede per $f(\tau) = \sin(\omega\tau)$ che fornisce $\mathcal{L}(\sin \omega\tau) = \omega/(p^2 + \omega^2)$ con $p > 0$. Ed ancora $\mathcal{L}(\cos \omega\tau) = p/(p^2 + \omega^2)$.

Laplace transforms			
Transform no.	$\tilde{f}(p)$	$f(t)$	$(t > 0)$
1	$\frac{1}{p}$	1	
2	$\frac{1}{p^2}$	t	
3	$\frac{1}{p^n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, 0! = 1$	
4	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	
5	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}	
6	$\frac{1}{(p-a)^n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}, 0! = 1$	
7	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$	
8	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$	
9	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\sinh at$	
10	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\cosh at$	
11	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$	
12	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$	
13	$\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$	$t \sinh at$	
14	$\frac{p^2 + a^2}{p^2 - a^2}$	$t \cosh at$	
15	$\frac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2}$	$\sin at - at \cos at$	
16	$\frac{2a^3}{(p^2 - a^2)^2}$	$at \cosh at - \sinh at$	

Tabella 2: Tabelle delle trasformate di Laplace – Parte 1°

Sulla base della linearità delle definizioni sopra indicate si ha:

$$\mathcal{L}[C_1 f_1(\tau) + C_2 f_2(\tau)] = C_1 \mathcal{L}[f_1(\tau)] + C_2 \mathcal{L}[f_2(\tau)]$$

Nei manuali specializzati (vedasi anche il corso di *Teoria dei Sistemi*) si hanno tabelle che forniscono le trasformate di Laplace per un grande numero di funzioni.

Si definisce anche la trasformata di Laplace delle derivate, cioè:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{d\tau}\right) = pF(p) - f(0)$$

per $\tau > \tau_1$. Analogamente si ha per la trasformata di Laplace di un integrale:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\tau f(\tau)\right] = \frac{1}{p}F(p)$$

Transform no.	$\bar{f}(p)$	$f(t) \quad (t > 0)$
17	$\frac{4a^3}{p^4 + 4a^4}$	$\sin at \cosh at - \cos at \sinh at$
18	$\frac{2a^2p}{p^4 + 4a^4}$	$\sin at \sinh at$
19	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
20	$\frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2}}$	$I_0(at)$
21	$\frac{a}{(p^2 + a^2)^{3/2}}$	$tJ_1(at)$
22	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^{3/2}}$	$tJ_0(at)$
23	$\frac{a}{(p^2 + a^2)^{3/2}}$	$tI_1(at)$
24	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^{3/2}}$	$tI_0(at)$
25	$e^{-x\sqrt{p/a}}$	$\frac{x}{2(\pi at)^{1/2}} e^{-x^2/4at}$
26	$\frac{e^{-x\sqrt{p/a}}}{\sqrt{p/a}}$	$\left(\frac{a}{\pi t}\right)^{1/2} e^{-x^2/4at}$
27	$\frac{e^{-x\sqrt{p/a}}}{p}$	$\operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2(at)^{1/2}}\right]$
28	$\frac{e^{-x\sqrt{p/a}}}{p\sqrt{p/a}}$	$2\left(\frac{at}{\pi}\right)^{1/2} e^{-x^2/4at} - x \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2(at)^{1/2}}\right]$
29	$\frac{e^{-x\sqrt{p/a}}}{p^2}$	$t + \frac{x^2}{2a} \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2(at)^{1/2}}\right] - x\left(\frac{t}{\pi a}\right)^{1/2} e^{-x^2/4at}$
30	$\frac{e^{-a/p}}{p^{3/2}}$	$\frac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
31	$\frac{e^{-a/p}}{\sqrt{p}}$	$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$
32†	$-\frac{(\gamma + \ln p)}{p}$	$\ln t$

Tabella 3: Tabelle delle trasformate di Laplace – Parte 2°

Oltre alla trasformata diretta di Laplace si definisce anche la trasformata inversa, cioè:

$$f(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

e quindi deve essere:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) d\tau = F(p)$$

Nei manuali si hanno tabelle già predisposte che consentono di trovare sia le trasformate dirette che le inverse.

Per trovare la trasformata inversa di una funzione non presente in tabella si cerca di scomporla in somma di funzioni semplici delle quali è facile conoscere le trasformate di Laplace. Un metodo molto seguito (vedi *Teoria dei Sistemi*) è la scomposizione mediante il *polinomio di Heaviside*. Si dimostra, infatti, che vale la relazione:

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \dots$$

ove A, B, ... sono determinati mediante le relazioni:

$$A = \left. \frac{N(p)(s-a)}{D(p)} \right|_{s \rightarrow a}$$

$$B = \left. \frac{N(p)(s-b)}{D(p)} \right|_{s \rightarrow b}$$

e così via per gli altri fattori. Noto lo sviluppo di Heaviside si calcolano le trasformate inverse poiché ogni funzione fratta è facilmente invertibile mediante le tabelle.

Transform no.	$\bar{f}(p)$	$f(t) \quad (t > 0)$
33	$\frac{\sinh px}{p \sinh pa}$	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}$
34	$\frac{\sinh px}{p \cosh pa}$	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
35	$\frac{\cosh px}{p \sinh pa}$	$\frac{t}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$
36	$\frac{\cosh px}{p \cosh pa}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
37	$\frac{\sinh x\sqrt{p}}{\sinh a\sqrt{p}}$	$\frac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n^2 \pi^2 t/a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$
38	$\frac{\cosh x\sqrt{p}}{\cosh a\sqrt{p}}$	$\frac{\pi}{a^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
39	$\frac{\sinh x\sqrt{p}}{p \sinh a\sqrt{p}}$	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t/a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$
40	$\frac{\cosh x\sqrt{p}}{p \cosh a\sqrt{p}}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$

Tabella 4: Tabelle delle trasformate di Laplace – Parte 3°

2.2.2 APPLICAZIONE AL CASO DELLA PARETE PIANA

Si consideri una parete piana di spessore $2L$, avente proprietà termofisiche costanti, alla temperatura iniziale T_i . All'istante $\tau=0$ si cambia la temperatura delle facce esterne portandola al valore T_w e tale valore sia mantenuto costante per tutto il tempo di evoluzione del transitorio.

Posta l'origine nella mezzzeria della parete, l'equazione della conduzione diviene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

con le condizioni iniziali:

- $T(x,0) = T_i$,
- $\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = 0$
- $T(L,\tau) = T_w$

Applichiamo il metodo delle trasformate di Laplace trasformando ambo i membri della precedente equazione:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{a} \mathfrak{L}\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)$$

Per le proprietà della trasformata di Laplace sopra citate si ha:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2}$$

avendo indicato con \bar{T} la trasformata di Laplace di T :

$$\bar{T} = \bar{T}(x, p) = \mathfrak{L}[T(x, \tau)] = \int_0^\infty e^{-p\tau} T(x, \tau) d\tau$$

e ricordando che questa dipende solo da τ e non da x . Inoltre:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right) = p\bar{T}(x, p) - T_i$$

Pertanto l'equazione della conduzione trasformata diviene:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{T} = -\frac{T_i}{a}$$

Le condizioni al contorno sono ora date da:

- $\frac{d\bar{T}(0, p)}{dx} = 0$
- $\bar{T}(L, p) = \frac{T_w}{p}$

L'avere trasformata l'equazione della conduzione nel piano (x,p) ha portato all'eliminazione del tempo e quindi ad avere una equazione differenziale nella sola variabile x . Integrando si ottiene:

$$\bar{T}(x, p) = C_1 \cosh(mx) + C_2 \sinh(mx)$$

ove si è posto $m^2 = p/a$ e C_1 e C_2 sono le costanti di integrazione che si determinano con le condizioni al contorno sopra indicate. In particolare per $x=0$ si ha $C_2=0$ e per $x=L$ si ha:

$$C_1 = -\frac{T_i - T_w}{p \cosh(mL)}$$

pertanto si ha:

$$\bar{T}(x, p) = \frac{T_i}{p} - \left(T_i - T_w \frac{\cosh(mx)}{\cosh(mL)} \right)$$

Per trovare la funzione temporale occorre ora invertire la trasformata di Laplace sopra ottenuta. Dal confronto con la Tabella 4 si ottiene:

$$T(x, \tau) = T_i - (T_i - T_w) \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{4L^2} \tau} \right\} \cos \left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x}{L} \right]$$

che corrisponde alla soluzione trovata con i metodi tradizionali.

2.2.3 APPLICAZIONE ALLO STRATO SEMINFINITO

Il metodo delle trasformate di Laplace si applica vantaggiosamente anche per lo studio dello strato seminfinito già visto in precedenza. L'equazione della conduzione, ponendo $\theta = T(x, \tau) - T_i$, è:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

con le condizioni al contorno:

- $\theta(x, 0) = 0$
- $\theta(0, \tau) = T_w - T_i = \theta_w$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x, \tau) = 0$

La trasformazione dell'equazione differenziale della conduzione porta ad avere:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{\theta} = 0$$

con le condizioni limiti:

- $\bar{\theta}(x, p) = \frac{\theta_w}{p}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\theta}(x, p) = 0$

La soluzione dell'equazione trasformata porta all'integrale generale:

$$\bar{\theta}(x, p) = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$

con C_1 e C_2 costanti di integrazione e $m^2 = p/a$. Le condizioni al contorno portano ad avere $C_2 = 0$ ed inoltre è:

$$C_1 = \frac{\theta_w}{p}$$

Pertanto si ha:

$$\frac{\bar{\theta}(x, p)}{\theta_w} = \frac{e^{-mx}}{p} = \frac{e^{-x\sqrt{p/a}}}{p}$$

La trasformazione inversa, mediante la Tabella 3, fornisce il risultato:

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_w} = \frac{T(x, \tau) - T_i}{T_w - T_i} = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right)$$

che coincide con la soluzione esatta di Blasius.

2.3 USO DELLE FUNZIONI ORTOGONALI DI STURM - LIOUVILLE

Si dicono ortogonali le funzioni che rispettano la regola:

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) w(x) dx = 0 \quad \text{per} \quad m \neq n$$

con $w(x)$ detta *funzione peso*. Una tipica funzione ortogonale è la funzione trigonometrica $\sin(x)$ per la quale risulta, ponendo la funzione peso pari ad 1:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0 \quad \text{per} \quad n \neq m$$

si hanno numerose altre funzioni che godono della proprietà dell'ortogonalità fra le quali anche la funzione $\cos(x)$ e alcune funzioni di *Bessel*.

Queste funzioni sono di grande importanza per la soluzione di una categoria di equazioni differenziali dette di *Sturm – Liouville*. Esse sono definite dalla relazione:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0$$

con le condizioni al contorno del tipo:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 \frac{dy(a)}{dx} = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 \frac{dy(b)}{dx} = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

Le soluzioni delle equazioni di *Sturm – Liouville* si dimostra che appartengono alla famiglia di funzioni ortogonali come sopra definite. Le serie di Fourier e le trasformate finite di Fourier rientrano in queste classi di funzioni ortogonali. Così, ad esempio, l'equazione differenziale, di tipo *Sturm – Liouville*:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$$

con condizioni al contorno:

- $y(0) = 0$
- $y(L) = 0$

è soddisfatta dalla funzione:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

ove si ha:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

Analogamente alle serie di Fourier basate sulle funzioni seno e coseno si hanno le serie di *Hankel* basate sulle funzioni ortogonali di *Bessel* $J(\lambda r)$. Queste funzioni sono importanti per la risoluzione di problemi in coordinate cilindriche. Infatti le equazioni generali di bilancio portano ad avere equazioni differenziali della forma:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (\lambda^2 r^2 - \nu^2) R = 0$$

con le solite condizioni al contorno. La soluzione generale di queste equazioni differenziali è del tipo:

$$R(r) = AJ_\nu(\lambda r) + BY_\nu(\lambda r)$$

con $J_\nu(\lambda r)$ e $Y_\nu(\lambda r)$ funzioni di Bessel di ordine ν .

La serie di *Hankel* utilizza le funzioni ortogonali di Bessel ed è della forma:

$$f(r) = \sum A_n J_\nu(\lambda_n r)$$

ove i coefficienti A_n sono dati dalle relazioni (del tutto analoghe a quelle della serie di Fourier):

$$A_n = \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_\nu(\lambda_n r) r dr}{\int_0^{r_0} J_\nu^2(\lambda_n r) r dr}$$

Con la stessa tecnica si possono utilizzare le *Trasformate finite di Fourier* (dirette ed inverse) per la risoluzione delle equazioni differenziali del tipo *Sturm – Liouville*.

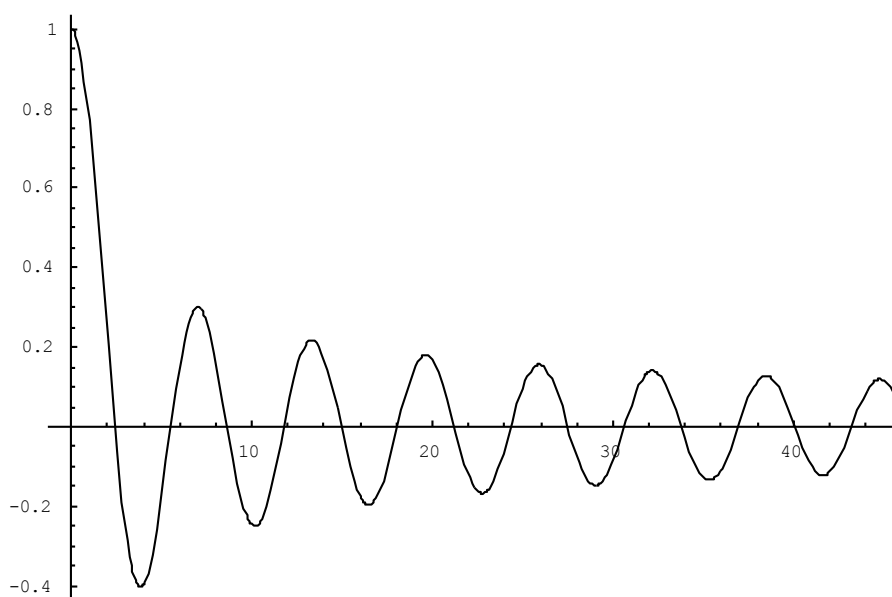


Figura 16: Grafico della funzione $J_0(x)$

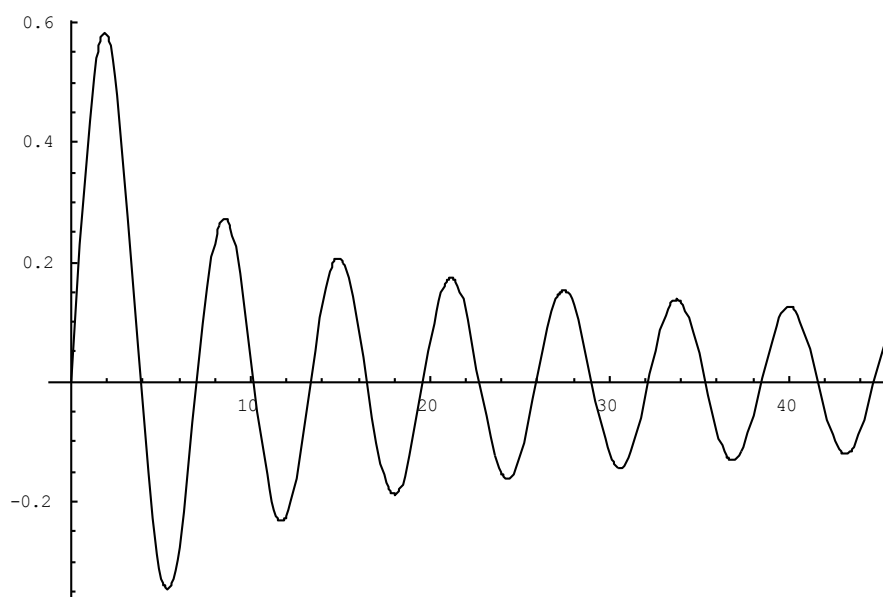


Figura 17: Grafico della funzione $J_1(x)$

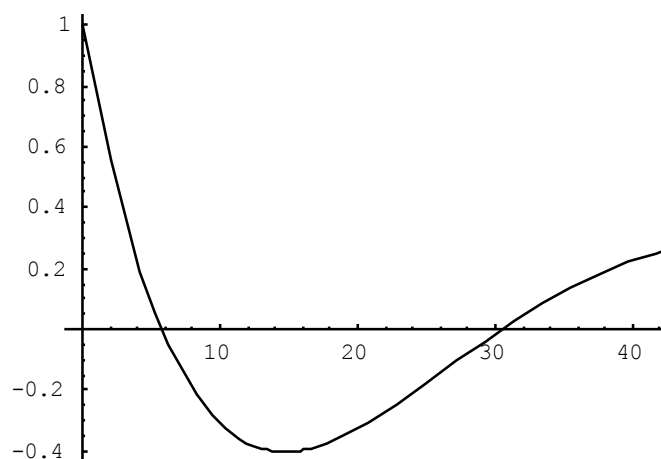


Figura 18: Grafico della funzione $J_0(\sqrt{x})$

Nella Figura 16 si ha l'andamento della funzione $J_0(x)$ mentre in Figura 19 si ha l'andamento della funzione $Y_0(x)$. Si osservi come questo tipo di funzioni ($J_0(x)$ e $Y_0(x)$) siano ad andamento oscillante e smorzato.

In Figura 17 si ha l'andamento della funzione $J_1(x)$ che appare ancora di tipo oscillatorio smorzato, come la $J_0(x)$. In Figura 18 si ha l'andamento di $J_0(\sqrt{x})$.

Analogamente in Figura 20 si ha l'andamento di $Y_1(x)$ che appare ancora oscillatorio e smorzato come la $Y_0(x)$.

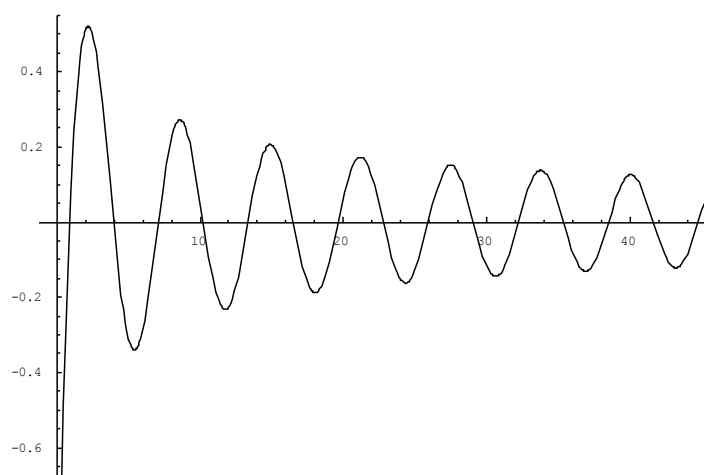


Figura 19: Grafico della funzione $Y_0(x)$

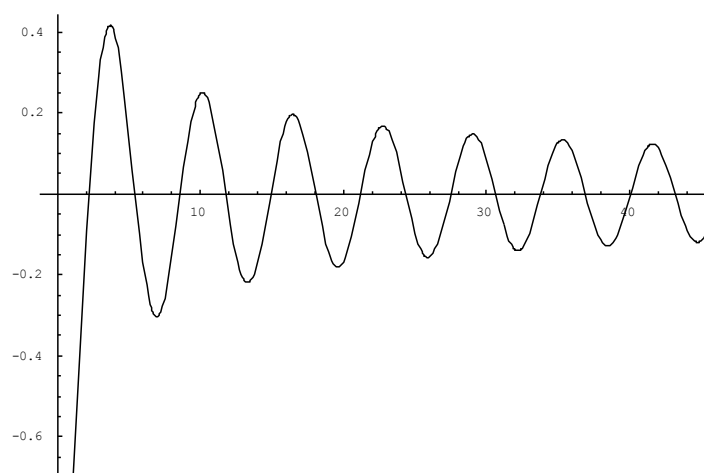


Figura 20: Grafico della funzione $Y_1(x)$

Le funzioni di tipo $I_0(x)$ ed $I_1(x)$ e le funzioni $K_0(x)$ e $K_1(x)$ sono con andamento smorzato, come riportato nella Figura 21 e nella Figura 22. Queste funzioni sono le analoghe delle funzioni esponenziali smorzate (del tipo e^{-mx}).

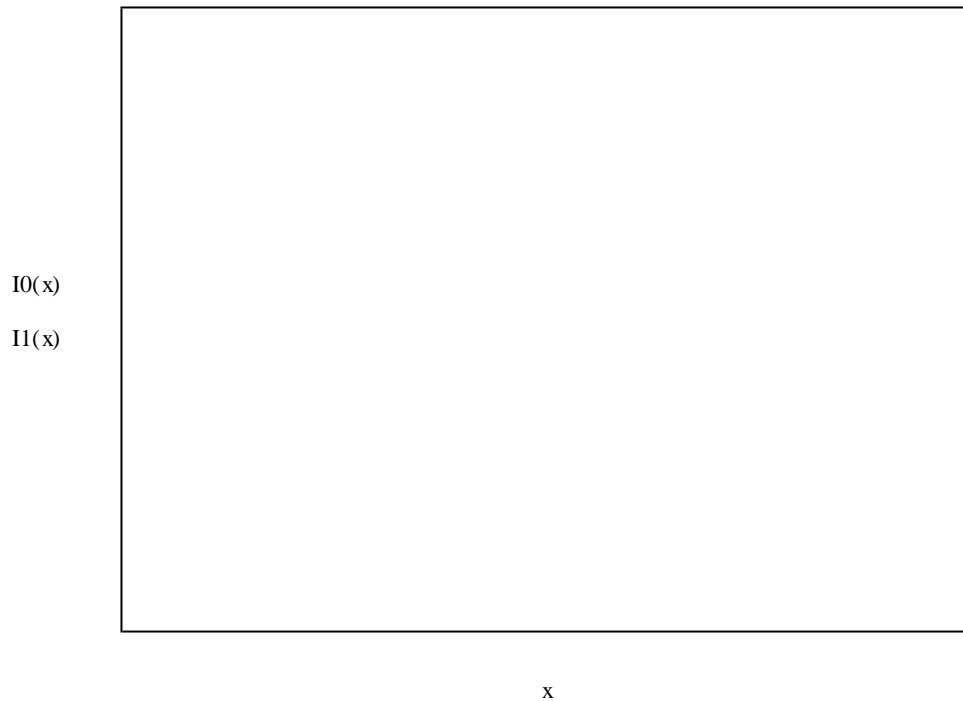


Figura 21: Grafico della funzione $I_0(x)$ e $I_1(x)$



Figura 22: Grafico della funzione $K_0(x)$ e $K_1(x)$

Si rimanda ai testi specializzati per ulteriori approfondimenti sull'argomento.

3 METODI NUMERICI PER LA CONDUZIONE

Si è potuto osservare nei capitoli precedenti come la soluzione dell'equazione generale della conduzione sia molto difficile e complessa non appena si affrontano geometrie che non siano quelle elementari esaminate. Anzi si può senz'altro affermare che la soluzione analitica esatta per i casi reali non è ottenibile sia per la complessità dell'equazione del calore sia per la complessità della geometria da affrontare.

Oggi esistono metodologie risolutive dei problemi di conduzione che possono essere utilizzate nell'ambito di codici di calcolo elettronici anche di larga diffusione. Fra i metodi utilizzati si hanno quelli alle *differenze finite* e agli *elementi finiti*. Considerate le finalità del presente corso si farà cenno brevemente ai metodi semplificati alle *differenze finite* rinviando il lettore ai testi specializzati indicati in bibliografia.

3.1 METODI ALLE DIFFERENZE FINITE

Alla base di questi metodi vi è la sostituzione approssimata, nelle equazioni differenziali che derivano dall'equazione generale della conduzione, delle differenze infinitesime con differenze finite. Questo porta ad ottenere, in genere, un sistema di equazioni algebriche che può essere affrontato e risolto con i metodi classici dell'*Analisi Matematica*.

Naturalmente questa sostituzione non è indolore e comporta sempre l'introduzione di un errore nella precisione del calcolo. I risultati ottenibili con queste metodologie sono oggi molto affidabili e con un errore che può (*per quanto compatibile con la precisione del computer utilizzato*) essere controllato mediante un'opportuna scelta dei parametri di calcolo e dell'algoritmo di risoluzione. Per la formulazione delle differenze finite si può utilizzare lo sviluppo in serie di *Taylor* come qui riportato¹⁰:

$$T(x_i + h) = T(x_i) + h \left(\frac{dT}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_i + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{d^3T}{dx^3} \right)_i + \dots [52]$$

Si ha anche

$$T(x_i - h) = T(x_i) - h \left(\frac{dT}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_i - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{d^3T}{dx^3} \right)_i + \dots [53]$$

Dalla [52], troncando al secondo termine, si ha:

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_i = \frac{T(x_i + h) - T(x_i)}{h} + O(h) [54]$$

e dalla seconda, con analogo procedimento:

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_i = \frac{T(x_i) - T(x_i - h)}{h} + O(h) [55]$$

Le due ultime relazioni rappresentano delle *eguaglianze* fra i primi membri (*derivate della temperatura calcolate nel punto i*) e il secondo membro nel quale compaiono rapporti di differenze finite e un termine, detto *errore*, del tipo $O(h)$ cioè del primo ordine.

¹⁰ Vale la pena osservare che la [52] è una **identità** e quindi il primo membro è *eguale* al secondo membro e *viceversa*. Ma è facile convincersi che questa identità è solo teorica ed è normalmente accettata dal nostro cervello per la sua già citata grande capacità di *astrazione matematica*. E' praticamente impossibile, infatti, sommare infiniti numeri e quindi *il secondo membro non è di fatto risolvibile*. In genere un problema che pone una simile indeterminazione genera soluzioni non esatte oggi definite *caotiche*. Alla luce di quanto appena detto appare evidente che la risoluzione numerica che qui si sta affrontando non è una mera *semplificazione calcolistica* bensì una *rivoluzione di pensiero profonda*: un problema *correttamente* posto in modo ideale ma non risolvibile nella realtà trova una *modalità risolutiva* che appare non formalmente corretta ma che risulta capace di produrre una soluzione reale. In definitiva l'**approssimazione** che qui si introduce non è una *ignoranza metodologica* ma una **necessità** risolutiva conseguente all'indeterminazione effettiva che lo sviluppo di *Taylor* pone.

Se conoscessimo l'errore¹¹ $0(h)$ potremmo utilizzare le differenze finite a secondo membro senza commettere errori. Purtroppo $0(h)$ dipende dagli sviluppi degli altri termini (*infiniti*) delle serie che sono stati trascurati e non possono essere calcolati senza effettuare tutti i calcoli (*infiniti*) necessari.

Pertanto se trascuriamo $0(h)$ si può solo scrivere:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \approx \frac{T(x_i + h) - T(x_i)}{h} \quad [56]$$

e ancora:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \approx \frac{T(x_i) - T(x_i - h)}{h} \quad [57]$$

Si hanno segni *circa-eguale* e non più *eguale* e pertanto se sostituiamo i primi membri con i secondi membri (*differenze finite*) commettiamo certamente un errore che è dell'ordine $0(h)$. Le due ultime relazioni si possono scrivere, utilizzando una simbologia tipica dell'analisi numerica, nella forma più comoda e compatta:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \cong \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \quad [58]$$

e ancora:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \cong \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \quad [59]$$

Sono queste due forme possibili di sviluppo alle differenze finite dette, rispettivamente, la [58] *differenze finite in avanti* (o anche *forward*) e la [59] *differenze finite all'indietro* (o anche *backward*). E' possibile anche ottenere una terza forma facendo la differenza delle [52] e [53] sempre arrestate al secondo termine; si ottiene:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \approx \frac{T(x_i + h) - T(x_i - h)}{2h} \quad [60]$$

che viene scritta in forma simbolica nella forma:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i \cong \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} \quad [61]$$

detta *differenze finite centrali*. Allo stesso modo utilizzando le [52] e [53] con sviluppo arrestato al terzo termine si, facendo la somma membro a membro:

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i = \frac{T(x_i + h) + T(x_i - h) - 2T(x_i)}{h^2} + 0(h^2) \quad [62]$$

Ne consegue che, a meno di errori proporzionali a $0(h^2)$ si può scrivere:

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i \approx \frac{T(x_i + h) + T(x_i - h) - 2T(x_i)}{h^2} \quad [63]$$

In forma simbolica si può ancora scrivere:

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i \cong \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{\Delta x^2} \quad [64]$$

¹¹ In realtà non potremmo mai conoscerlo con precisione perché, come detto in precedenza, dovremmo sommare infiniti termini!

che esprime, a meno dell'errore $O(h^2)$, la derivata seconda, calcolata nel punto i , in funzione delle differenze finite. Abbiamo adesso predisposto l'apparato matematico necessario a trasformare l'equazione della conduzione:

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad [65]$$

in forma algebrica alle differenze finite.

3.2 DIFFERENZE FINITE NELLA CONDUZIONE STAZIONARIA

Si abbia un corpo nel quale si desideri studiare la distribuzione della temperatura, ossia conoscere come varia $T(x, y, z, \tau)$. Si suddivida il corpo (*che per semplicità qui raffiguriamo nel piano (x, y)*) con un reticolo avente passi Δx e Δy nelle due direzioni. Con riferimento al reticolo alla Figura 23 e partendo dal nodo centrale di figura (*indicato con i pedici i, j*) si può riscrivere la [6] nella forma esatta, supponendo di essere in regime stazionario e in assenza di sorgenti di calore interne:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad [66]$$

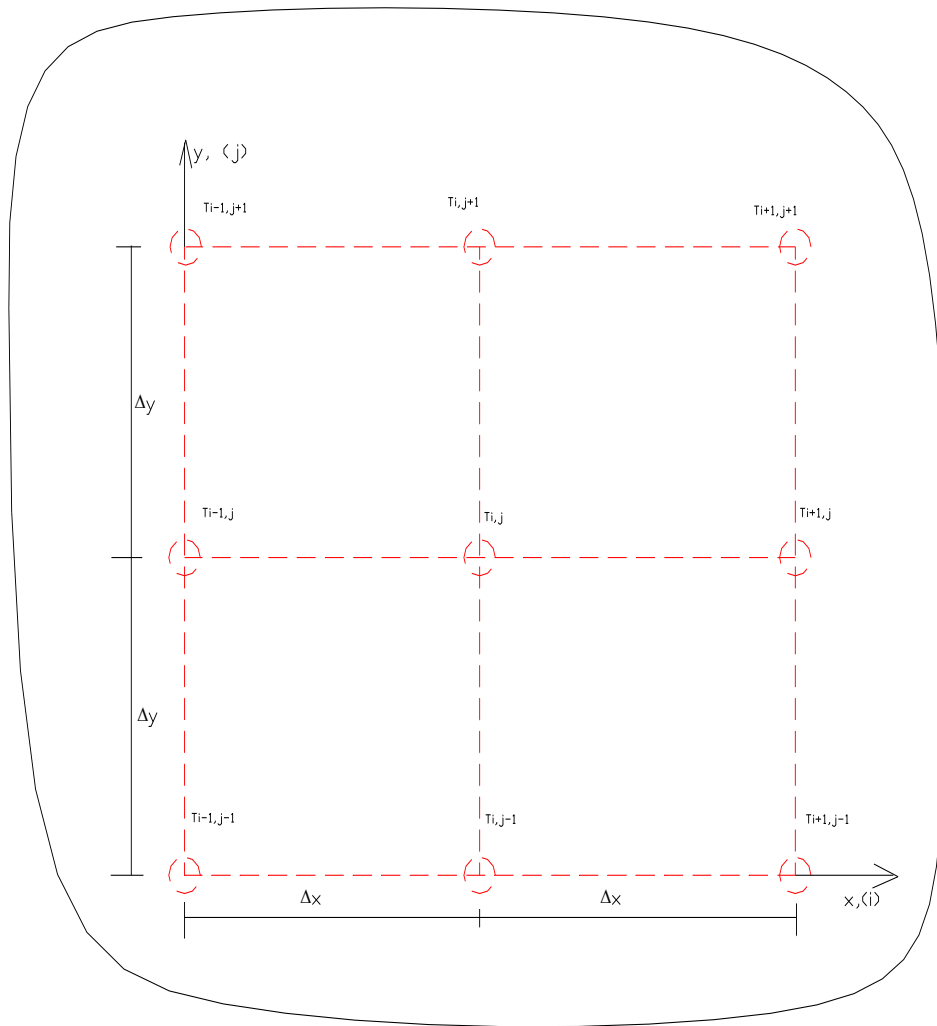


Figura 23: Reticolo piano per il metodo alle differenze finite

Per trasformare la [66] in equazione alle *differenze finite* si deve utilizzare la [64] sia per la direzione x che per la direzione y .

In pratica si hanno le seguenti posizioni, perle derivate prime nella forma *forward*:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \quad [67]$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \cong \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \quad [68]$$

e ancora:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{\Delta x^2} \quad [69]$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cong \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta y^2} \quad [70]$$

per le derivate seconde.

Sostituendo la [69] e la [70] nell'equazione [66] si ottiene:

$$2(1 + \beta)T_{i,j} = T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + \beta T_{i,j+1} + \beta T_{i,j-1}$$

ove si è indicato con:

$$\beta = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2$$

il *fattore di reticolo*.

Qualora $\beta=1$ si ottiene la relazione:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

che fornisce immediatamente il valore della temperatura nei punti (i,j) note che siano quelle dei quattro punti ad esso adiacenti (vedi Figura 23).

Questo suggerisce il procedimento di calcolo, sia manuale che automatico, che occorre seguire per la determinazione delle temperature nei punti di un corpo:

- si traccia un reticolo con passi trasversali e longitudinali eguali ($\Delta x = \Delta y$);
- si fissano le temperature iniziali al contorno (*condizione del 1° tipo*) o si fornisce qualunque altro tipo di condizione al contorno (*vedi più avanti*);
- si calcola, per ciascun punto interno del reticolo prefissato, la temperatura come media delle temperature dei punti adiacenti;
- si calcola la differenza (*errore*) fra il valore ora calcolato e quella del ciclo precedente (*tranne per il primo ciclo di calcolo nel quale, invece, si memorizza il valore calcolato e si azzerava l'errore per il punto esaminato*);
- calcolate le temperature e gli errori per tutti i punti del reticolo si confronta l'errore di ciascun punto con quello massimo che si desidera ottenere: se per tutti i punti si ha un errore calcolato inferiore a quello massimo prefissato allora si possono fermare le iterazioni altrimenti si riprende dall'inizio e si procede fino a quando la condizione di errore massimo si è verificata.

Va precisato, però, che l'errore non può essere fissato a piacere senza tenere conto della precisione di calcolo che si può raggiungere sia con lo strumento di elaborazione utilizzato sia in conseguenza dei passi di reticolo scelti.

Qualora si desidera avere una precisione maggiore occorre raffinare il reticolo e viceversa.

Se la precisione di calcolo del computer non consente precisioni elevate¹² è bene limitare l'errore massimo desiderato, ad esempio si può cercare una precisione del decimo di grado o al massimo del centesimo di grado (*seconda cifra decimale!*) altrimenti si rischia di avere tempi di calcolo inaccettabili e soluzioni irraggiungibili.

La determinazione della temperatura nei punti del corpo può essere ottenuta iterativamente con l'algoritmo indicato ovvero si può anche scrivere un sistema di equazioni, una per ciascun punto incognito, e risolvere il sistema in unico passo di calcolo.

Non si pensi che questa soluzione sia migliore della prima e che con essa si possa trascurare quanto detto a proposito dell'errore di calcolo. La risoluzione di un sistema algebrico di grandi dimensioni (*a seconda dei casi si va da poche centinaia a migliaia di equazioni da elaborare*) porta intrinsecamente il problema della precisione di calcolo sia per il tipo di rappresentazione numerica utilizzato (*in singola o in doppia precisione*) sia per la precisione massima di calcolo consentita (*numero di byte utilizzato dal processore*).

Inoltre la stessa risoluzione del sistema di equazioni utilizza metodi iterativi interni alle librerie di calcolo (*ad esempio il metodo della triangolarizzazione,...*) che sono fortemente condizionati dalla precisione di calcolo utilizzata nel senso che i risultati finali sono dipendenti da questa precisione.

Se consideriamo un sistema di 1000 equazioni (*relativo a 1000 punti interni al corpo*) e si fa riferimento al metodo di *Cramer* per la risoluzione allora il determinante del sistema sarà la somma di 1000 termini ciascuno composto dal prodotto di 1000 elementi di righe e colonne diverse della matrice del sistema. Se ogni numero della matrice è composto da tre cifre più due decimali ne risulterà che i 1000 prodotti saranno dell'ordine di $10^{2 \times 1000}$ e quindi certamente superiori alla massima rappresentazione interna di qualsivoglia computer.

Pertanto è bene normalizzare la matrice in modo da avere numeri avente parte intera di una cifra e parte decimale di cinque cifre. Il problema *dell'overflow* numerico sussiste ancora. Meglio utilizzare la rappresentazione scientifica del tipo $X.XXXXXE \pm YY$ ma anche in questo caso l'esponente YY ha un limite massimo che dipende dalla precisione (*ad esempio ± 23 per la doppia precisione nei computer da tavolo*).

Qualunque sia il metodo di risoluzione che si intende adottare occorre sempre considerare con molta attenzione i problemi di calcolo che ne derivano in relazione alla precisione consentita dal computer utilizzato. Non si commetta l'errore di credere che il computer esegue sempre in modo esatto i calcoli: si rischia di commettere errori grossolani ed avere spiacevoli sorprese.

3.3 FORMULAZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO

Se le condizioni al contorno sono del primo tipo (di *Dirichlet*) allora basta conoscere la temperatura di tutti i punti che ricadono sulla superficie esterna del corpo da studiare. Può succedere, però, che anche in questo caso si possano incontrare difficoltà nell'applicare l'equazione della conduzione per la tipologia della forma geometrica esterna del corpo.

In generale per determinare le condizioni al contorno (*ma anche per arrivare alle equazioni alle differenze finite vere e proprie*) si può seguire il metodo dell'**equazione di bilancio termico** scritta alle differenze finite.

¹² I computer digitali lavorano sempre con numeri binari e con essi cercano di rappresentare tutte le grandezze che possono elaborare. La precisione di calcolo che è possibile raggiungere dipende dal numero di bit (*cifra binaria che assume valori 0 o 1*) che il computer può elaborare per ogni numero. Di solito i bit vengono raggruppati in gruppi di otto detti byte. Nei computer da tavolo (del tipo *Personal Computer*) il numero di byte utilizzati per i calcoli va da 4 (*singola precisione*) a otto (*doppia precisione*). E' chiaro che al crescere dei byte per rappresentare ogni numero reale cresce anche l'occupazione della memoria di calcolo (RAM) utilizzata e pertanto si ha sempre un compromesso fra la precisione e l'occupazione della memoria. Con le tipologie prima indicate le precisioni che si possono ragionevolmente raggiungere sono di due ÷ tre cifre per la singola precisione e tre ÷ cinque cifre per la doppia precisione. In pratica *l'insieme dei numeri reali esterni non trova una corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri rappresentati nel computer* che sono sempre **finiti**! Pertanto è *perfettamente inutile* cercare una precisione di calcolo che non è raggiungibile con il sistema di calcolo utilizzato. Nel caso si richieda una precisione eccessiva (*e quindi irraggiungibile con il calcolo*) si avrà un ciclo senza fine e quindi occorre sempre inserire un controllo interno al ciclo stesso che consenta di uscire qualora si sia raggiunto un numero massimo prefissato (*ad esempio 20*) di iterazioni. Con i computer di classe più elevata si possono oggi raggiungere precisioni altrettanto più elevate. E' questo il caso dei computer di grandi dimensioni (*supercomputer o mainframe*) che utilizzano normalmente 128 o 256 bit (*64 byte!*) per i calcoli.

Si consideri il caso indicato in Figura 24 nella quale si ha la rappresentazione schematica di un corpo lambito da un fluido avente temperatura T_f e coefficiente di convezione h . Consideriamo il volume¹³ tratteggiato (*corrispondente a mezzo reticolo adiacente alla superficie lambita dal fluido*).

Possiamo scrivere per questo volume (detto *di controllo*, vedi Figura 24) il bilancio energetico: il calore uscente da esso per conduzione, in regime stazionario e senza sorgente di calore interna, è pari a quello entrante nel fluido per convezione termica, cioè si ha:

$$\lambda \Delta x \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\Delta x} = h \Delta x (T_{i,j} - T_f)$$

Sviluppando questa uguaglianza e ponendo:

$$Bi = h \frac{\Delta x}{\lambda} \quad [71]$$

detto *Numero di Biot*¹⁴ si ottiene la relazione desiderata di bilancio energetico:

$$T_{i,j} = \frac{1}{2 + Bi} \left[T_{i-1,j} + \frac{1}{2} (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) + Bi T_f \right] \quad [72]$$

Anche questa equazione è scritta in forma algebrica e può essere utilizzata per risolvere problemi aventi condizioni al contorno del 3° tipo (*conduzione più convezione*). In genere le condizioni al contorno possono essere di complessa definizione (*anche geometrica*) in funzione della forma del corpo, della tipologia di scambio (*e quindi del tipo di condizione al contorno*). Nella seguente Tabella 5 si hanno alcuni casi, fra i più usuali, per i quali si riportano le equazioni esplicite per la determinazione delle temperature ai nodi di contorno.

3.4 CONDUZIONE STAZIONARIA CON SORGENTI DI CALORE

E' un caso direttamente derivato dall'applicazione dell'equazione di *Poisson*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{\lambda} = 0 \quad [73]$$

Le uniche differenze nella risoluzione di questo caso si hanno nella necessità di aggiungere q'''/λ alle equazioni del tipo già viste in precedenza. Si lascia al lettore lo sviluppo.

3.5 CONDUZIONE STAZIONARIA IN GEOMETRIA CILINDRICA

L'equazione di *Laplace* e di *Poisson* in geometria cilindrica divengono, rispettivamente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad [74]$$

e ancora:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{\lambda} = 0 \quad [75]$$

Sostituendo gli sviluppi alle differenze finite delle derivate prime e seconde espresse in funzione di r e di z (si lascia al lettore la rielaborazione nelle nuove variabili) la [75] (più generale della [74]) diviene:

¹³ Si suppone uno spessore unitario del corpo in esame. Del resto abbiamo già detto di rappresentare solamente una schematizzazione bidimensionale per chiarezza espositiva.

¹⁴ Non si confonda il numero di *Biot* con il numero di *Nusselt* ($Nu = hL/\lambda$), di questo numero *adimensionale* si parlerà per la convezione termica) che sembra formulato in modo analogo a Biot. Nel primo caso (*Biot*) ci si riferisce ad un coefficiente di convezione h del fluido e ad un coefficiente di conducibilità termica λ unitamente al fattore geometrico Δx del corpo solido. Nel secondo caso (*Nusselt*) tutti i parametri sono riferiti al fluido nel quale avviene la convezione termica.

$$\frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 2T_{i,j}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta z^2} + \frac{q'''}{\lambda} = 0$$

ove l'asse z corrisponde all'indice j e l'asse r corrisponde all'indice i .

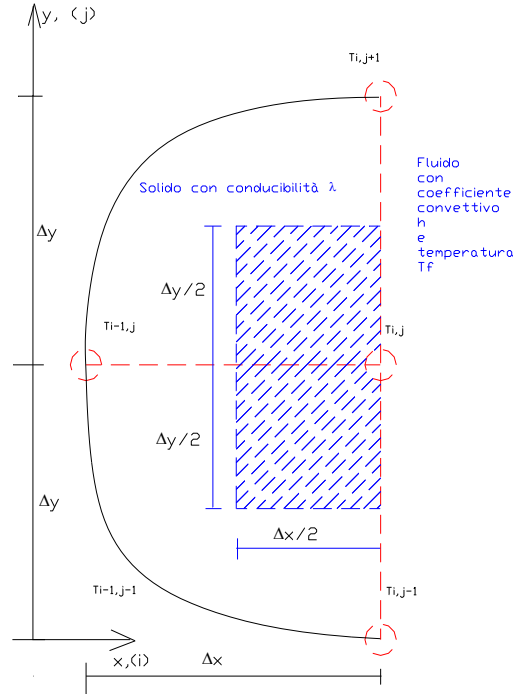


Figura 24: Condizione al contorno del terzo tipo – Convezione esterna

	$T_0 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{4}(T_2 + T_3)$ $T_0 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{4}(T_2 + T_3) + \frac{q'''\Delta x}{2\lambda}$
	$T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ $T_0 = \frac{1}{3}(T_2 + T_3) + \frac{1}{6}(T_1 + T_4)$
	$T_0 = \frac{1}{1+Bi} \left[\frac{1}{2}(T_1 + T_2) + BiT_f \right]$ $T_0 = \frac{1}{3+Bi} \left[\frac{1}{2}(T_1 + T_4) + (T_2 + T_3) \right] + \frac{BiT_f}{3+Bi}$ $Bi = \frac{h\Delta x}{\lambda}$

Tabella 5: Condizione al contorno per conduzione stazionaria

3.6 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE MONODIMENSIONALE

Si vuole ora brevemente fare un cenno alle metodologie di calcolo numerico applicate al caso della conduzione in regime variabile. L'equazione da risolvere è sempre la [65] che per regime in unica dimensione x diviene:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad [76]$$

Pertanto ricordando lo sviluppo all'indietro della derivata prima dato dalla [59], ora scritta in funzione del tempo τ , si può scrivere :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_m \cong \frac{T_m^{j+1} - T_m^j}{\Delta \tau} \quad [77]$$

Il simbolismo utilizzato è il seguente: il pedice m indica il punto nel reticolo lineare (caso monodimensionale) e l'apice j indica l'istante di tempo per cui j è l'istante attuale e $j+1$ è l'istante successivo.

Lo sviluppo della derivata seconda (dato dalla [64]) ora diviene:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_m \cong \frac{T_m^j - 2T_m^j + T_{m-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad [78]$$

L'equazione della conduzione si scrive quindi nella forma:

$$\frac{T_m^{j+1} - T_m^j}{\Delta \tau} \cong a \frac{T_m^j - 2T_m^j + T_{m-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad [79]$$

Risolvendo rispetto alla temperatura T_m^{j+1} si ottiene l'equazione esplicita:

$$T_m^{j+1} \cong (1 - 2\Delta Fo) T_m^j + \Delta Fo (T_{m-1}^j + T_{m+1}^j) \quad [80]$$

in cui $\Delta Fo = a\Delta\tau / (\Delta x)^2$ è detto *numero di Fourier del reticolo*.

La relazione [80] ci dice che la temperatura nel punto m al tempi $j+1$ è funzione della temperatura nei punti $m, m+1$ ed $m-1$ al tempo j .

In definitiva si ha una incongruenza di calcolo dovuta alla diversità nel riferimento temporale a due istanti diversi. Ciò comporta la possibilità di avere *incongruenze numeriche* che *non trovano riscontro* nell'evoluzione del fenomeno conduttivo.

In pratica può aversi il caso che la temperatura nei punti m intermedio fra $m-1$ ed $m+1$ possa non seguire il *Secondo Principio della Termodinamica* e quindi avere temperature corrispondenti decrescenti in un verso o nell'altro.

Per evitare questa incongruenza (che, si ripete, è *solo matematica*) occorre, nella [80], imporre che i coefficienti delle temperature di tutti i termini a secondo membro siano positivi. Poiché il numero di Fourier è positivo per definizione deve essere:

$$1 - 2\Delta Fo \geq 0 \quad [81]$$

e quindi deve essere:

$$\Delta Fo = \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \leq 0.5 \quad [82]$$

Quest'ultima condizione impone una scelta del passo spaziale Δx e del passo temporale $\Delta\tau$ non più in funzione della precisione di calcolo desiderata ma anche in funzione della *diffusività termica* a del corpo in esame: tanto maggiore è $a\Delta\tau$ tanto maggiore può essere Δx e viceversa.

In termini pratici questo significa che, in condizioni transitorie, il passo spaziale Δx è fortemente dipendente dal tipo di materiale e dal passo temporale e questo può comportare un raffittimento notevole di Δx con conseguenti appesantimento del calcolo complessivo.

3.7 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE BIDIMENSIONALE

La trattazione del caso transitorio bidimensionale segue da vicino quanto visto nel paragrafo precedente.

L'equazione della conduzione ora è nella forma:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad [83]$$

In forma numerica alle differenze finite diviene:

$$\frac{T_{m,n}^{j+1} - T_{m,n}^j}{\Delta \tau} \cong a \frac{T_{m+1,n}^j + T_{m-1,n}^j + T_{m,n+1}^j + T_{m,n-1}^j - 4T_{m,n}^j}{(\Delta x)^2} \quad [84]$$

nella quale i pedici m ed n indicano le coordinate di reticolo Δx e Δy e l'apice j e $j+1$ indicano il passo temporale. Ordinando i termini si ottiene l'equazione:

$$T_{m,n}^{j+1} \cong (1 - 4\Delta Fo) T_{m,n}^j + \Delta Fo (T_{m-1,n}^j + T_{m+1,n}^j + T_{m,n-1}^j + T_{m,n+1}^j) \quad [85]$$

ove è ancora $\Delta Fo = a\Delta\tau / (\Delta x)^2$ e si è scelto, per semplicità, $\Delta x = \Delta y$.

Ricordando quanto detto nel §3.6 la condizione di congruenza numerica (*cioè che i coefficienti delle temperature a secondo membro debbono essere non negativi*) è:

$$1 - 4\Delta Fo \geq 0 \quad \text{da cui} \quad \Delta Fo \leq \frac{1}{4} \quad [86]$$

La scelta del passo temporale (dati Δx e a) deve essere fatta secondo la [86] e non più liberamente. Ciò comporta quasi sempre un notevole appesantimento del calcolo.

La formulazione delle condizioni al contorno per il caso non stazionario può ancora essere fatta con il *metodo del bilancio energetico* già illustrato.

Si tralascia in questa sede lo sviluppo che può essere trovato nei manuali specializzati di *Trasmissione del Calore*.

3.8 METODO GRAFICO DI BINDER SMITH

La [82] suggerisce una semplificazione che trova applicazione nella risoluzione grafica della [80].

Se poniamo la condizione limite:

$$\Delta Fo = 0.5$$

si ottiene dalla [85] la semplice relazione:

$$T_m^{j+1} = \frac{T_{m-1}^j + T_{m+1}^j}{2} \quad [87]$$

Pertanto la temperatura al tempo $j+1$ è la media aritmetica delle temperature all'istante j dei punti contigui al punto m .

In Figura 25 si ha la rappresentazione grafica dei primi tre intervalli di tempo nel transitorio di una striscia (*problema monodimensionale*) avente una temperatura iniziale sul lato a sinistra.

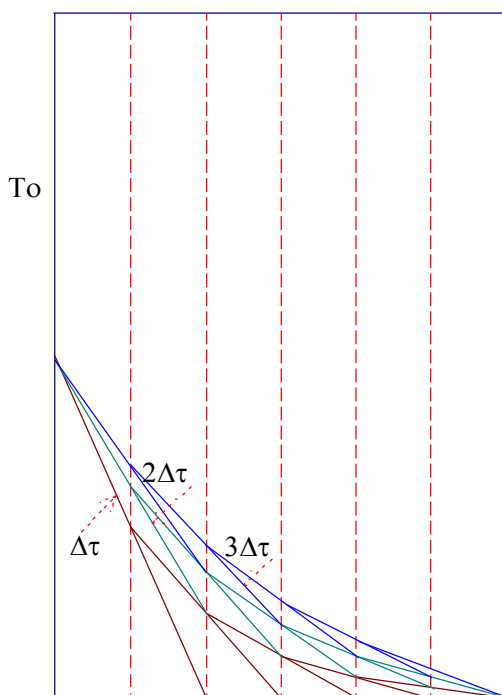


Figura 25: Costruzione grafica di Binder – Smith

3.9 USO DEI CODICI DI CALCOLO

Oltre al metodo alle differenze finite, sopra esposto, si hanno vari metodi fra i quali si cita quello agli elementi finiti. Il metodo di soluzione delle equazioni alle derivate parziali (PDE) con il metodo agli elementi finiti è del tutto generalizzato e viene applicata alla soluzione di qualsivoglia problema matematico e fisico.

Esistono numerosi software commerciali che seguono questa metodologia di soluzione e che contribuiscono a risolvere numerosi problemi reali ben lontani dalla semplicità dimensionale descritta in precedenza.

Applicare un qualsivoglia metodo numerico significa rinunciare ad ottenere la soluzione esatta negli infiniti punti del dominio ma accontentarsi di una soluzione approssimata in un numero finito di punti (che saranno chiamati nodi) individuati con criteri che dipendono dal metodo numerico prescelto. Il processo con cui si individuano i nodi nel dominio è definito “discretizzazione”.

A conclusione della procedura di discretizzazione si perviene sempre ad un sistema di equazioni lineari la cui soluzione consente di ottenere valori approssimati dell'incognita nei nodi. Come si vedrà, con il metodo agli elementi finiti tale sistema è ottenuto utilizzando formulazioni di tipo integrale del principio di conservazione espresso tramite l'equazione differenziale che si vuole risolvere ed approssimando a tratti la variabile incognita in modo tale che l'equazione stessa risulti soddisfatta mediamente in opportuni sottodomini detti elementi. L'applicazione del metodo comprende i seguenti steps:

- il dominio è discretizzato, cioè suddiviso in elementi che non devono sovrapporsi né lasciare buchi; il numero e la collocazione dei nodi negli elementi determina poi la tipologia degli elementi stessi;
- in base al tipo di elemento vengono scelte opportune funzioni di forma (o di interpolazione) per l'approssimazione della variabile incognita all'interno e lungo i contorni degli elementi, cioè nelle posizioni non nodali;
- per ogni elemento viene formulata un'equazione di tipo matriciale basata su una forma integrale dell'equazione differenziale da risolvere;
- le equazioni di ogni elemento vengono poi “assemblate” per formare un sistema globale di equazioni lineari;

- il sistema globale viene risolto per determinare i valori nodali delle incognite considerate.

Formulare un modello, oppure semplicemente scegliere tra quelli disponibili quello che, con il minimo di complessità, sia in grado di riprodurre in modo soddisfacente l'evoluzione temporale e la distribuzione spaziale delle variabili termofisiche in una determinata distribuzione di flusso termico è un compito tutt'altro che banale. E' necessario, innanzitutto, definire quali siano le proprietà fisiche che caratterizzano il comportamento di materiali e acquisire poi conoscenza fenomenologica degli effetti (l'osservazione visiva ne è una fase fondamentale); ciò comporta l'uso di strumenti e nozioni della fisica e dell'analisi matematica e richiede infine, e soprattutto, cautela e consapevolezza nell'adozione delle *ipotesi* e delle *approssimazioni* che è indispensabile adottare.

L'avvento e la diffusione dei calcolatori nel mondo scientifico e tecnologico hanno contribuito, come già evidenziato in precedenza, allo sviluppo e alla crescente consapevolezza del concetto di “*approssimazione*”: concetto che investe, ad esempio, la teoria dell'approssimazione numerica della soluzione di un sistema di equazioni, ovvero di un modello matematico, con il quale si intende descrivere il comportamento di un determinato sistema fisico. In questo ambito, in mancanza di una soluzione analitica, o esatta, del modello matematico, si accetta di conoscerne una soluzione approssimata che possieda il livello di accuratezza ritenuto sufficiente.

Ma il concetto di approssimazione interviene pesantemente anche nel processo che porta alla formulazione del *modello fisico* (dal quale discende, poi, quello matematico), che quasi mai può riprodurre per intero la complessità del mondo fisico reale. Infatti il problema che si incontra, ancor prima di pensare ad un modello fisico, consiste nel definire quale sia il *livello di scala della realtà*.

Il mondo fisico reale può essere infatti descritto a vari livelli, a partire da quello subatomico e passando successivamente a quelli atomico, molecolare, microscopico, macroscopico (quello alla scala dimensionale della meccanica classica) e infine astrofisico (planetario o galattico). Ma non sempre un modello, per risultare efficace, deve necessariamente contemplare la totalità dei livelli di scala della realtà (quello della meccanica classica ne è appunto un chiaro esempio). In pratica, il problema si traduce quindi nel definire quale sia il *minimo* livello di scala della realtà che debba essere preso in considerazione affinché un modello possa rappresentare la realtà *al livello di scala desiderato*.

Tuttavia, per definire le proprietà fisiche microscopiche (o statistiche) delle sostanze fluide gassose, che intervengono nel modello di continuo deformabile, pur non considerando necessariamente le scale subatomiche, è necessario però dedurle a partire dalla scala atomica o molecolare. E ciò è dovuto semplicemente al fatto che tali proprietà fisiche microscopiche dipendono proprio dalla struttura atomica e molecolare: dipendono infatti, sia dal tipo, sia dal moto degli atomi, che è governato essenzialmente dalle equazioni di Boltzmann.

Solo basandosi sulle scale molecolari è quindi possibile definire, ad esempio, la temperatura di un gas come misura dell'energia cinetica media delle molecole, la pressione come risultato degli urti delle molecole sulle pareti di un recipiente, la viscosità attraverso la diffusione della quantità di moto prodotta dall'agitazione termica, e così via (in modo analogo si possono ovviamente definire le proprietà fisiche statistiche delle sostanze fluide liquide). A livello di scala molecolare, le variabili fondamentali del problema (e del modello fisico) sono quindi le masse e le velocità delle singole molecole mentre, a partire dal livello microscopico, le variabili del problema (e del modello fisico) diventano, ad esempio, la temperatura, la densità, la pressione e la viscosità, definibili attraverso medie delle variabili del modello al livello della scala dimensionale inferiore.

In generale, possiamo affermare che ogni livello di scala della realtà è compiutamente rappresentabile in funzione di un determinato insieme di variabili fondamentali e che misure delle *proprietà medie* di tali variabili consentono di definire le variabili fondamentali al livello di scala superiore, immediatamente successivo.

Si rinvia ai testi specializzati l'approfondimento di questi metodi di calcolo e si vuole qui presentare qualche esempio.

Distribuzione di temperatura in un isolatore contenente due tubi di acqua calda

La geometria è ancora semplice anche se non risolvibile con procedure analitiche tradizionali. Si tratta, nel piano, di una circonferenza esterna (isolante) contenente due circonferenze affiancate interne (tubi). L'equazione differenziale da risolvere è:

$$\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad}(T)) = 0$$

Le condizioni iniziali sono: $T = 273$ K per la zona esterna (isolante), 323 K per la tubazione a sinistra e 353 K per la tubazione a destra. La griglia di calcolo è la seguente:

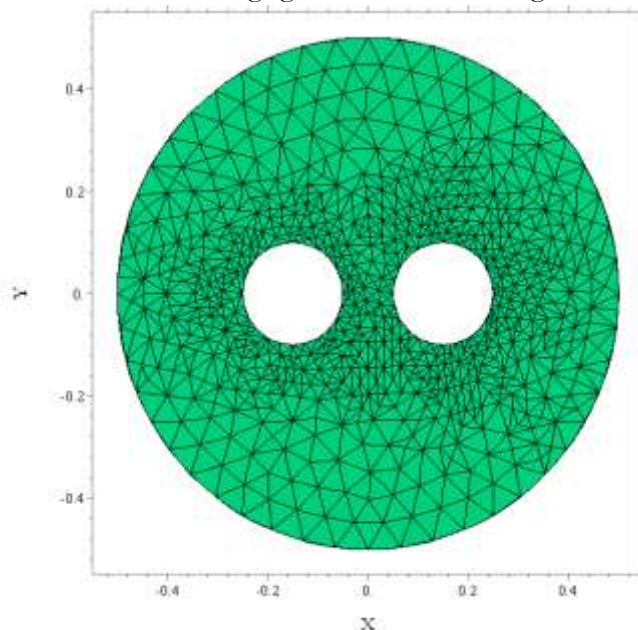


Figura 26: Formazione della griglia di calcolo per l'esempio considerato

La distribuzione della temperatura è data nella seguente figura

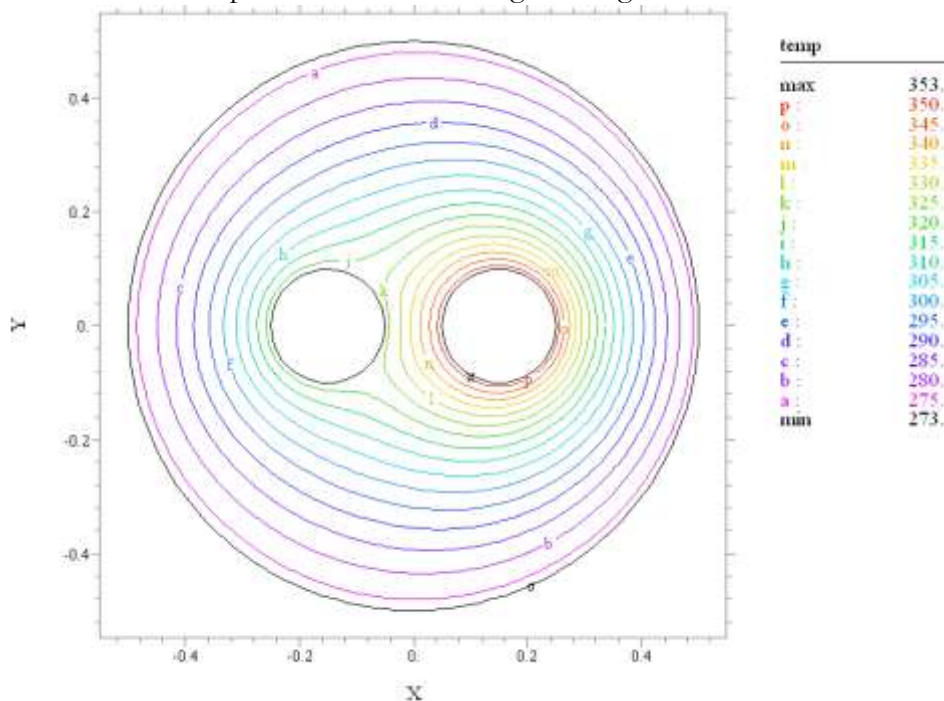


Figura 27: Curve isoterme per l'esempio analizzato

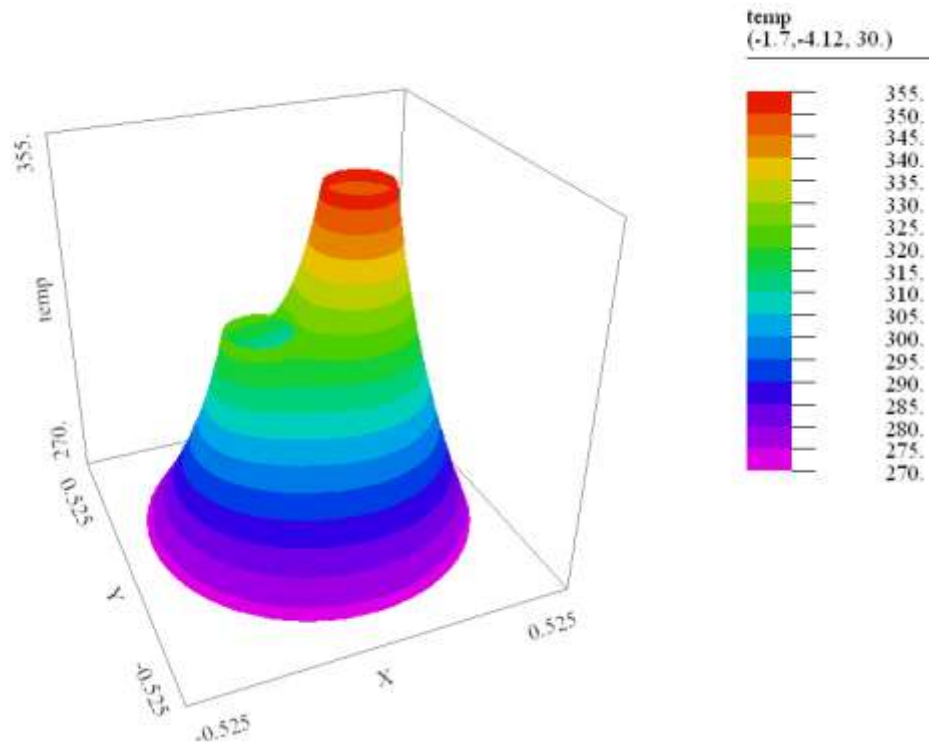


Figura 28: Distribuzione spaziale della temperatura

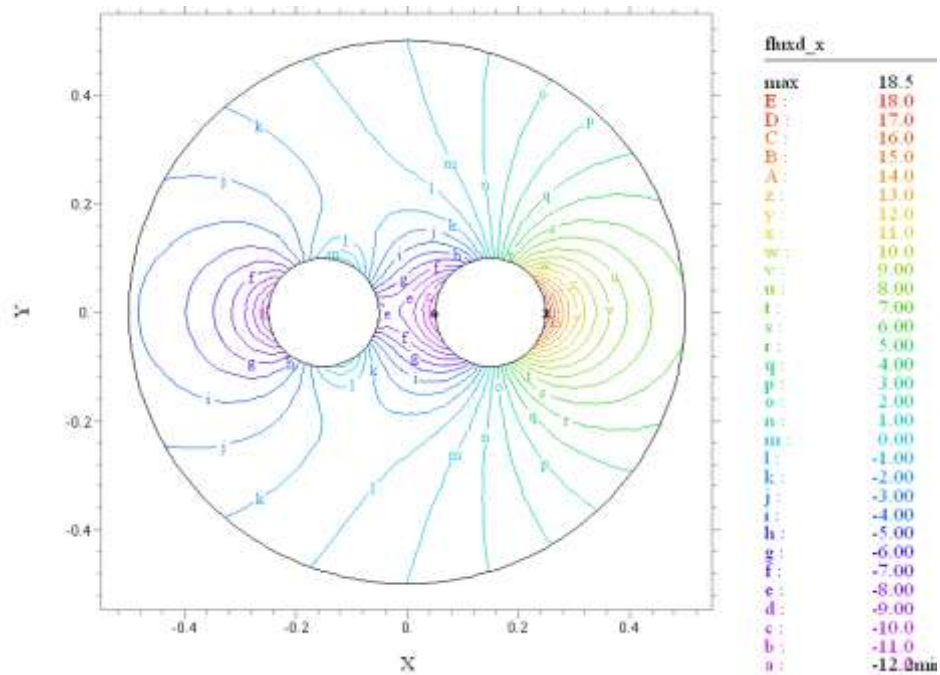


Figura 29: Distribuzione del flusso

Numerosi altri esempi potrebbero essere qui presentati. Va considerato che i problemi di sola conduzione sono relativamente semplici nel panorama dei codici di simulazione commerciali. Questi sono orientati alla soluzione di problemi di CFD (*Computer Fluid Dynamics*) molto più complessi di quelli esposti in questo paragrafo.

Si parlerà di questi codici di calcolo più avanti.

4 ALETTE

Uno dei dispositivi più utilizzati nello smaltimento del calore in dispositivi meccanici e/o elettronici sono le alette costituite da lamine di materiale buon conduttore poste sopra la superficie di un corpo che si vuole raffreddare in aria o in un fluido gassoso.

E' importante osservare subito che, come si dimostrerà più avanti, le alette risultano convenienti solo quanto lo scambio di calore all'esterno della superficie da raffreddare è attuato in aria o in un fluido aeriforme generico. Questo, infatti, per le sue caratteristiche termofisiche determina modalità di scambio per convezione peggiori di quelle che si avrebbero con un fluido liquido e pertanto le alette consentono di migliorare lo scambio globale.

Per studiare il comportamento delle alette occorre idealizzare il problema come raffigurato in Figura 30. Sia questa idealizzata come una sbarra di *sezione rettangolare* attaccata ad una parete a temperatura T_0 .

L'aletta sia *sottile* e la *conducibilità termica del materiale elevata* in modo che si possa ritenere a *resistenza termica trascurabile* e quindi descrivibile con un solo valore di temperatura per ogni sezione x .

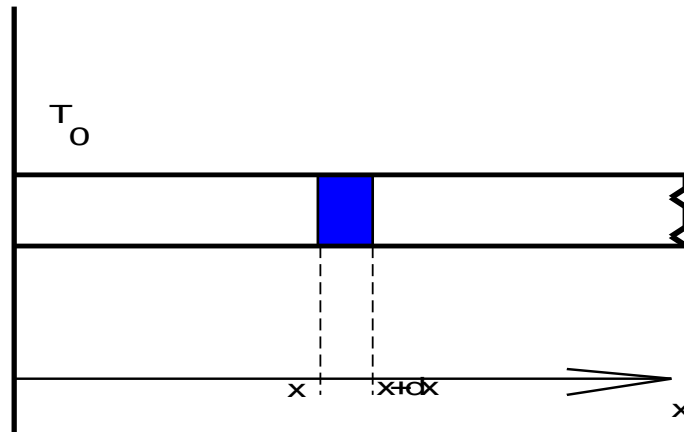


Figura 30: Schematizzazione di una aletta

Per la generica sezione ad ascissa x ed $x + dx$, detta S la superficie e P il perimetro, si può scrivere che il flusso termico di conduzione alle ascisse x ed $x + dx$ valgono::

$$q_x = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_x \quad [88]$$

$$q_{x+dx} = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+dx}$$

Sviluppando in serie di *Taylor* il secondo membro della precedente si ottiene:

$$q_{x+dx} = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_x - \lambda S \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_x dx$$

Pertanto il bilancio termico (*a regime stazionario*) della striscia elementare di ampiezza dx ad ascissa x è il seguente:

$$\lambda S \frac{d^2T}{dx^2} dx = hP(T - T_f) dx$$

Semplificando e ponendo $\theta = T - T_f$ ed ancora :

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}}$$

si può scrivere:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

Nell'ipotesi di proprietà termofisiche e geometriche costanti la precedente si può ritenere una equazione differenziale del secondo ordine, omogenea a coefficienti costanti il cui integrale generale è:

$$\theta = Ae^{-mx} + Be^{mx} \quad [89]$$

con A e B costanti di integrazione da calcolare con le ipotesi di condizione al contorno da definire ancora. Possiamo ipotizzare tre casi.

4.1 BARRA INFINITAMENTE LUNGA

In questa ipotesi la temperatura nella sezione terminale della barra si porta in equilibrio con quella del fluido e pertanto risulta:

$$\theta_0 = T_0 - t_f \quad \text{per } x=0$$

e ancora

$$\theta = 0 \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

Pertanto la [89] diviene:

$$\theta = \theta_0 e^{-mx}$$

Quindi la differenza di temperatura iniziale diminuisce esponenzialmente. Il flusso termico che la sbarra smaltisce nel fluido è allora pari, a regime stazionario, al flusso che esce dalla parete all'ascissa $x=0$ e cioè:

$$q_l = -\lambda S \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda S m \theta_0 = \sqrt{hP\lambda S} \theta_0$$

Senza la presenza dell'aletta la stessa parete avrebbe disperso, attraverso la superficie S il flusso:

$$q_s = hS\theta_0$$

La convenienza dell'aletta si ha quando si verifica:

$$q_l > q_s$$

ovvero anche:

$$\lambda S m \theta_0 > hS\theta_0$$

ossia quando $m > h/\lambda$. Ricordando l'espressione di m deve anche essere $\lambda P > hS$. Pertanto la convenienza dell'utilizzo dell'aletta si ha quando il materiale è un buon conduttore (grande λ) ovvero il coefficiente di convezione h è piccolo. In pratica si può anche scrivere:

$$\lambda > h \frac{S}{P}$$

per cui essendo il rapporto S/P omogeneo ad uno spessore fittizio l_0 si può ancora scrivere:

$$\frac{l_0}{\lambda} < \frac{1}{h}$$

Quindi la *resistenza di conduzione* l_0/λ deve essere inferiore alla *resistenza di convezione* $1/h$.

4.2 SBARRA CON TERMINAZIONE FINALE ADIABATICA

In questo caso le condizioni al contorno sono:

$$\theta_0 = T_0 - t_f \quad \text{per } x=0$$

e ancora:

$$-\lambda \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad \text{per } x = L$$

La soluzione dell'equazione generale fornisce le costanti:

$$A = \theta_0 \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$B = \theta_0 \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

e quindi la soluzione diviene:

$$\theta = \theta_0 \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$$

Il flusso termico uscente dalla parete all'attacco della sbarra vale:

$$q_l = -\lambda S \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda m S \theta_0 \tanh(mL)$$

La convenienza dell'aletta si ha quando questo flusso risulta superiore a quello senza aletta.

4.3 SBARRA DI LUNGHEZZA FINITA (CASO GENERALE)

Le condizioni al contorno divengono:

$$\theta_0 = T_0 - t_f \quad \text{per } x=0$$

e ancora:

$$-\lambda \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = hS\theta \quad \text{per } x = L$$

Le costanti di integrazioni divengono:

$$A = \frac{\theta_0}{2} \frac{e^{mL} + \frac{h}{\lambda m} e^{mL}}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)}$$

$$B = \frac{\theta_0}{2} \frac{e^{-mL} - \frac{h}{\lambda m} e^{-mL}}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)}$$

Pertanto la soluzione generale (detta di *Ten Bosch*) diviene:

$$\theta = \theta_0 \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{h}{\lambda m} \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{h}{\lambda m} \sinh(mL)}$$

Il flusso termico all'attacco dell'aletta vale:

$$q_l = -\lambda S \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = \lambda m S \theta_0 \frac{\frac{h}{\lambda m} + \tanh(mL)}{1 + \frac{h}{\lambda m} \tanh(mL)}$$

con il solito confronto si può stabilire la convenienza dell'aletta.

4.4 EFFICIENZA DELLE ALETTE

Si definisce efficienza delle alette il rapporto fra il flusso effettivamente scambiato e quindi uscente dalla parete con l'aletta e quello che si avrebbe nelle condizioni *ideali* con temperatura di aletta pari a quella della base di attacco, cioè:

$$\varepsilon = \frac{q_{reale}}{q_{ideale}}$$

Nel caso di aletta con flusso trascurabile all'estremità (*caso 2, generalmente realizzato con buona approssimazione nelle condizioni reali*) si ha:

$$\varepsilon = \frac{\lambda S \theta_0 m \tanh(mL)}{h P L \theta_0} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

In Figura 31 si ha l'andamento dell'efficienza per alette rettangolari. Per le alette sottili si ha:

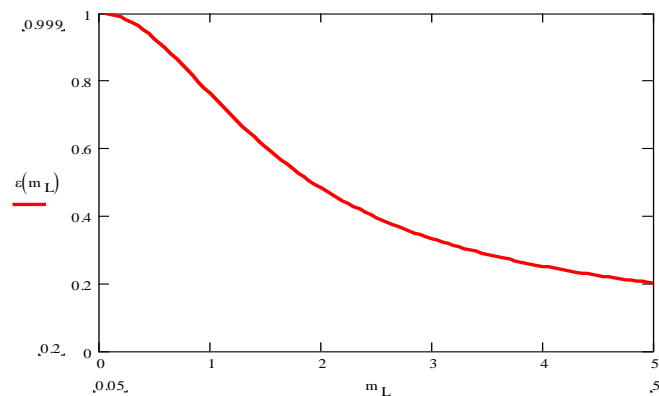


Figura 31: Efficienza di una aletta rettangolare

$$mL = \sqrt{\frac{h}{\lambda \delta}} \cdot L$$

e quindi l'efficienza è tanto maggiore quanto minore è la lunghezza L e quanto maggiore è il suo spessore 2δ e quanto maggiore è la conducibilità λ del materiale e quanto minore è il coefficiente di convezione termica h . Nota l'efficienza dell'aletta si calcola facilmente il flusso reale mediante la relazione:

$$q_{reale} = \varepsilon \cdot q_{ideale} = \varepsilon h S \theta_0$$

Se si prende in considerazione la soluzione di *Ten Bosch* si ha:

$$\varepsilon = \frac{\tanh(mL) + \frac{h}{\lambda m}}{mL + \frac{hL}{\lambda} \tanh(mL)}$$

il cui andamento è riportato in Figura 32.

4.5 PARETE ALETTATA

Nel caso che una parete di superficie A con n alette sia immersa nell'ambiente, detta ε l'efficienza delle alette, il flusso totale disperso vale:

$$q = h_s \left[(A_t - nS_a) + \varepsilon nS_L \right] (T_0 - T_f)$$

avendo indicato con A_t l'area totale della superficie, S_a la superficie di attacco di una singola aletta, S_L la superficie di scambio di una aletta, T_0 la temperatura della superficie e T_f quella dell'ambiente.

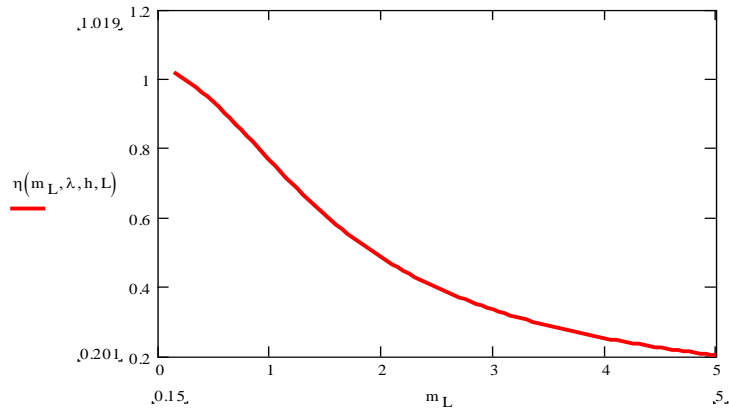


Figura 32: Efficienza di una aletta rettangolare con soluzione esatta

Per la validità di questa relazione occorre assicurarsi che la distanza fra le alette sia superiore (di almeno il doppio) a quello dello strato limite che, per valori correnti in aria, è di $2 \div 3$ mm.

4.6 ALETTE ANULARI

Si consideri una superficie circolare come indicato in Figura 33 e si faccia l'ipotesi di piccolo spessore, H , rispetto alla lunghezza netta dell'aletta $L = r_2 - r_1$.

Nell'ipotesi di *resistenza termica delle alette trascurabile* si può immaginare che il campo termico sia monodimensionale e che pertanto la distribuzione della temperatura sia funzione solo del raggio r , cioè sia $T = T(r)$.

La sezione trasversale dell'aletta è $A_s = 2\pi rH$ e la superficie relativa al tratto di lunghezza dr vale $dA_s = 2\pi r dr$.

Il flusso trasmesso ad ascissa r vale:

$$q_r = -\lambda A_r \left. \frac{dT}{dr} \right|_r = -\lambda 2\pi r H \left. \frac{dT}{dr} \right|_r$$

e che quello ad ascissa $r + dr$ vale:

$$q_{r+dr} = -\lambda A_{r+dr} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r+dr} = -\lambda 2\pi (r + dr) H \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r+dr}$$

ove, sviluppando in serie di Taylor si ha:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r+dr} = \left. \frac{dT}{dr} \right|_r + \left. \frac{d^2T}{dr^2} \right|_r dr$$

e che il flusso disperso per convezione termica dalla aletta vale:

$$dq_a = h(T - T_f) dA_s$$

Pertanto il bilancio termico di una striscia dr ad ascissa r è dato da:

$$q_r = q_a + q_{r+dr}$$

e quindi, sostituendo le espressioni precedenti e riarrangiando i termini si ha:

$$\frac{d^2(T-T_f)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(T-T_f)}{dr} - 2 \frac{h}{\lambda H} (T-T_f) = 0$$

Abbiamo, quindi, una equazione differenziale di *Bessel* di *ordine zero* la cui soluzione generale è:

$$T - T_f = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

ove si posto, al solito:

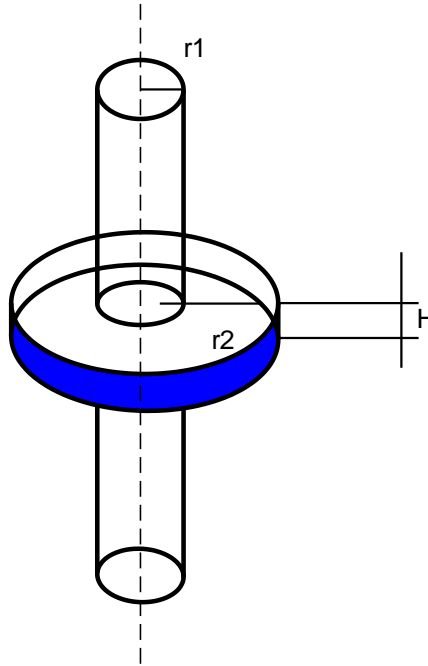


Figura 33: Rappresentazione di una aletta circolare di spessore costante

$$m = \sqrt{\frac{2h}{\lambda H}}$$

e si sono indicate con:

- K_0 la funzione di *Bessel* modificata di prima specie;
- I_0 la funzione di *Bessel* modificata di seconda specie.

Le costanti di integrazione vanno determinate con le condizioni al contorno:

$$T(r_1) = T_0$$

alla base di attacco e ancora per $r=r_2$:

$$q_{r=r_2} = -\lambda A_r \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} = 0$$

cioè supponiamo che all'estremità delle alette il flusso sia trascurabile (*come già visto per le alette rettangolari*).

L'andamento della soluzione è rappresentata in Figura 34.

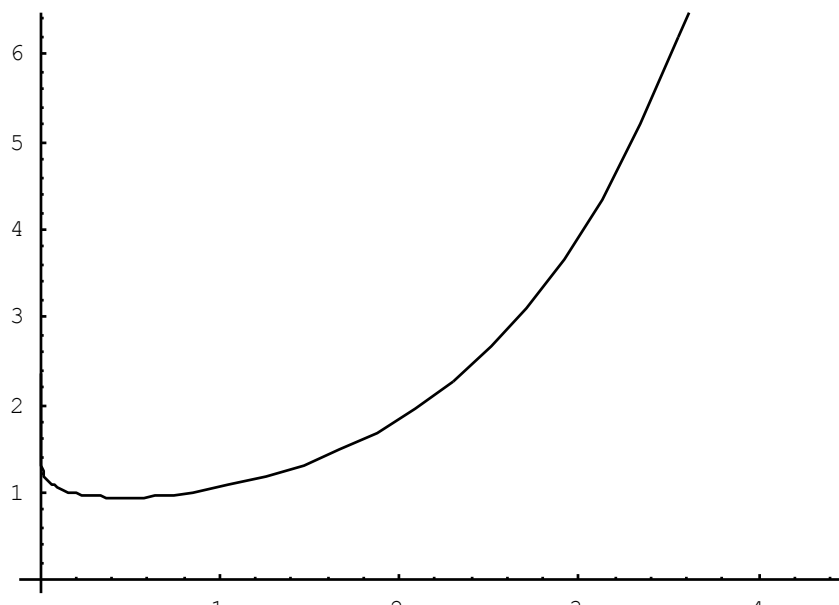


Figura 34: Distribuzione della temperatura nelle alette cilindriche

L'efficienza di un'ala anulare è data in Figura 35 al variare del rapporto dei raggi.

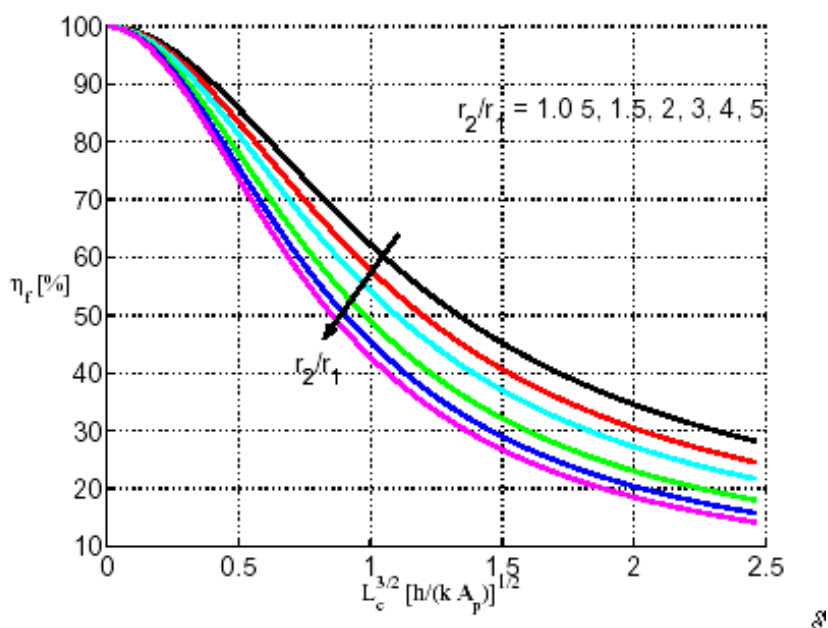


Figura 35: Efficienza alette anulari

4.7 PROFILO OTTIMIZZATO DELLE ALETTE

In precedenza si è visto il caso semplice di profilo rettangolare delle alette.

In effetti al crescere della distanza dalla parete il profilo rettangolare non consente le migliori condizioni di scambio poiché presenta la stessa resistenza termica di conduzione pur con profilo di temperatura che decresce esponenzialmente dalla parete di attacco.

Uno studio più approfondito consente di dimostrare che la sezione migliore è quella con profilo *iperbolico*, cioè con andamento rastremante verso la fine delle alette, come illustrato dal secondo profilo in Figura 36.

Questa sezione consente anche di ridurre al minimo il materiale presente nelle alette.

Nelle applicazioni pratiche si preferisce costruire le alette con profilo *triangolare* per le minori difficoltà costruttive che queste presentano e per la poca differenza rispetto a quella iperbolica.

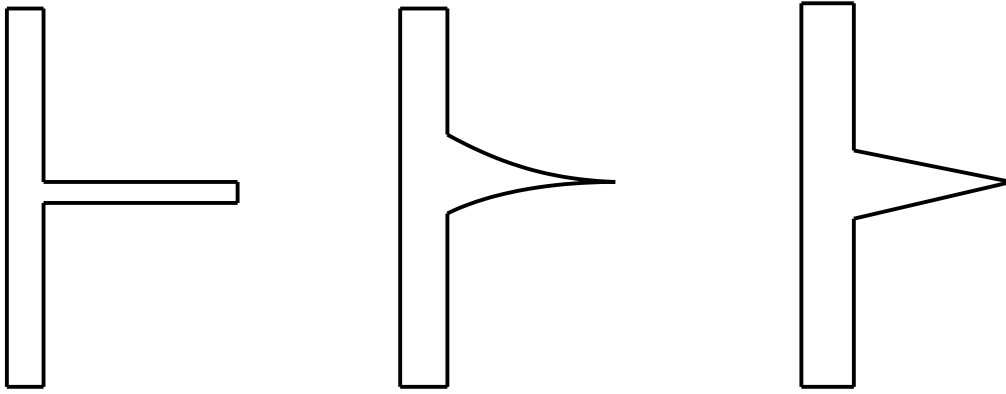


Figura 36: Profilo rettangolare, iperbolico e triangolare

4.8 APPLICAZIONI NUMERICHE AL PROBLEMA DELLE ALETTE

Con i codici di simulazione già visti in precedenza è possibile risolvere i problemi relativi alle alette. Ad esempio per una sezione di tubo con flangia raffreddata esternamente, con equazioni già indicate nei precedenti paragrafi, da aria porta alle seguenti soluzioni.

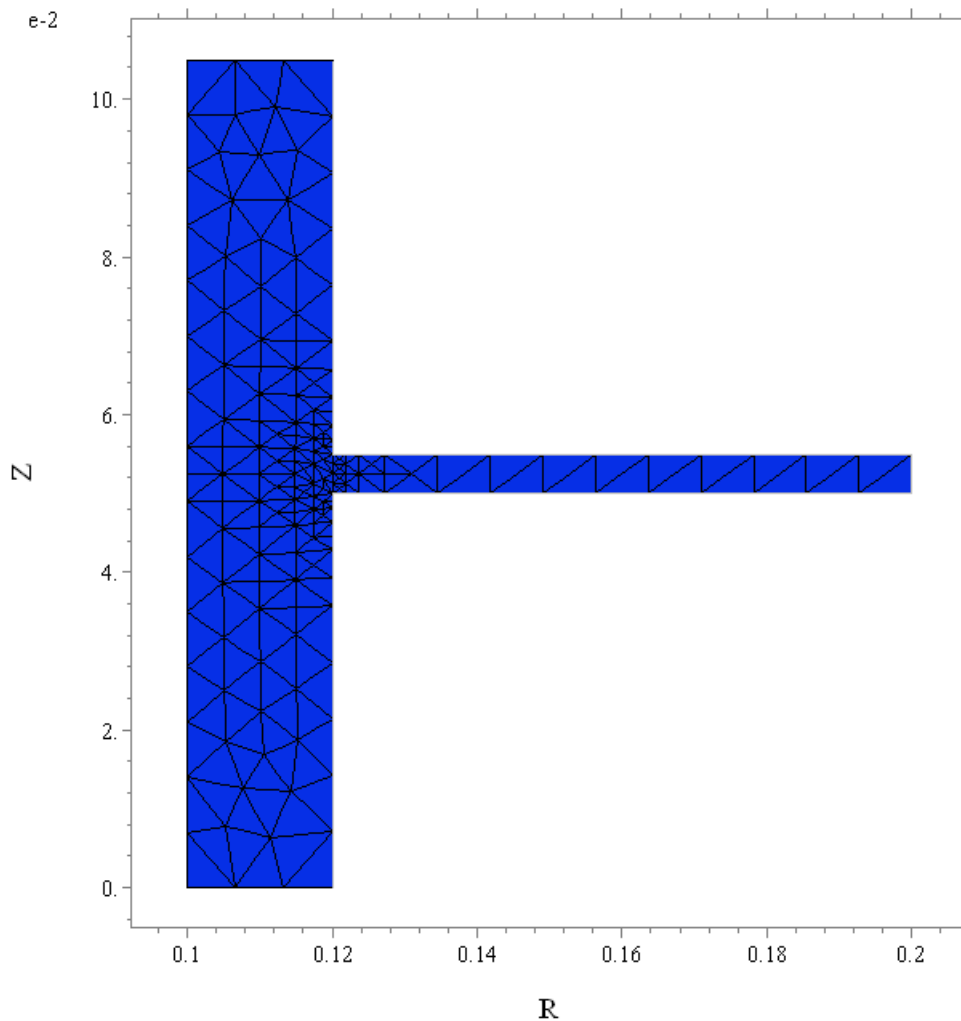


Figura 37: Griglia di calcolo

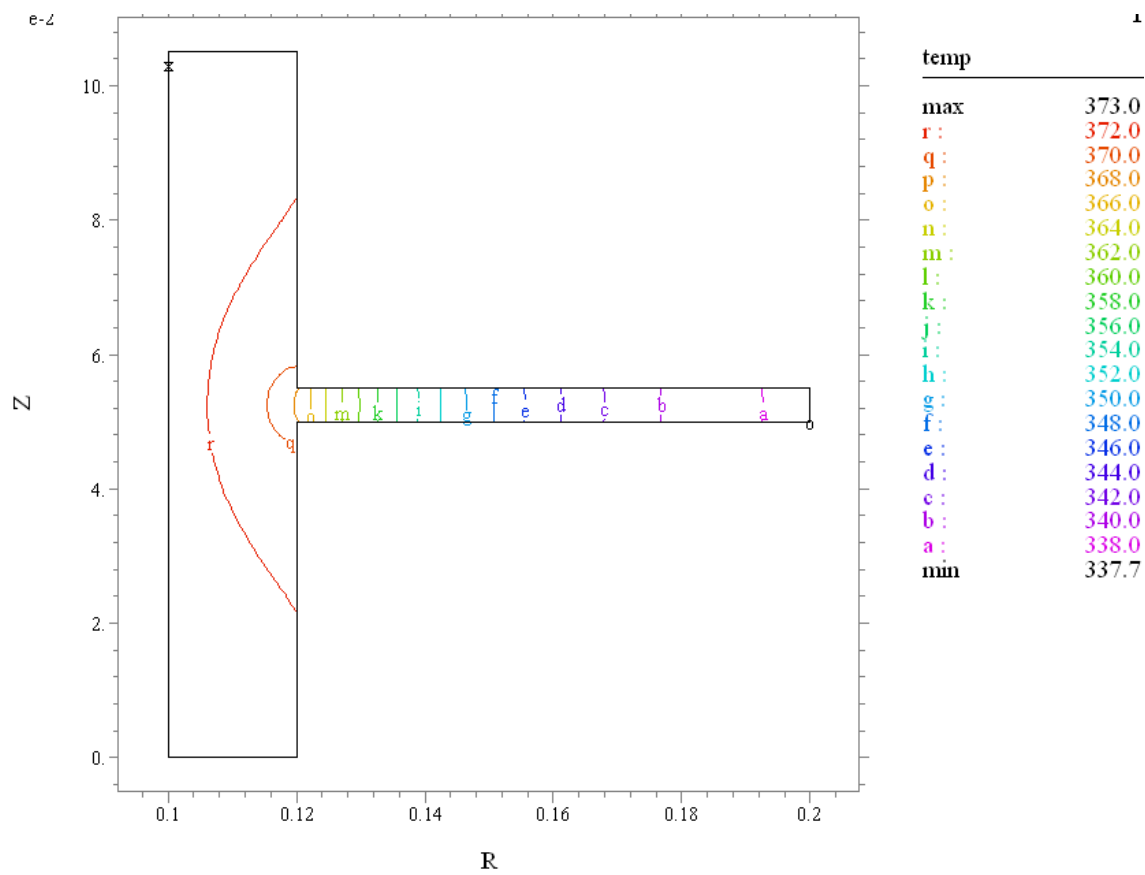


Figura 38: Distribuzione della temperatura in una flangia

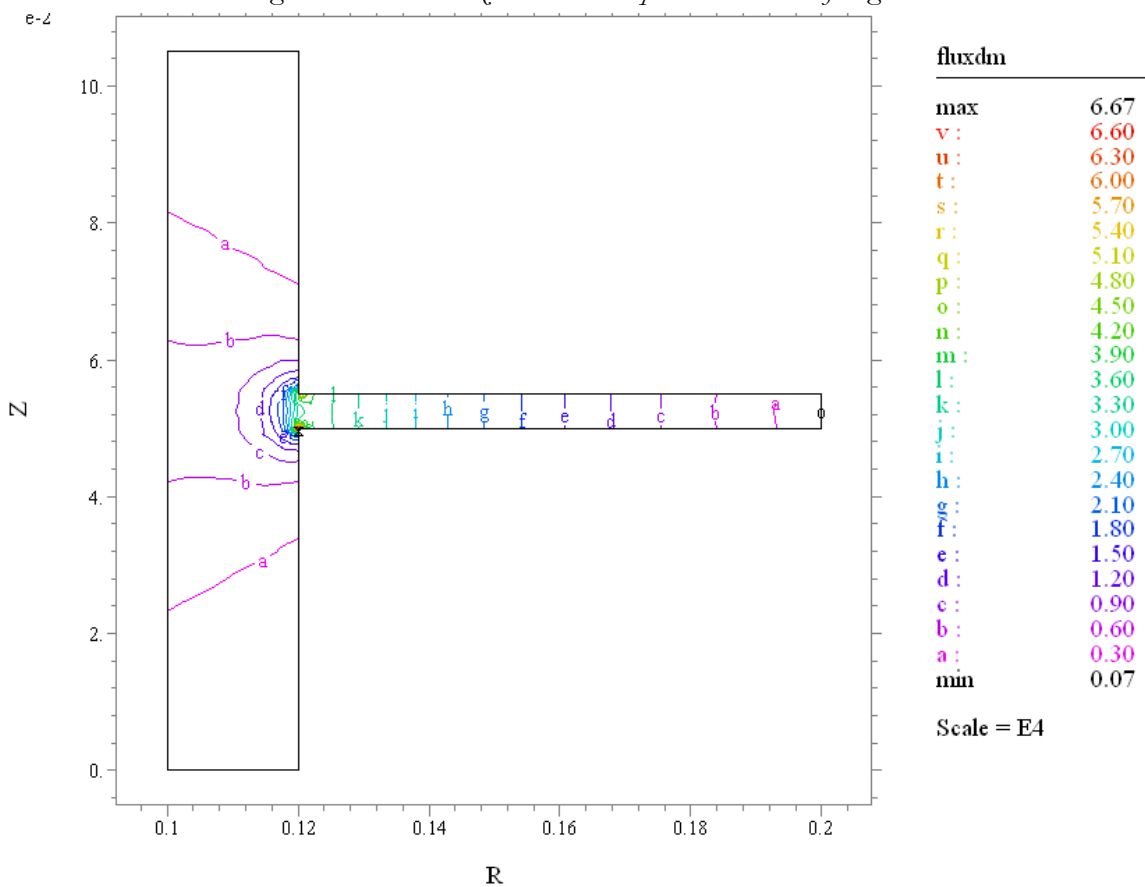


Figura 39. Distribuzione del flusso per un tubo flangiato

5 LA CONVEZIONE TERMICA

Uno dei problemi tecnico-scientifici in assoluto più complesso da studiare è la **convezione termica**. Con questo termine si suole definire *un insieme di fenomeni di trasporto di massa ed energia per mezzo di un fluido riscaldato (o raffreddato)*.

La *convezione termica* è stata originariamente studiata da *Newton* che ne ha proposto una formulazione funzionale ancora oggi utilizzata nella pratica. *Newton* non aveva i mezzi di osservazione che oggi noi possediamo e pertanto non poteva rendersi conto della complessità del problema della convezione termica.

In particolare Egli non si accorse dello strato limite (vedi Figura 40) meccanico e termico che si formava fra fluido non disturbato e parete.

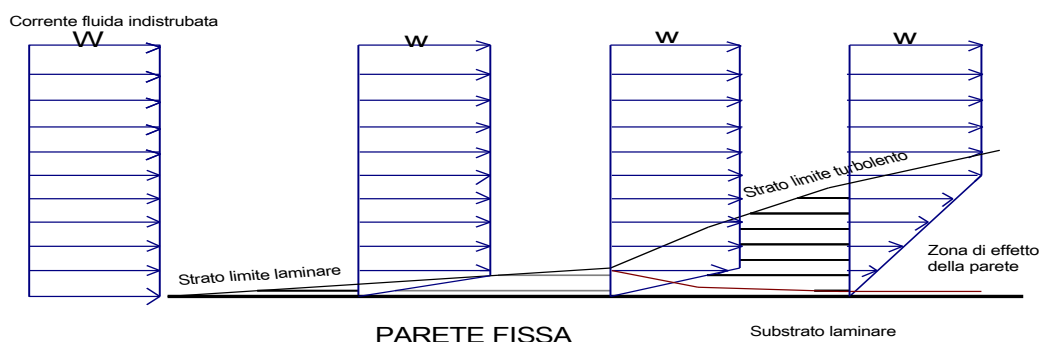


Figura 40: Formazione dello strato limite dinamico sopra una lastra piana

La *convezione termica* nasce dall'azione congiunta di trasporto di materia e di energia. Il termine *convezione* deriva dal latino *conveho* che significa *trasporto*. Senza materia in movimento non si può avere convezione termica ma solo conduzione. La *convezione termica* può essere di due tipi:

Convezione termica naturale:

Il movimento di materia si origina per effetto del solo campo di temperatura esistente fra zone diverse di un sistema termico. Se consideriamo una piastra piana verticale di materiale conduttore qualunque (*ferro, rame, alluminio,...*) portata ad una temperatura T_p . Si supponga che questa piastra sia immersa in un fluido (*aria, acqua,...*) avente una temperatura $T_f < T_p$ (vedi Figura 41).

Per effetto della temperatura T_p dell'energia termica passa per conduzione dalla piastra al fluido che si scalda rispetto alla temperatura iniziale T_f e pertanto si dilata. Ciò porta ad avere una diminuzione di densità del fluido caldo rispetto a quello freddo e quindi si genera, per effetto della forza di gravità che agisce sempre verso il basso, un *alleggerimento termico* che fa spostare il fluido caldo verso l'alto e quello freddo verso il basso e quindi un moto rotatorio orario che è il flusso convettivo propriamente detto.

Il moto rotatorio orario è generato dalla **forza di gravità** che sposta più in basso il fluido freddo rispetto a quello caldo. Questo spostandosi porta con sé la maggiore energia interna dovuta alla maggiore temperatura e pertanto si ha il trasferimento di calore dalla piastra al fluido freddo come effetto finale della trasmissione di calore. E' bene ricordare che nella *convezione naturale* il movimento del fluido avviene per il solo effetto della forza di gravità sugli strati di fluido a diversa densità;

Convezione forzata

Il movimento del fluido avviene non solo (o anche *non più*) per effetto dell'*alleggerimento termico* sopra descritto ma per l'azione meccanica di una macchina sul fluido (*ad esempio una pompa o una ventola*). Pertanto il fluido non si sposta più in relazione alla distribuzione di temperatura e all'azione della forza di gravità bensì per azione meccanica esterna. Ne consegue che il movimento del fluido può essere pilotato come si desidera nelle zone ove si vuole avere lo scambio termico.

Se si riprende l'esempio del radiatore termico domestico dianzi proposto si vede facilmente che senza azioni esterne si ha il movimento dell'aria riscaldata dalla piastra secondo traiettorie che dipendono solo dalla geometria del sistema e dalle differenze di temperatura.

Se, invece, si utilizza una ventola a monte della piastra ecco che l'aria riscaldata può essere inviata dove si vuole e in quantità desiderata. Si ha, così, la *convezione forzata*. In entrambi i casi (*naturale o forzata*) la convezione si presenta come una somma di fenomeni complessi associati sia al campo di velocità (*spostamento delle masse di fluido*) che al campo di temperatura (*direttamente e indirettamente legato al campo di velocità*).

Si tratta sempre di fenomeni molto complessi che rappresentano una delle problematiche più ardue di tutta la Scienza e la Tecnica. Queste problematiche non sono limitate solamente agli scambi termici, come questo capitolo può far pensare, ma a numerosissimi campi della tecnica, della biologia, della meteorologia, armamenti militari,

Praticamente ogni campo scientifico è interessato dai problemi convettivi e la loro risoluzione ha sempre avuto caratteri strategici prevalenti su tutti gli altri. Data la limitatezza di questo corso di *Trasmissione del Calore* si cercherà di semplificare al massimo la soluzione di queste problematiche con metodologie di studio semplificate.

Nella realtà lo studio della *Convezione Termica* è sempre stato un argomento arduo, difficile, ostico e che solo in parte trova soluzione oggi con l'utilizzo di codici di calcolo costosi e complessi che richiedono le maggiori risorse in assoluto rispetto a qualsivoglia applicazione software.

Convezione termica confinata

Se il fluido si trova all'interno di un volume delimitato da pareti fisiche, ad esempio in un condotto, allora la convezione termica si dice *confinata*.

Lo spessore dello strato limite termico, come pure quello dinamico, è al massimo pari alla distanza fra le pareti a diversa temperatura.

In questo caso le condizioni di conservazione della massa impone che ci sia una circolazione interna (*vedi anche quanto si dirà sulle cavità termiche*) fra le stesse pareti.

Convezione termica aperta

In questo caso si ha una parete e la convezione termica avviene in uno spessore di strato limite termico indefinito e sempre crescente.

Si può avere anche convezione termica in assenza della stessa parete ma in presenza di fluidi a diversa temperatura (*ad esempio una corrente di aria calda che incontra una corrente di aria fredda o anche un getto di vapore che trascina aria fredda in moto convettivo, come avviene nei getti e nei pennacchi dei quali si dirà nel prosieguo*).

La convezione aperta interessa molto la climatologia e le applicazioni impiantistiche ambientali.

5.1 EQUAZIONE DELLA CONVEZIONE TERMICA

Newton ebbe il grande merito di semplificare la grande complessità del problema (*non sappiamo se coscientemente o non*) scrivendo per la *convezione termica* la seguente legge di definizione:

$$\Delta Q^* = hS(T_p - T_f)\Delta\tau \quad [90]$$

ove si ha il seguente simbolismo:

- ΔQ^* quantità di energia trasmessa per convezione termica. Unità di misura $[J]$ o $[kcal]$;
- h è il *coefficiente di convezione*. Unità di misura $[W/(m^2\text{°C})]$ o $[kcal/(hm^2\text{°C})]$;
- S superficie di scambio termico. Unità di misura in $[m^2]$;
- $T_p - T_f$ differenza di temperatura fra piastra e fluido (o viceversa se $T_f > T_p$). $[K]$ o $[°C]$;
- $\Delta\tau$ tempo intercorso, unità di misura $[s]$ o $[h]$.

Si è usato il termine di *definizione* perché questa legge in realtà *definisce univocamente il coefficiente di convezione* nella forma:

$$h = \frac{\Delta Q^*}{S(T_p - T_f)\Delta\tau}$$

In pratica, come meglio si vedrà più avanti, non conosciamo h se non mediante il rapporto indicato a secondo membro. E questo perché le modalità di scambio termico non sono univoche, nel senso che una stessa parete con le stesse distribuzioni di temperatura superficiale e con lo stesso fluido può dar luogo a scambi di calore diversi a seconda della geometria e topologia assunta.

Ecco perché la legge di *Newton* è importante: essa ha semplificato la definizione analitica di un fenomeno complesso con una semplice introduzione di un *coefficiente di convezione* noto il quale si può conoscere il flusso termico effettivamente scambiato. Possiamo definire questo anche un *coefficiente di ignoranza*, anche alla luce di quanto si dimostrerà nel prosieguo.

Il coefficiente h non è una proprietà termofisica ma dipende da un grande numero di fattori fra i quali si ricordano:

- le proprietà fisiche del fluido: densità ρ , viscosità dinamica μ (*vedi più avanti*), calore specifico a pressione costante c_p , coefficiente di conducibilità termica λ ;
- la differenza di temperatura fra i corpi;
- la velocità del fluido w se in convezione forzata o il *coefficiente di dilatazione*¹⁵ cubica β del fluido se si è in convezione naturale;
- la geometria della scambio termico che può essere rappresentata da un parametro geometrico (ad esempio il diametro di un condotto, la distanza fra due piastre,...).

Per rendersi conto che h varia con la configurazione geometrica, come sopra accennato, a parità di tutto il resto, si consideri l'esempio dato in Figura 41.

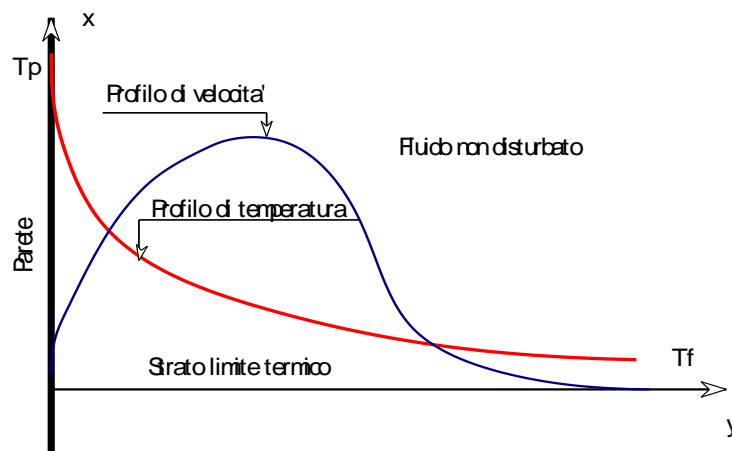


Figura 41: Schematizzazione della convezione termica fra parete e fluido

Se la piastra si suppone calda e il fluido, per esempio aria, freddo si ha convezione (*cioè si ha movimento di fluido per via naturale*) se la piastra è orizzontale in basso o verticale o con un angolo di inclinazione qualunque.

Non si ha convezione termica se la stessa piastra, a pari temperature e condizioni del fluido, si pone orizzontale ma in alto rispetto al fluido (*ad esempio un soffitto caldo*) perché il fluido dilatato è già in alto rispetto a quello freddo che si trova in basso.

¹⁵ Si definisce *coefficiente di dilatazione* di un corpo, come si è visto in *Termodinamica Applicata*, il coefficiente

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_p$$

cioè la variazione relativa di volume al variare della temperatura e pressione costante. Questo coefficiente è

proprietà termofisica dei corpi e lo si può trovare nei manuali tecnici specializzati. Per un gas ideale esso vale $1/T$ (con T temperatura assoluta) e quindi per i gas si può ritenere β circa pari al suddetto valore.

Quindi *non è possibile conoscere il coefficiente di convezione dati i soli parametri termofisici del fluido e le temperature di scambio*: occorre specificare anche *la geometria di scambio* e ciò rende di fatto lo studio della convezione termica molto complesso.

Se si fa riferimento al flusso termico ($\Delta Q^*/\Delta \tau$) (*omogeneo ad una potenza* $[J/s]=[W]$), la [90] si può ancora scrivere:

$$\Delta Q = h S \Delta T$$

ove ΔT è la differenza di temperatura (*maggiore meno minore*) fra corpo e fluido.

La suddetta relazione, pur nella sua grande semplicità, non ci consente di affrontare la convezione termica con la stessa semplicità con la quale abbiamo affrontato la conduzione termica poiché h , come già detto, non è una *proprietà termofisica* reperibile nei manuali per i vari materiali.

Questo coefficiente deve essere determinato, sperimentalmente o analiticamente, per tutte le configurazioni di scambio che si intende utilizzare. Oggi si dispongono di migliaia di relazioni per il calcolo di h e sempre più questo numero cresce con l'aumentare dei casi reali di scambio studiati. Per il flusso termico specifico $q'' = \Delta Q/S$ si ha la relazione:

$$q'' = h \cdot \Delta T \quad [91]$$

5.2 RESISTENZA TERMICA PER CONVEZIONE

Con ragionamento analogo a quanto visto per la conduzione termica, riscrivendo opportunamente la [91], si può definire una *Resistenza termica di Convezione* data dalla seguente relazione:

$$R = \frac{1}{h}$$

con il solito simbolismo visto in precedenza. Mediante la resistenza termica per convezione è possibile risolvere qualsiasi problema di trasmissione del calore fra strati in serie e in parallelo.

5.3 TRASMITTANZA TERMICA

Si consideri la situazione indicata in Figura 42 ove si hanno due fluidi separati da una parete, ad esempio si può considerare un muro esterno che separa l'ambiente interno (*e quindi l'aria all'interno di esso*) dall'ambiente esterno (*cioè dall'aria esterna*). Considerando una situazione a regime stazionario si ha, essendo tutti gli elementi disposti in serie, che il flusso termico è costante sia nel fluido 1, che negli strati di parete e poi nel fluido 2. Applicando quanto è stato detto per la trasmissione del calore in serie si può scrivere la seguente relazione :

$$q'' = \frac{T_1 - T_{p1}}{\frac{1}{h_1}} = \frac{T_{p1} - T_{p2}}{\frac{s_1}{\lambda_1}} = \frac{T_{p2} - T_{p3}}{\frac{s_2}{\lambda_2}} = \frac{T_{p3} - T_2}{\frac{1}{h_2}}$$

Applicando la regola del componendo ai secondi membri si ottiene infine la seguente relazione:

$$q'' = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h_1} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{1}{h_2}} \quad [92]$$

e il termine:

$$K = \frac{1}{\sum \frac{1}{h_i} + \sum \frac{s_j}{\lambda_j}} \quad [93]$$

è detto *trasmittanza termica*.

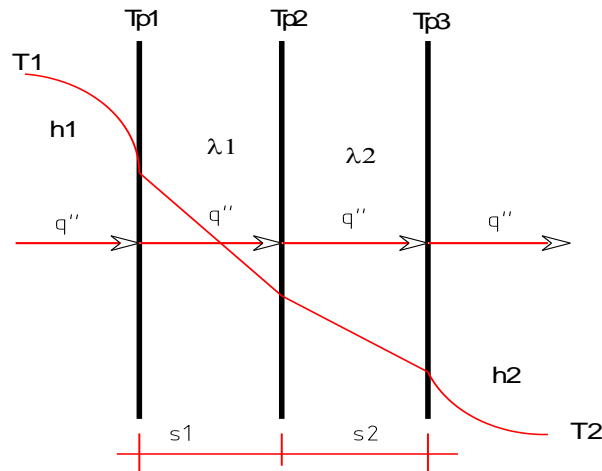


Figura 42: Trasmissione del calore fra due fluidi separati da una parete composta.

A denominatore si hanno le sommatorie delle resistenze termiche per convezione interne alla parete, per conduzione e per convezione esterne alla parete. Dalla [92], tenuto conto della [93], si può scrivere:

$$q'' = K \cdot \Delta T$$

e per il flusso totale attraverso la parete:

$$q'' = \frac{\Delta T}{\sum \frac{1}{h_i} + \sum \frac{s_j}{\lambda_j}}$$

5.4 LE EQUAZIONI FONDAMENTALI PER LA CONVEZIONE

Per affrontare lo studio della convezione termica occorre prima predisporre l'apparato fisico matematico per la piena descrizione fenomenologica. Troviamo, quindi, le *equazioni descrittive* dei fenomeni fisici fondamentali che interessano la convezione termica e per fare ciò applichiamo, pertanto, i principi fondamentali della *Termodinamica* e della *Meccanica dei Fluidi*.

5.4.1 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Il principio di conservazione della massa porta a scrivere, per un sistema aperto:

$$\dot{m}_e - \dot{m}_u = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V dm$$

In forma integrale possiamo scrivere:

$$-\int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \rho dV$$

Ricordando il teorema della divergenza di *Green* si può ancora scrivere:

$$-\int_V \text{div}(\rho \vec{V}) dV = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \rho dV$$

Ovvero anche, in forma differenziale:

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \quad [94]$$

Introducendo l'operatore **derivata sostanziale** dato da:

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

allora la [94] si può scrivere nella forma:

$$\frac{D\rho}{D\tau} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad [95]$$

Questa è detta *equazione di conservazione della massa* in forma differenziale.

5.4.2 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Il primo principio della Termodinamica per un sistema aperto in forma integrale può essere derivato da quanto già visto per sistemi aperti con scambi di materia in corrispondenza a tubi di flusso finiti. Con riferimento alla Figura 43 si può scrivere il bilancio:

$$\dot{m}_1 \left(\frac{w_1^2}{2} + gz_1 + p_1 v_1 + e_1 \right) + \dot{Q} - \dot{L} - \dot{m}_2 \left(\frac{w_2^2}{2} + gz_2 + p_2 v_2 + e_2 \right) + \dot{Q}_{sorgente} = \frac{\partial E_\sigma}{\partial \tau}$$

ove risulta, per l'accumulo a secondo membro:

$$\frac{\partial E_s}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{M_\sigma} dm \left(\frac{w^2}{2} + gz + u + e \right)$$

In forma integrale la precedente equazione può essere scritta nella forma:

$$-\int_A \left(h + \frac{w^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA - \int_A \vec{q}'' \cdot \vec{n} dA + \int_V \dot{q} dV - \dot{L} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V e \rho dv \quad [96]$$

ove si ha:

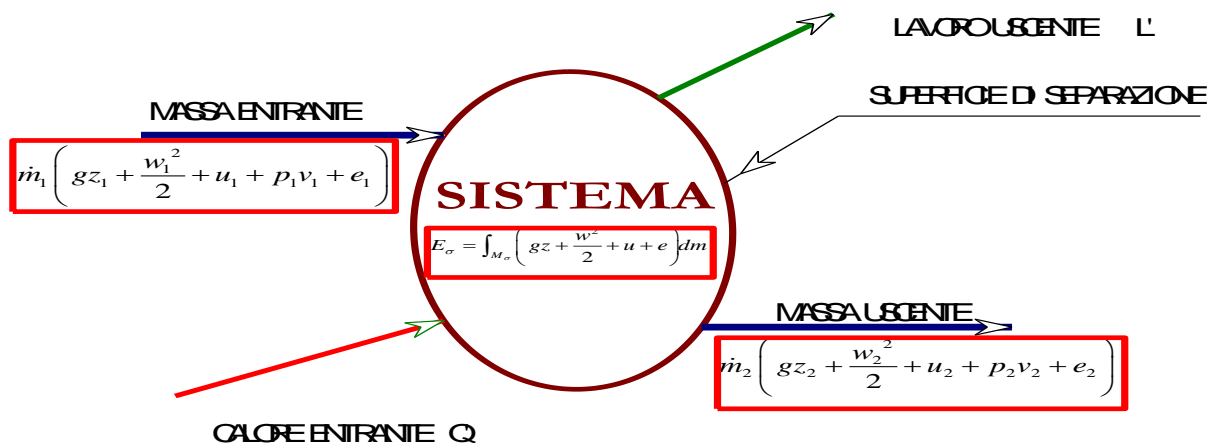


Figura 43: Sistema aperto con flussi localizzati

- $-\int_A \left(h + \frac{w^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ scambio totale (quantità entrante meno quantità uscente) di *entalpia* $\left(h + \frac{w^2}{2} + gz \right)$ della massa elementare;
- $-\int_A \vec{q}'' \cdot \vec{n} dA$ scambio termico totale di calore (entrante meno uscente);

- $\int_V \dot{q} dV$ generazione interna di calore, con \dot{q} potenza termica generata per unità di volume;
- \dot{L} Potenza meccanica totale scambiata (somma del lavoro positivo e del lavoro resistivo);
- $\frac{\partial}{\partial \tau} \int_V e \rho dv$ accumulo di energia nel sistema con e energia specifica dell'unità di massa del sistema.

Se ci si riferisce alle condizioni di regime permanente possiamo scrivere:

$$-\int_A \left(h + \frac{w^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA - \int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA + \int_V \dot{q} dV = \dot{L} \quad [97]$$

Possiamo ancora applicare il *teorema della divergenza* ma lo sviluppo risulta piuttosto lungo poiché occorre tenere conto del lavoro fatto da tutte le forze agenti sull'elemento di volume, fra le quali le tensioni normali σ e tangenziali τ .

La forma finale dell'equazione dell'energia, riferita all'entalpia, è:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} + \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q}$$

ove si ha:

$$\mu \Phi = \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

detto *termine dissipativo*. In forma simbolica la precedente equazione dell'entalpia si può scrivere:

$$\rho \frac{Dh}{D\tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{Dp}{D\tau} + \mu \Phi + \dot{q} \quad [98]$$

Ricordiamo ora che vale la relazione (vedi *Termodinamica Applicata*):

$$dh = c_p dT + \left(v - T \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$$

che può ancora essere scritta facendo apparire la densità $\rho = 1/v$:

$$dh = c_p dT + \left[\frac{1}{\rho} - T \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial T} \right)_p \right] dp$$

E, infine, tenendo conto della definizione del fattore di dilatazione termica:

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

si ha:

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) dp$$

per cui la [98] si può scrivere nella forma:

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \beta T \frac{Dp}{D\tau} + \mu \Phi + \dot{q}$$

Nel caso di fluidi a comportamento incompressibile e nel caso che $\frac{Dp}{D\tau}$ sia trascurabile la precedente equazione si può scrivere, in forma semplificata:

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \mu \Phi + \dot{q}$$

Se il mezzo è omogeneo ed isotropo ($\lambda = \text{costante}$) allora si può ancora scrivere:

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \lambda \nabla^2 T + \mu \Phi + \dot{q}$$

Nel caso in cui il *termine dissipativo* sia trascurabile¹⁶ e non ci sia generazione interna di calore è:

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \lambda \nabla^2 T$$

Le ultime due equazioni dell'energia sono molto utilizzate per lo studio della convezione termica.

5.4.3 EQUAZIONE DELL'ENTROPIA PER SISTEMI APERTI

L'equazione di *Clausius* per i sistemi chiusi vista nel corso di *Termodinamica Applicata* è:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Big|_{\text{Reale}} + \delta S_{\text{irreversibile}}$$

Per un sistema aperto in forma integrale questa diviene:

$$\int_A \frac{1}{T} \frac{dQ}{d\tau} + \int_V \rho s_{\text{irr}} dV - \int_A \rho s \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \rho s dV$$

Questa equazione risulta utile nella pratica quando si vuole ottimizzare l'efficienza dei sistemi termodinamici nel senso di determinare le condizioni di minore produzione di entropia. Una applicazione tipica si ha nell'ottimizzazione progettuale degli scambiatori di calore.

5.4.4 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

La legge di conservazione della quantità di moto, di Newton, in forma finita è data da:

$$\vec{F} + \dot{M}_e - \dot{M}_u = \frac{\partial M_V}{\partial \tau}$$

Per derivare la forma differenziale occorre considerare, fra le forze in gioco, anche le tensioni normali σ e tangenziali τ che agiscono sull'elemento di volume oltre alle forze di volume (ad esempio il peso, le forze elettromagnetiche, ...) X, Y, Z.

Poiché la precedente equazione è vettoriale occorre effettuare il bilancio nelle direzioni di moto. Ad esempio per la direzione x si ha l'equazione:

$$X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)u}{\partial y}$$

che può essere semplificata per l'equazione di continuità [95] nella forma:

$$X + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} - p) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

¹⁶ Per velocità piccole rispetto a quelle del suono nel mezzo a pari condizioni $\mu \Phi$ si dimostra trascurabile.

Analogamente per la direzione y si ha:

$$Y + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{yy} - p) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

e per l'asse z si ha:

$$Z + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zz} - p) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Per eliminare gli sforzi σ e τ dalle precedenti equazioni si ricorda che per i fluidi newtoniani gli sforzi sono proporzionali ai gradienti di velocità (legge di *Newton*) con costante di proporzionalità pari alla *viscosità dinamica*.

Lo sviluppo (sostituzione degli sforzi con relazioni funzioni dei gradienti di velocità) porta alle *equazioni di Navier – Stokes* :

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Sostituendo queste equazioni nelle precedenti equazioni di conservazione della quantità di moto si ottiene l'equazione *vettoriale* simbolica:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{D\tau} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F} \quad [99]$$

Questa equazione descrive in modo completo i fenomeni meccanici dovuti al moto delle particelle di fluido ed è fondamentale per lo studio della convezione termica.

5.5 EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE

E' noto che il moto di un fluido sopra una superficie porta alla formazione dello strato limite, vedi Figura 44, all'interno del quale la velocità del fluido risente della presenza della parete per effetto delle forze viscosive.

Si ricordi che si definisce *strato limite dinamico* lo spazio nel quale si ha una variazione di velocità finì al 99% di quella indisturbata, al di fuori dello stesso strato limite.

Per effetto dei fenomeni di aderenza si possono fare alcune ipotesi semplificative per le equazioni di bilancio viste in precedenza.

In particolare si può assumere che siano valide le assunzioni che:

- La velocità longitudinale u sia molto maggiore delle altre due componenti v e w ;
- Che il gradiente di velocità $\frac{\partial u}{\partial y}$ sia molto maggiore di tutti gli altri gradienti delle altre componenti di velocità rispetto a qualunque asse;
- Che il gradiente di temperatura $\frac{\partial T}{\partial y}$ sia molto maggiore di tutti gli altri gradienti di temperatura $\frac{\partial T}{\partial x}$ e $\frac{\partial T}{\partial z}$.

In queste ipotesi le equazioni di *Navier – Stokes* portano ad avere componenti di sforzi normali σ nulli in tutte le direzioni mentre gli sforzi tangenziali non nulli sono:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

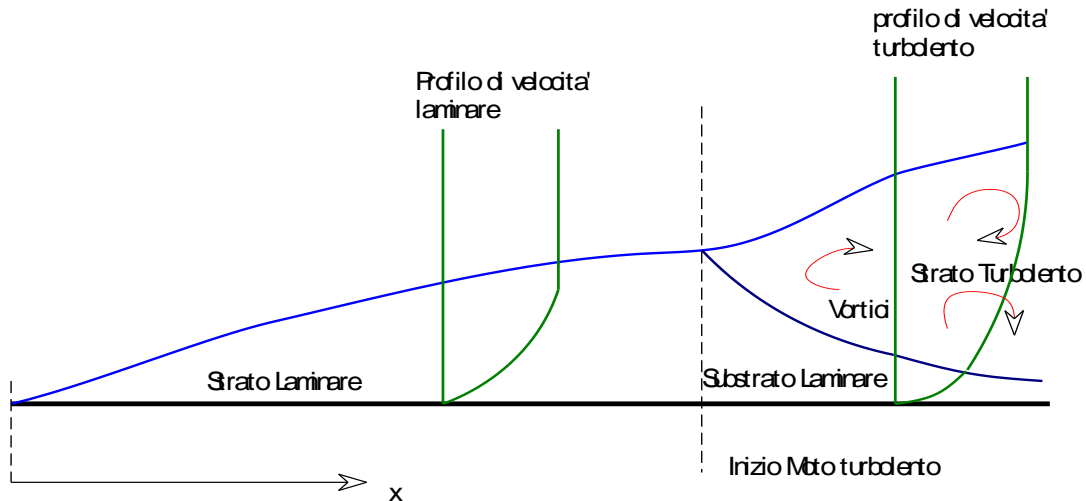


Figura 44: Profili di velocità nello strato limite sopra una lastra piana

Inoltre se il fluido si suppone incompressibile la sua densità, ρ , non varia e pertanto l'equazione di continuità diviene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

L'equazione della quantità di moto nella direzione x diviene:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

mentre la proiezione sull'asse y porta ad avere:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Infine l'equazione dell'energia, con il termine dissipativo $\mu\Phi$, nello strato limite si semplifica nella forma seguente:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Queste ultime tre equazioni (nel piano) rappresentano le cosiddette *equazioni dello strato limite* che descrivono compiutamente tutta la fenomenologia (*meccanica e termica*) della convezione termica.

L'integrazione di queste equazioni non è affatto semplice e rappresenta uno dei problemi più complessi di tutta la Scienza e la Tecnica. Queste equazioni descrivono fenomeni complessi i più vari, dalla meteorologia terrestre, alle correnti marine, agli scambi convettivi di tutti i corpi, ...

Si osservi come le equazioni di continuità e di quantità di moto consentano di risolvere il campo di moto (u e v) mentre l'equazione della temperatura fornisce il campo termico, T .

La risoluzione delle prime due equazioni può essere considerata indipendente dalla terza fino a quando non si abbia parametri (ρ e μ) dipendenti dalla temperatura.

Ciò non sempre si verifica e in particolare con la convezione naturale si ha proprio questa dipendenza (ipotesi di *Bussinesque*) e pertanto le tre equazioni risultano *accoppiate* e non possono essere risolte separatamente, con aggravio notevole dei calcoli.

Pertanto possiamo considerare disaccoppiati le equazioni meccaniche da quella dell'energia solo per la convezione forzata mentre per quella naturale questa separazione non è più possibile.

5.5.1 IL COEFFICIENTE DI CONVEZIONE TERMICA

Scriviamo qui di seguito le equazioni dello strato limite:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad A) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2\end{aligned}$$

Si può immediatamente osservare che in esse non compare il *coefficiente di convezione termica* h . Come mai? In effetti queste equazioni descrivono i fenomeni fondamentali che costituiscono il fenomeno complesso della convezione termica: il fluido si riscalda, si sposta e trasporta con sé l'energia interna (fenomeno di trasporto). Se vogliamo determinare h occorre considerare che l'equazione di Newton è una semplificazione macroscopica della complessità dei fenomeni suddetti. Newton pose in relazione la temperatura della parete e quella del fluido indisturbato mediante la nota equazione:

$$q'' = h(T_p - T_f)$$

Va ancora considerato che la parete trasmette il flusso:

$$q'' = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Deve allora essere:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = h(T_p - T_f)$$

e pertanto risulta:

$$h = \frac{-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{(T_p - T_f)} \quad [100]$$

Quindi se si conosce il gradiente di temperatura nel fluido all'attacco della parete (per $y=0$) allora è possibile calcolare il coefficiente h . Pertanto la risoluzione delle equazioni dello strato limite e in particolare del campo di temperatura (*per altro dipendente da quello di velocità*) porta al calcolo di h mediante la relazione precedente.

5.5.2 I PARAMETRI DI SIMILITUDINE

Se si trascura l'effetto del gradiente di pressione nell'equazione della quantità di moto e del termine dissipativo nell'equazione dell'energia allora le equazioni dello strato limite divengono:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad B)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Appare evidente l'identità formale delle ultime due equazioni che hanno a primo membro il termine convettivo $u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ relativo, rispettivamente, alla velocità in direzione del moto, u , e alla temperatura e a secondo membro il termine di attrito o di flusso di conduzione entrambi con analoga forma matematica¹⁷.

Si osserva ancora che il gradiente di pressione dipende dalla geometria di scambio e non dalle caratteristiche dello scambio convettivo. Ad esempio, per il moto all'interno di condotti circolari $\frac{\partial p}{\partial x}$ è dato dalla relazione di *Weissbach* $\frac{\partial p}{\partial x} = \xi \frac{1}{d} \frac{u^2}{2} \rho$. Pertanto quanto detto sul formalismo matematico può ancora ritenersi valido in presenza del gradiente di pressione.

Il termine dissipativo, invece, dipende dal campo di velocità e pertanto la sua presenza costituisce una differenza formale non trascurabile. Sorge spontanea la domanda se sia possibile modificare queste equazioni per renderle adimensionali. Ponendo:

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L}$$

$$u^* = \frac{u}{u_\infty}; \quad v^* = \frac{v}{u_\infty}$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2}$$

allora le equazioni dello strato limite, A), inizialmente scritte divengono:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

con i numeri adimensionali di *Reynolds* e di *Prandtl* definiti, come è noto, da:

$$\text{Re} = \frac{\rho w L}{\mu} = \frac{w L}{\nu}$$

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$$

¹⁷ Proporzionalità, tramite a e ν alla derivata seconda della velocità e della temperatura.

Queste nuove equazioni sono ora adimensionali e consentono di risolvere il campo di velocità adimensionale, u^* e v^* , e di temperatura, T^* .

In genere si hanno funzioni del tipo:

$$u^* = u^* \left(x^*, y^*, \frac{dp^*}{dx^*}, \text{Re} \right)$$

$$v^* = v^* \left(x^*, y^*, \frac{dp^*}{dx^*}, \text{Re} \right)$$

E ancora per la temperatura adimensionale:

$$T^* = T^* \left(x^*, y^*, \frac{dp^*}{dx^*}, \text{Re}, \text{Pr} \right)$$

Si ricordi che $\frac{dp^*}{dx^*}$ dipende dalla geometria, come pure la lunghezza di riferimento L . Se si applica la relazione [100] per il calcolo di h allora si ha:

$$\frac{h_{x^*} L}{\lambda} = \text{Nu}_{x^*} = \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} = f \left(\text{Re}, \text{Pr}, \frac{dp^*}{dx^*}, x^* \right)$$

Il valore medio di h_{x^*} dipende da:

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{1}{L} \int_0^L \text{Nu}_{x^*} dx^* = f \left(\text{Re}, \text{Pr}, \frac{dp^*}{dx^*} \right)$$

con Nu numero di Nusselt. Per data geometria e quindi per assegnato $\frac{dp^*}{dx^*}$ si ha il legame funzionale:

$$\overline{\text{Nu}} = f(\text{Re}, \text{Pr}) \quad [101]$$

Questa relazione è molto importante perché ci indica un legame funzionale fra il numero di Nusselt (che contiene h) e i numeri adimensionali di *Reynolds* e di *Prandtl*. Il numero di Prandtl è anche dato dal rapporto fra la viscosità cinematica (detta anche *diffusività meccanica*) e la diffusività termica.

5.5.3 ANALISI ADIMENSIONALE PER LA CONVEZIONE FORZATA

L'analisi adimensionale mediante l'applicazione del teorema di *Buckingham*¹⁸ trova esattamente gli stessi risultati visti sopra con l'adimensionalizzazione delle equazioni dello strato limite. Non sfugge certamente il significato fisico del precedente sviluppo: partendo dalle equazioni costitutive della convezione termica (*forzata*) si è pervenuti alla definizione del legame funzionale fra le grandezze termofisiche in gioco presenti nei numeri adimensionali Nu , Re e Pr .

Ancora dalle equazioni di *Navier - Stokes* per lo strato limite per la convezione forzata si ha che la velocità del fluido è imposta esternamente mediante un circolatore del fluido e pertanto si osserva che il coefficiente di convezione h è funzione delle seguenti variabili:

$$h = h(\rho, \mu, w, l, c_p, \lambda) \quad [102]$$

Si possono scrivere le seguenti relazioni dimensionali:

$$[h] = [L]$$

¹⁸ L'Analisi Adimensionale di *Buckingham* fornisce una semplice procedura matematica per semplificare il numero di variabili indipendenti nello studio di un problema complesso. Essa viene attuata indipendentemente dalla conoscenza del fenomeno fisico e, pur se semplice nella trattazione, fa perdere di vista il reale significato delle grandezze in gioco. Per il teorema di *Buckingham* (o teorema *pi-greco*) si dimostra che se una grandezza \mathbf{k} dipende da \mathbf{m} altre variabili e se è possibile scegliere \mathbf{n} variabili indipendenti allora la variabile \mathbf{k} si può porre in funzione di $\mathbf{m-n}$ gruppi adimensionali.

$$\begin{aligned}
[w] &= [LT^{-1}] \\
[\rho] &= [ML^{-3}] \\
[\mu] &= [ML^{-1}T^{-1}] \\
[\lambda] &= [MLT^{-3}\theta^{-1}] \\
[c_p] &= [L^2T^{-2}\theta^{-1}] \\
[h] &= [MT^{-3}\theta^{-1}]
\end{aligned}$$

Ipotizzando una relazione di tipo monomia¹⁹ del tipo:

$$h = C \rho^a \mu^b w^c l^d c_p^e \lambda^f \quad [103]$$

si ottiene l'equazione di congruenza:

$$[MT^{-3}\theta^{-1}] = C [ML^{-3}]^a [ML^{-1}T^{-1}]^b [LT^{-1}]^c [L]^d [L^2T^{-2}\theta^{-1}]^e [MLT^{-3}\theta^{-1}]^f \quad [104]$$

da cui è possibile ricavare il sistema di congruenza dimensionale:

$$\begin{cases}
0 = -3a - b + c + d + 2e + f & \text{per L} \\
1 = a + b + f & \text{per M} \\
-3 = -b - c - 2e - 3f & \text{per T} \\
-1 = -e - f & \text{per } \theta
\end{cases} \quad [105]$$

Ancora procedendo come per la convezione naturale, risolto il sistema per 6-4=2 variabili arbitrarie scelte come indipendenti si ha che la [104] diviene:

$$h = \frac{\lambda}{l} \left(\frac{\rho w l}{\mu} \right)^m \left(\frac{c_p \mu}{\lambda} \right)^n \quad [106]$$

si perviene ad una relazione fra tre gruppi adimensionali e più precisamente fra i numeri di Nusselt, Prandtl e Reynolds, già introdotti in precedenza.

Il legame funzionale è del tipo:

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n \quad [107]$$

o più in generale della forma

$$Nu = f(Re, Pr) \quad [108]$$

Nel prosieguo sono fornite alcune tabelle utili per il calcolo dei coefficienti di convezione termica sia in regime forzato che naturale.

5.6 CONVEZIONE IN REGIME TURBOLENTO

Le equazioni dello strato limite A) così come sono scritte valgono per regimi laminari nei quali si possono individuare con precisione i percorsi e le velocità delle particelle di fluido in movimento. La cosa non risulta semplice nel caso di moto turbolento a causa della imprevedibile casualità del moto.

Ogni particella in un dato istante, infatti, può spostarsi liberamente in ogni direzione ma il valore medio in un periodo temporale congruo deve avere una componente media della velocità non nulla solo nella direzione di moto e cioè deve essere $\bar{u} \neq 0$, $\bar{v} = \bar{w} = 0$.

Seguendo una metodologia di studio suggerita da Prandtl è possibile scrivere, in ogni istante:

¹⁹ In realtà non è necessario supporre che il legame funzionale sia monomio. Si dimostra che il procedimento resta valido anche per relazione di tipo polinomiale. Si è preferito utilizzare la forma monomia per semplicità espositiva.

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

$$T = \bar{T} + T'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

avendo indicato con gli apici i valori fluttuanti e con il sopra segno i valori medi di ciascuna grandezza. Le equazioni dello strato limite A) con le precedenti sostituzioni possono essere risolte tenendo presente che, statisticamente, si hanno le seguenti eguaglianze:

$$\begin{aligned}\overline{u'} &= 0 \\ \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} &= 0 ; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = 0 ; \quad \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)} = 0 \\ \overline{u + v} &= \bar{u} + \bar{v} \\ \overline{uu'} &= 0 \\ \overline{uv} &= \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'} \\ \overline{u^2} &= (\bar{u})^2 + \overline{(u')^2}\end{aligned}$$

e pertanto divengono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right] \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[a \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \overline{v'T'} \right] + \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right]\end{aligned}$$

Ponendo:

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

con ε_M la *diffusività meccanica del vortice* e ancora:

$$-\overline{v'T'} = \varepsilon_H \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

con ε_H detta *diffusività termica del vortice* si può ancora scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + \varepsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]\end{aligned} \quad C)$$

che sono le nuove equazioni dello strato limite per il regime turbolento. Come si può osservare adesso le incognite sono passate da tre (u, v, T) a cinque $(u, v, T, \varepsilon_M, \varepsilon_T)$ pur avendo sempre tre equazioni a disposizione.

Ne segue che la soluzione del campo dinamico e termico non è più possibile con le sole equazioni costitutive C) ma ad esse vanno aggiunte altre due equazioni che definiscono le diffusività del vortice meccanica, ε_M , e termica, ε_T . Queste equazioni sono di solito sperimentali, come si vedrà nel prosieguo con i *profili universali di velocità e di temperatura*.

5.6.1 NUOVA TEORIA SULLA TURBOLENZA

Per oltre un secolo si è associato alla parola *turbolenza* il significato di *caotico* nel senso classico di indeterminazione ossia di incapacità a gestire in modo rigoroso fisico – matematico il problema.

Quando un problema si presenta in modo non direttamente risolvibile o quanto meno gestibile con le conoscenze del momento allora l'Uomo cerca trovare sempre una via alternativa che consiste nel definire un modello più semplice che riduce la complessità del problema e che quindi porta ad avere risultati utili anche se si è perso il legame diretto fra causa ed effetto.

L'idea di Kutateladze di definire le variabili turbolente come somma di un valore medio e di un valore istantaneamente variabile (come fatto nel precedente paragrafo) è certamente stata utile ad affrontare e risolvere un problema che nell'ottocento non era risolvibile con le conoscenze dell'epoca.

Pur tuttavia questa procedura ha di fatto posto un velo all'intelligenza dei ricercatori di diverse generazioni perché ha impedito loro, per una sorta di pigrizia mentale, di ricercare una soluzione che avesse un legame diretto con il fenomeno complesso della turbolenza.

In pratica la metodologia di Kutateladze non risponde alle domande più dirette ed elementari che un ricercatore si deve porre: *perché avviene la transizione dal moto laminare al moto turbolento?*

In effetti la Statistica ci insegna che il valore medio di una variabile nasconde tutta la statistica di ordine superiore che essa può presentare focalizzando l'attenzione solo sul primo momento statistico, il valore medio. Le fluttuazioni non sono più prese in considerazione e con esse la storia evolutiva del fenomeno legato alla variabile fluttuante.

Se osserviamo il pennacchio di fumo che si origina da una sigaretta accesa, ad esempio, possiamo notare che all'inizio (nel tratto più vicino al focolare) si ha un andamento ordinato e laminare.

Successivamente, ad una certa distanza dal focolare, si comincia ad osservare una prima oscillazione (vedi Figura 45) di relativamente piccola ampiezza cui seguono altre oscillazioni di ampiezza crescente.



Figura 45: Pennacchio originato da un focolare in basso

Quando queste oscillazioni superano determinati valori che dipendono dalle condizioni evolutive (tipo di fluido, temperatura del focolare, distanza,) allora si ha l'inizio della formazione di veri vortici caratteristici del moto turbolento.

Se consideriamo un segmento di pennacchio e consideriamo le forze agenti ai suoi estremi allora lo possiamo schematizzare come un'asta soggetta ai carichi di punta. E' noto che questa condizione di carico porta all'instabilità e quindi alla flessione quando la rigidezza flessionale (EI) dell'asta è inferiore ad un valore limite caratteristico per la geometria, i vincoli e i carichi.

La stessa cosa possiamo pensare per il segmento di pennacchio: quando, allontanandosi dal focolare, viene sottoposto a forze esterne alle quali non può resistere ecco che esso si flette e da quel momento iniziano le oscillazioni che sfociano nella turbolenza.

Le considerazioni appena accennate sono oggi sviluppate dai vari ricercatori ottenendo eccellenti risultati e un grande avanzamento della conoscenza nelle problematiche della turbolenza che comincia a non apparire più come un moto caotico e quindi non descrivibile in modo esatto ma come un evento perfettamente deterministico che è possibile studiare con le metodologie solite).

Ancora una volta la *banalizzazione* della realtà e il velo mentale che da questa ne deriva ha portato per oltre un secolo a ritenere risolto un problema che invece è ancora tutto da studiare e risolvere. Il modello semplificato di Kutateladze è da ritenere solo un semplice surrogato della realtà, un modello comunque distante anche se ci ha consentito di pervenire a risultati importanti nella ricerca.

C'è da fare un confronto metodologico con quanto si è verificato per il coefficiente di convezione: Newton superò la complessità del fenomeno definendo, in modo puramente apodittico, h come rapporto fra flusso termico specifico e differenza di temperatura e così siamo andati avanti per secoli. Allo stesso modo Kutateladze semplificò il problema della turbolenza con le equazioni dei valori medi. Entrambe le posizioni si scostavano molto dalle equazioni costitutive del fenomeno ma, dobbiamo riconoscerlo, non era possibile fare altrimenti nei momenti storici in cui tali problemi sono stati posti ed affrontati.

Oggi siamo in grado di risolvere le equazioni costitutive di Navier Stokes mediante l'utilizzo di potenti computer e sofisticati programmi di calcolo (alias mediante algoritmi di calcolo opportuni) senza i quali poco potremmo fare. Lo stesso dicasi per lo studio della turbolenza.

5.6.2 LA DIFFUSIVITÀ MECCANICA TURBOLENTA

Con riferimento alla Figura 47 si immagini una particella di fluido alla distanza y dalla parete in moto turbolento all'interno dello strato limite dinamico. La velocità media longitudinale è pari a $\bar{u}(x, y)$ mentre quella trasversale è nulla. Se questa particella passa nello strato $(y - l)$, con l lunghezza media statistica di scambio fra gli strati di fluido, allora la velocità media diviene $\bar{u}(x, y - l)$. Questa distanza è detta *lunghezza di mescolamento* e definisce il percorso all'interno del quale la particella di fluido mantiene ancora la sua identità. La fluttuazione u' provocata da questa migrazione nel livello $(y - l)$ è dello stesso ordine di grandezza e può essere scritta nella forma:

$$|u'| \sim \bar{u}(x, y) - \bar{u}(x, y - l) \sim l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Allo stesso modo si può pensare che la fluttuazione v' sia dello stesso ordine di grandezza e che ancora si possa scrivere:

$$|v'| \sim l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Allora la diffusività meccanica del vortice, ε_M , può essere posta proporzionale a:

$$\varepsilon_M \sim l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

Misure sperimentali suggeriscono che la *lunghezza di mescolamento* è proporzionale alla distanza dalla parete e cioè che sia:

$$l = \kappa y$$

con $\kappa=0.4$ determinato sperimentalmente da *von Karman*. Pertanto sostituendo nella precedente relazione si ha:

$$\varepsilon_M = \kappa^2 y^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

che è l'equazione classica della rappresentazione della *diffusività meccanica del vortice* e che è stata utilizzata dai vari ricercatori per risolvere il problema della *chiusura* delle equazioni dello strato limite.

5.6.3 LA DIFFUSIVITÀ TERMICA TURBOLENTA

Quando le particelle si spostano da un piano ad un altro (quindi con variazione di v') trasportano anche la loro entalpia.

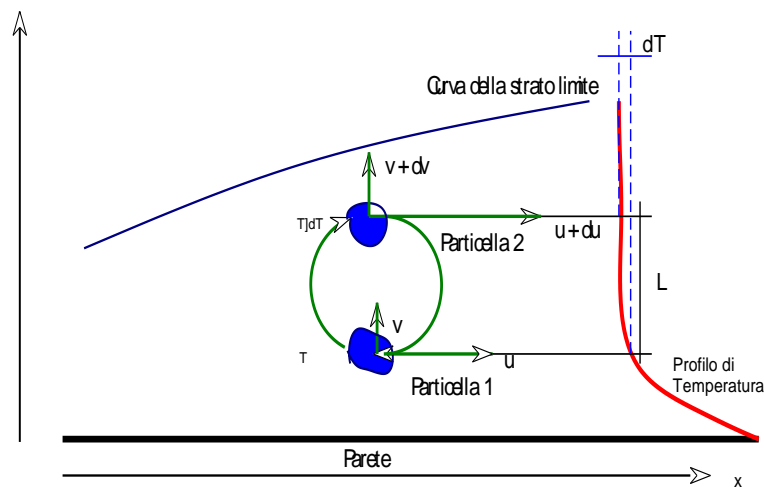


Figura 46: Lunghezza di mescolamento termica

Con riferimento alla Figura 46 si può osservare che le fluttuazioni generate dal mescolamento turbolento dipendono dalla lunghezza media di mescolamento, l , e che si può scrivere:

$$|T'| \equiv T\left(y - \frac{l}{2}\right) - \bar{T}\left(y + \frac{l}{2}\right) \approx -l \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

Il trasporto di entalpia corrispondente è dato da:

$$(q'')' = \rho c_p v' (\bar{T} + T')$$

Il valore medio temporale di questo flusso (turbolento) vale:

$$\overline{(q''_y)'} = \rho c_p \overline{v' T'}$$

In pratica il fluido a coordinate y inferiori cedono calore al fluido a coordinate y maggiori e pertanto nasce un *flusso termico apparente* dovuto agli effetti di mescolamento per la turbolenza. Tenendo conto dell'espressione di T' trovata in precedenza si ha:

$$\overline{(q''_y)'} = \rho c_p \overline{v' T'} \approx -\rho c_p l \overline{|v'|} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

Ponendo:

$$a_t = l \overline{|v'|}$$

detta *diffusività termica turbolenta*, si può ancora scrivere per il flusso turbolento:

$$\overline{(q''_y)'} = \rho c_p \overline{v'T'} \approx -\rho c_p l |\overline{v}| \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} = -\rho c_p a_t \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}$$

In definitiva il flusso termico totale (conduttivo più turbolento) è pari a:

$$q''_y = -\rho c_p (a + a_t) \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}$$

come visto per l'equazione dell'energia in moto turbolento. E' opportuno osservare che la *diffusività termica del vortice* non è una proprietà termofisica del fluido, come è invece la diffusività molecolare a , ma dipende dal *campo di moto*, come la viscosità dinamica turbolenta.

Per l'analogia del meccanismo di turbolenza sopra descritto e cioè per l'equivalenza del meccanismo di trasporto della quantità di moto e dell'entalpia, si può supporre (ma non sempre è così) che sia:

$$\text{Pr}_t = \frac{\nu_t}{a_t} \approx 1$$

Questa ipotesi semplificativa è spesso assunta da diversi ricercatori come base di partenza per le loro teorie.

5.7 PROFILO UNIVERSALE DI VELOCITÀ

Se si considera il moto di un fluido sopra una lastra piana si osserva che la distribuzione della velocità, a partire dalla parete, varia secondo un profilo tipico indicato in Figura 44.

Si può subito osservare che il fluido per aderenza molecolare ha velocità nulla in corrispondenza della parete e che questa velocità va sempre più crescendo fino a raggiungere la velocità che il fluido aveva all'imbocco della lastra piana.

La distribuzione della velocità all'interno dello strato limite è di grande importanza ai fini del calcolo del fattore di attrito e dei coefficienti di scambio termico.

Nel caso di moto *laminare* il profilo di velocità può essere determinato integrando le equazioni di *Navier Stokes* all'interno dello strato limite dinamico e pervenendo ad un profilo di tipo parabolico o assimilabile ad esso.

Ben diverse, come si è visto nel paragrafo precedente, sono le condizioni quando il moto diviene turbolento. In questo caso, infatti, la velocità istantanea di una particella può andare in qualunque direzione, in modo del tutto casuale.

In Figura 47 si vede come una particella ad ordinata y che si sposta nel piano ad ordinata $y + dy$ scambia con la analoga che scenda nel piano y (per conservazione della massa) la quantità di moto:

$$\Delta p = dm(u_2' - u_1')$$

ed analogamente l'energia:

$$de = c_p dm(T_2' - T_1')$$

Ne deriva che la turbolenza fa nascere due effetti nuovi: un rallentamento degli strati veloci per effetto dell'assorbimento di quantità di moto degli strati più lenti ed uno scambio di entalpia fra particelle di strati a diverse temperature.

L'esigenza di risolvere le variabili \overline{u} , \overline{v} e \overline{T} nonché ε_M e ε_H con tre sole equazioni di *Navier Stokes*: ha generato il cosiddetto **problema della chiusura** nel senso che, oltre alle equazioni suddette occorre conoscere altre relazioni, solitamente di tipo sperimentale, per la determinazione delle *diffusività del vortice* meccanica e termica.

Un metodo elegante e proficui per risolvere questo problema è quello dei cosiddetti *profili universali di velocità e di temperatura* che qui si richiama brevemente.

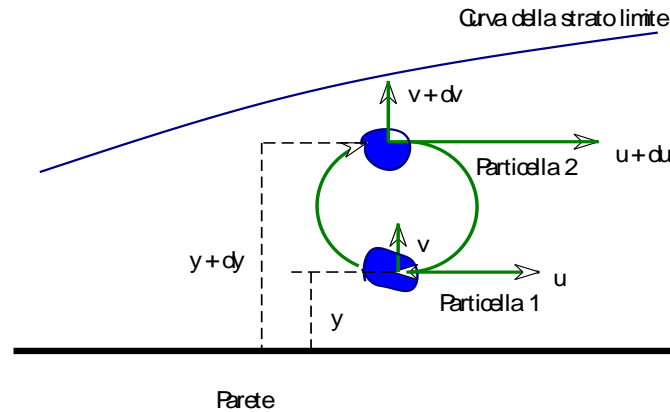


Figura 47: Scambio di quantità di moto e di energia fra particelle in moto turbolento

Con riferimento alla Figura 44, si definiscono le seguenti grandezze:

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \quad ; \quad y^+ = \frac{yv^*}{\nu} \quad ; \quad v^+ = \frac{u}{v^*}$$

ove τ_s è lo sforzo di attrito alla parete, y la distanza dalla parete, u la velocità del fluido a quella distanza e ν la viscosità cinematica. L'equazione della quantità di moto del sistema C) in vicinanza della parete, ove $\bar{u} = 0$ e $\bar{v} = 0$, portano ad avere, trascurando gli effetti del gradiente di pressione:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$$

ovvero, integrando una prima volta:

$$\left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = \text{costante} = \frac{\tau_s}{\rho}$$

Allora integrando nuovamente e tenendo conto delle posizioni sopra fatte si ha la relazione:

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{1 + \frac{\varepsilon_M}{\nu}}$$

che è possibile integrare se si conosce il rapporto fra la *diffusività del vortice*, ε_M , e la viscosità cinematica.

Si osservi che la variabile y^+ è una sorta di numero di Reynolds calcolato per la distanza y dalla parete con riferimento alla velocità v^* detta *velocità di parete*. La y^+ è detta anche *numero di Reynolds di parete*. Van Driest ha trovato sperimentalmente la seguente relazione:

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = \frac{1}{2} \left[1 + 4K^2 y^{+2} \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

con $K=0.40$ ed $A=0.5$ e pertanto l'integrazione fornisce i seguenti risultati

$$\begin{aligned} y^+ < 5 & \quad u^+ = y^+ \\ y^+ > 40 & \quad u^+ = 1/K \ln(y^+) + C \end{aligned}$$

e nell'intervallo $5 \div 40$ si ha un andamento complesso rappresentato in Figura 48. Il vantaggio del *profilo universale di velocità* è quello di essere rappresentato in forma adimensionale e di valere anche per moto all'interno di condotti chiusi.

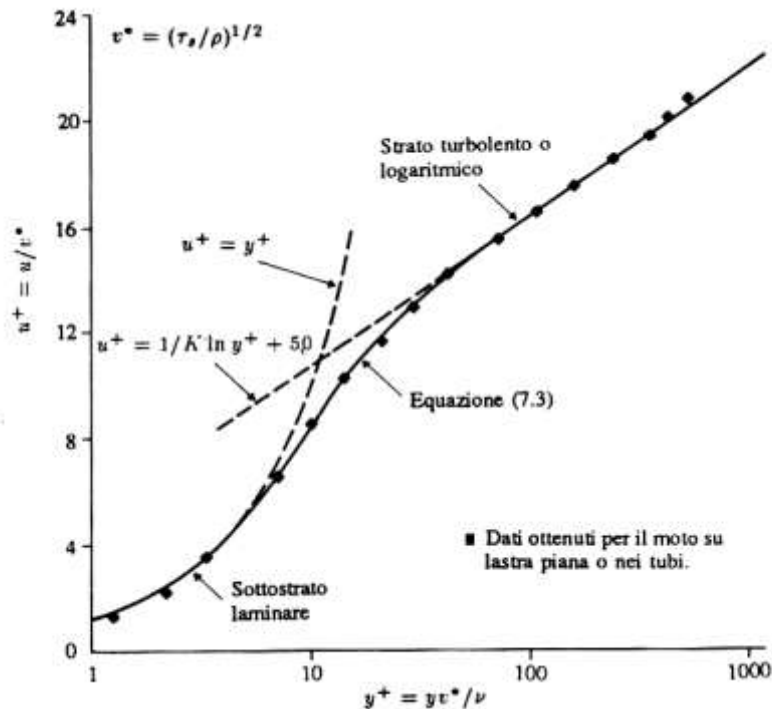


Figura 48: Profilo universale di velocità

Tramite questo profilo, calcolata la y^+ si calcola la u^+ e quindi la velocità vera u del fluido alla distanza y dalla parete. Conoscere la distribuzione della velocità al variare della distanza dalla parete è particolarmente utile nel moto turbolento dove la casualità del movimento genera fenomeni di diffusività meccanica e termica fittizi, cioè dovuti allo scambio di quantità di moto e di energia fra particelle provenienti da strati diversi.

5.8 PROFILO UNIVERSALE DI TEMPERATURA

Se la lastra piana è riscaldata uniformemente, vedi Figura 49, allora oltre al profilo di velocità dinamico si forma anche un profilo di temperatura. Lo strato limite termico può avere sviluppo simile o anche diverso da quello dinamico in funzione delle caratteristiche del fluido. Procedendo allo stesso modo visto per il profilo di velocità si osserva che l'equazione dell'energia delle C) in prossimità della parete fornisce:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + \varepsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right]$$

che integrata una prima volta diviene:

$$\left[(a + \varepsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = \text{costante} = \frac{-q''_s}{\rho c_p}$$

che integrata ancora una volta, tenuto conto delle posizioni adimensionali fatte in precedenza, produce la relazione:

$$T - T_p = -\frac{q''}{\rho c_p} \int_0^y \frac{dy}{a + \varepsilon_H}$$

ove q'' è il flusso termico specifico applicato alla parete, ρ e c_p sono la densità e il calore specifico del fluido, a e ε_H rispettivamente la diffusività termica molecolare e la diffusività termica turbolenta generata dalla miscelazione delle particelle di fluido provenienti dai vari strati nello strato limite turbolento.

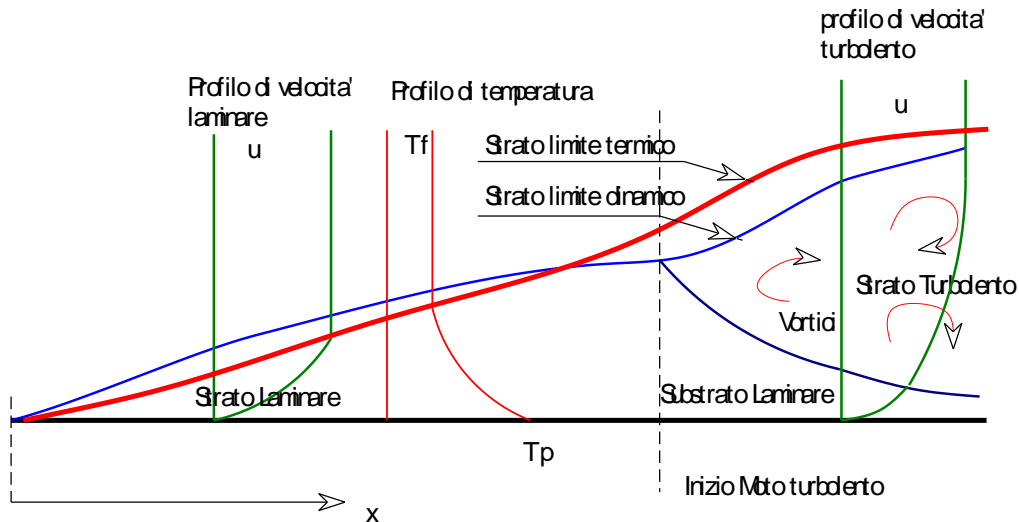


Figura 49: Profili di velocità e di temperatura per moto su lastra piana riscaldata

La precedente relazione viene adimensionalizzata nella forma:

$$T^+ = (T_p - T) \frac{\rho c_p v^*}{q''} = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_M}{\nu} \frac{1}{Pr_t}}$$

ove T_p è la temperatura di parete, Pr è il numero di Prandtl del fluido ($Pr = \nu/\alpha$) e $Pr_t = \varepsilon_M/\varepsilon_H$ il numero di Prandtl turbolento.

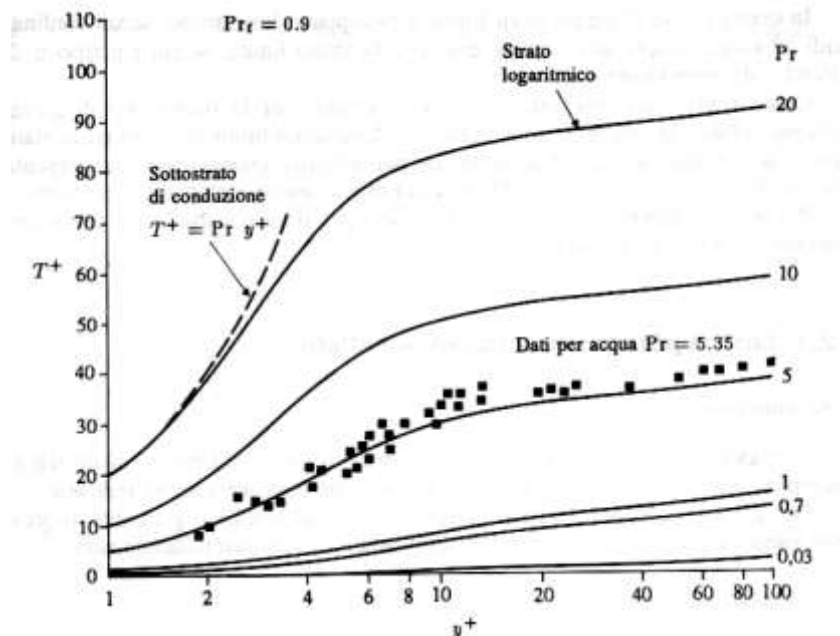


Figura 50: Profilo universale di temperatura

Nota la relazione di Van Driest per il rapporto ε_M/ν , la precedente relazione può essere integrata per vari valori di Pr ottenendo le curve di Figura 50 detta *profilo universale di temperatura*.

L'utilizzo di queste curve è del tutto simile a quello del profilo universale di velocità e risulta estremamente utile per conoscere i profili reali di temperature negli strati limiti termici in regime turbolento.

In Figura 50 si può osservare la dispersione sperimentale dei dati per il valore $Pr = 5$.

Analoghe dispersioni si hanno per altri numeri di Prandtl, in ottimo accordo con le curve teoriche sopra determinate. Quando si assume $Pr_t = 1$ e $Pr = 1$ allora si può dimostrare che gli stati limite di velocità e di temperatura coincidono.

Negli altri casi si ha una diversificazione sensibile che porta anche ad un allontanamento delle ipotesi sopra descritte. Si hanno varie teorie che cercano di risolvere il problema della chiusura per i casi più comuni della tecnica e si rimanda ai testi specializzati per ulteriori approfondimenti.

5.9 ALTRE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA CHIUSURA

Come si è sopra detto, molti ricercatori hanno cercato di risolvere il problema della *chiusura* delle equazioni dello strato limite turbolento affrontando sperimentalmente la determinazione delle due diffusività del vortice. In Tabella 6 si ha una rassegna delle equazioni proposte, ivi compresa quella di *Van Driest* vista in precedenza.

5.9.1 ANALISI DEGLI ORDINI DI GRANDEZZA

Le equazioni dello strato limite A) o B) consentono di ottenere molte informazioni con semplici considerazioni degli ordini di grandezza.

Summary of Longitudinal Velocity Expressions for the Inner Region of a Turbulent Boundary Layer (after Kestin and Richardson [15])		
$u^+(y^+)$	Range	References
$u^+ = y^+$ $u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	$0 < y^+ < 11.6$ $y^+ > 11.6$	Prandtl and Taylor [13]
$u^+ = y^+$ $u^+ = 5 \ln y^+ - 3.05$ $u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	$0 < y^+ < 5$ $5 < y^+ < 30$ $y^+ > 30$	von Kármán [16]
$u^+ = 14.53 \tanh(y^+/14.53)$ $u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	$0 < y^+ < 27.5$ $y^+ > 27.5$	Rannie [17]
$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + \{1 + 4\kappa^2 y^{+2} [1 - \exp(-y^+/A^+)]^2\}^{1/2}}$ $\kappa = 0.4$ $A^+ = 26$	all y^+	van Driest [18]
$u^+ = 2.5 \ln(1 + 0.4 y^+)$ $+ 7.8 [1 - \exp(-y^+/11)]$ $- (y^+/11) \exp(-0.33 y^+)$	all y^+	Reichardt [19]
$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{1 + n^2 u^+ y^+ [1 - \exp(-n^2 u^+ y^+)]}$ $n = 0.124$ $u^+ = 2.78 \ln y^+ + 3.8$	$0 < y^+ < 26$	Deissler [20]
$y^+ = u^+ + A[\exp Bu^+ - 1 - Bu^+ - \frac{1}{2}(Bu^+)^2 - \frac{1}{6}(Bu^+)^3 - \frac{1}{24}(Bu^+)^4]$ (last term in u^{+4} may be omitted)	all y^+ $A = 0.1108$ $B = 0.4$	Spalding [21]

Tabella 6: Altre soluzioni del problema della chiusura

Ad esempio possiamo facilmente vedere che lo spessore dello strato limite, δ , è proporzionale alla distanza x dal bordo di attacco ed inversamente proporzionale al numero di Reynolds corrispondente. Sostituendo ai valori indicati dalle equazioni differenziali le grandezze massime corrispondenti, cioè sostituendo u con u_∞ e x con δ allora l'equazione di continuità fornisce:

$$\frac{u_\infty}{x} \approx \frac{v}{\delta}$$

e l'equazione della quantità di moto:

$$u_{\infty} \frac{u_{\infty}}{x} \approx \nu \frac{u_{\infty}}{\delta^2}$$

che, per la precedente relazione, porta ad avere:

$$\delta \approx \left(\frac{\nu x}{u_{\infty}} \right)^{1/2}$$

ovvero:

$$\delta \approx \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

avendo indicato con $\text{Re}_x = \frac{u_{\infty} x}{\nu}$.

Con lo stesso procedimento si può dimostrare che il fattore di attrito dipende dall'energia cinetica specifica e dal numero di Reynolds.

Infatti possiamo scrivere, per l'equazione di Newton:

$$\tau_s = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \approx \mu \frac{u_{\infty}}{\delta} \approx \rho u_{\infty}^2 \left(\frac{u_{\infty} x}{\nu} \right)^{-1/2} \approx \rho u_{\infty}^2 \text{Re}_x^{-1/2}$$

Questo risultato è confermato anche dall'analisi adimensionale e dai dati sperimentali. Il *fattore di attrito di parete*, C_{fx} , può essere facilmente calcolato in base ai risultati sopra trovati. Risulta, infatti:

$$C_{fx} = \frac{\tau_s}{\frac{\rho u_{\infty}^2}{2}}$$

e pertanto, combinando i risultati precedenti:

$$C_{fx} \approx \text{Re}_x^{-1/2}$$

5.10 SOLUZIONE DI BLASIUS DELLE EQUAZIONI PRE STRATO LAMINARE

Consideriamo le equazioni dello strato limite nella forma B). La soluzione analitica esatta non è affatto agevole da trovare. Blasius ha proposto una soluzione, all'inizio del 1900, basata sul *metodo della similitudine*²⁰.

Se si osserva la Figura 51, infatti, si può dedurre che i profili di velocità a distanze variabili dall'imbocco siano fra loro simili. Si pone allora, ricordando quanto sopra trovato per lo spessore dello strato limite δ , la *variabile di similitudine* nella forma:

$$\eta = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{x} \sqrt{\text{Re}_x}$$

La soluzione contemporanea delle equazioni di continuità e della quantità di moto non è agevole e pertanto si cerca di ridurre le due equazioni differenziali ad una sostituendo le variabili u e v con:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La funzione ψ è detta *funzione della traiettoria*²¹ e la posizione precedente verifica immediatamente l'equazione di continuità essendo:

²⁰ Gli anglosassoni indicano questo metodo con il termine *similarity*.

²¹ Ovvero *streamfunction*.

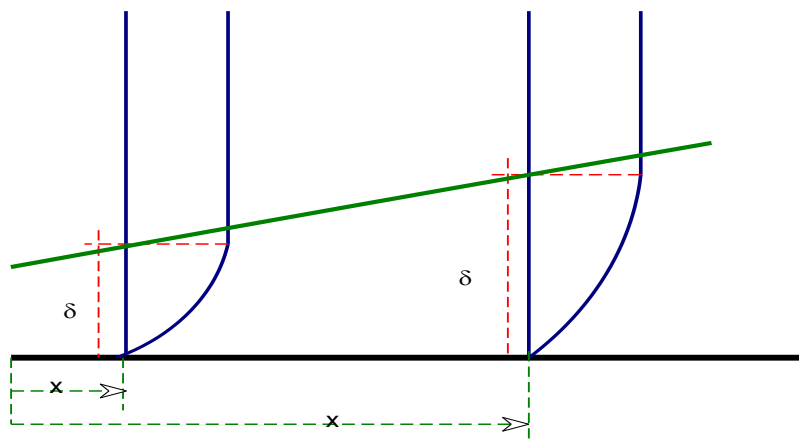


Figura 51: Similitudine dei profili di velocità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

L'equazione di continuità fornisce:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

e sostituendo le precedenti relazioni:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

Le condizioni al contorno sono ora le seguenti:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad y=0$$

$$\psi = 0 \quad \text{per} \quad y=0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow u_{\infty} \quad \text{per} \quad y \rightarrow \infty$$

Ponendo ora:

$$\psi(x, y) = (u_{\infty} \nu x)^{1/2} f(\eta)$$

con $f(\eta)$ funzione incognita allora l'equazione differenziale precedente diviene:

$$2f''' + ff'' = 0 \quad [109]$$

ove si hanno le nuove condizioni al contorno:

$$f' = f = 0 \quad \text{per} \quad \eta = 0$$

$$f' \rightarrow 1 \quad \text{per} \quad \eta \rightarrow \infty$$

L'equazione [109] è ora nella sola variabile f e può essere risolta con sviluppi in serie ottenendo i valori della seguente Tabella 7. Si osservi che vale la relazione:

$$u = u_{\infty} \frac{df}{d\eta}$$

e quindi che il rapporto:

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{df}{d\eta}$$

deve variare da 0 a 0.99 per la stessa definizione di strato limite.

$\eta = y \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}}$	$f(\eta)$	$\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{u_{\infty}}$	$\frac{d^2 f}{d\eta^2}$	$v \sqrt{\frac{x}{\nu u_{\infty}}} = (\eta \frac{df}{d\eta} - f)/2$
0	0	0	0,332	0
0,4	0,027	0,133	0,331	0,013
0,8	0,106	0,265	0,327	0,053
1,2	0,238	0,394	0,317	0,117
1,6	0,420	0,517	0,297	0,204
2,0	0,650	0,630	0,267	0,305
2,4	0,922	0,729	0,228	0,414
2,8	1,231	0,812	0,184	0,521
3,2	1,569	0,876	0,139	0,617
3,6	1,930	0,923	0,098	0,696
4,0	2,306	0,956	0,064	0,758
4,4	2,692	0,976	0,039	0,801
4,8	3,085	0,988	0,022	0,829
4,918	3,202	0,990	0,018	0,833
5,2	3,482	0,994	0,011	0,843
5,6	3,880	0,997	0,005	0,852
6,0	4,280	0,999	0,002	0,857

Tabella 7: Soluzione dell'equazione di Blasius

Dalla Tabella 7 si ricava che per $\frac{df}{d\eta} = 0.99$ si ha $\eta = 0.419$.

Pertanto lo spessore dello strato limite vale:

$$\delta = 4.92 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Inoltre, sempre dalla stessa Tabella 7 si ricava:

$$\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} = 0.332$$

pertanto si può calcolare il *coefficiente di attrito*, C_{fx} dato da:

$$C_{fx} = \frac{\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}}{\frac{\rho u_{\infty}^2}{2}} = 2 \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} \text{Re}_x^{-1/2} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$$

Il valore medio del coefficiente di attrito per la lunghezza L della lastra vale:

$$\overline{C_{fx}} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{fx} dx = 2 C_{fx} = 1.328 \text{Re}_x^{-1/2}$$

5.11 SOLUZIONE DI BLASIUS DELLO STRATO LIMITE TERMICO

Si può procedere allo stesso modo di quanto fatto nel paragrafo precedente per determinare l'andamento dello *strato limite termico* e calcolare il coefficiente di convezione termica.

L'equazione dell'energia:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

può essere riscritta in funzione della nuova variabile:

$$\theta = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}$$

ed assumendo che, per la stessa similitudine del profilo dello strato limite termico, sia:

$$\theta = \theta(\eta)$$

con η variabile di similitudine sopra indicata. La sostituzione porta ad avere la nuova equazione differenziale:

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad [110]$$

ove Pr è il numero di Prandtl del fluido. Le nuove condizioni al contorno sono:

$$\theta(0) = 0 \quad ; \quad \theta(\infty) = 1$$

Nel caso che sia $\text{Pr}=1$ la precedente equazione differenziale è formalmente identica a quella derivata dall'equazione della quantità di moto ove si sostituisca $\theta = df/d\eta$ e quindi con riferimento alla Tabella 7 si ha, per $\eta=0$:

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0.332 \text{Pr}^{1/3}$$

Infine il coefficiente di convezione termica è dato da:

$$h_x = \frac{q''}{T_p - T_\infty} = -\lambda \frac{(T_\infty - T_p)}{T_p - T_\infty} \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \cdot \frac{\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$$

e quindi:

$$h_x = \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \cdot 0.332 \cdot \text{Pr}^{1/3}$$

ovvero anche:

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{\lambda} = 0.332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

Il valore medio del coefficiente di scambio termico per la lunghezza L della lastra è dato da:

$$\overline{h_L} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = 0.332 \frac{\lambda}{L} \text{Pr}^{1/3} \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{1/2} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/2}} = 2h_{x=L} = 0.664 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

5.11.1 ANALOGIA DI COLBURN

Confrontiamo i numeri locali di h_x e C_{fx} allora si può scrivere:

$$\frac{C_{fx}}{2} = 0.332 \text{Re}^{-1/2}$$

$$\text{Nu}_x = 0.332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$$

Combinando le due relazioni e definendo:

$$St_x = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty} = \frac{Nu_x}{Re_x Pr}$$

allora si ha:

$$St_x = 0.332 Re_x^{-1/2} Pr^{-2/3}$$

ossia:

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2}$$

che è la *correlazione di Colburn*. Essa assume grande importanza nella pratica perché lega il numero di Nusselt (nel quale è presente h) con il coefficiente di attrito, C_{fx} , di più agevole determinazione sperimentale. Pertanto da una campagna di misure meccaniche del coefficiente di attrito si possono conoscere i valori del coefficiente di convezione.

5.11.2 LA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO

Per l'applicazione delle relazioni sopra trovate occorre calcolare le proprietà termofisiche alla temperatura di film data dalla media aritmetica fra la temperatura di parete e quella del fluido indisturbato:

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

5.12 SOLUZIONE PER STRATO LIMITE TURBOLENTO DI UNA LASTRA

Per una lastra piana si ha il passaggio dal moto laminare a quello turbolento quando il numero locale di Reynolds supera $5 \cdot 10^5$. Nasce così lo strato subliminare e poi lo strato turbolento totalmente sviluppato. Al di là di $4 \cdot 10^6$ si ha certamente il moto turbolento sviluppato. Lo spessore dello strato limite turbolento è dato dalla relazione:

$$\delta = 0.37 \frac{x}{Re_x^{1/5}}$$

Il coefficiente di attrito vale:

$$C_{fx} = 0.0592 Re_x^{-1/5}$$

Il valore locale del numero di Nusselt vale:

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$$

valida per $0.6 < Pr < 60$. Il valore medio del coefficiente di convezione è dato dalla relazione:

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left(\int_0^{x_{lam}} h_{lam,x} dx + \int_{x_{lam}}^L h_{turb,x} dx \right)$$

Assumendo una transizione per $Re = 5 \cdot 10^5$ allora la precedente relazione porta ad avere:

$$\bar{Nu}_L = \left(0.664 Re_{x,lam}^{1/2} + 0.037 \left(Re_L^{4/5} - Re_{x,lam}^{5/5} \right) \right) Pr^{1/3}$$

che si può ulteriormente ridurre a:

$$\bar{Nu}_L = \left(0.037 Re_L^{4/5} - 871 \right) Pr^{1/3}$$

valida per $5 \cdot 10^5 < Re < 10^8$ e per $0.6 < Pr < 60$.

5.12.1 STRATO LIMITE SU SUPERFICI CILINDRICHE

Nel caso in cui si consideri il deflusso di un fluido sopra superfici cilindriche, vedi Figura 52, allora occorre considerare una forte variabilità delle condizioni locali al variare dell'angolo θ .

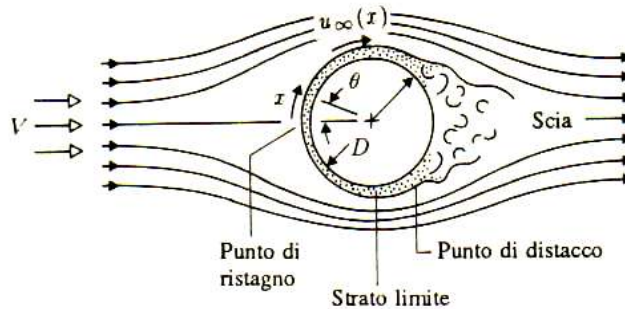


Figura 52: Deflusso sopra superfici cilindriche

Il flusso si mantiene laminare fino a quando $Re < 2 \cdot 10^5$ dopo di che diviene turbolento. Inoltre per valori elevati di Re_D si ha il distacco della vena fluida per un angolo pari a circa 140° . La forza di trascinamento esercitata dal fluido sulla superficie apparente del condotto cilindrico è data dalla relazione:

$$F_D = C_D S \frac{\rho w^2}{2}$$

ove C_D è il fattore di *drag* dato dalla Figura 53. Il coefficiente di convezione locale varia con l'angolo θ secondo quanto rappresentato in Figura 54. Il valore medio sul contorno circolare è dato dalla relazione:

$$\overline{Nu_D} = 0.4 \left(Re_D^{1/2} + 0.06 Re_D^{2/3} \right) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right)^{1/4}$$

valida per $10 < Re < 10^5$ e per $0.6 < Pr < 300$ e $0.25 < \mu_\infty / \mu_s < 5$.

Nel caso di banchi di tubi si utilizza la relazione:

$$\overline{Nu_D} = C Re_D^m Pr^{0.36} \left(\frac{Pr_\infty}{Pr_s} \right)^n$$

con C , m ed n variabili a seconda della geometria e in particolare si ha:

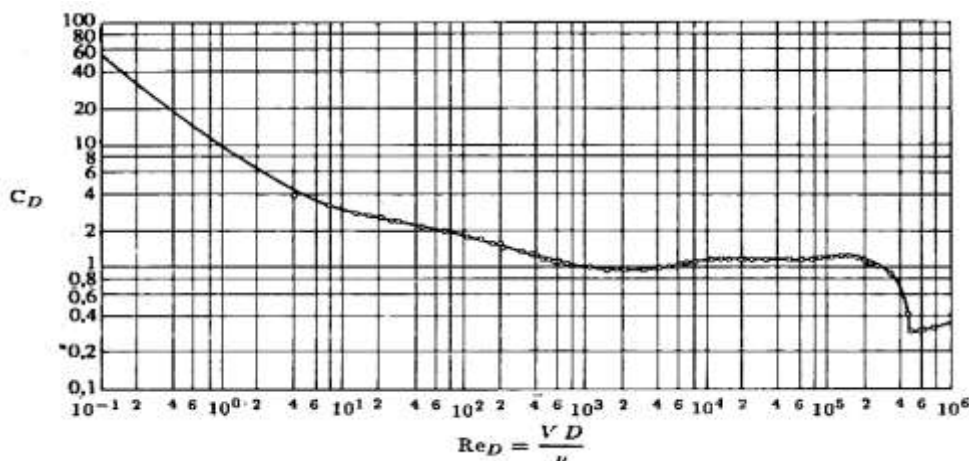


Figura 53: Fattore di Drag

$C=0.4$	per tubi sfalsati e $Re_D < 2 \cdot 10^5$
$M=0.6$	“ “ “ “
$C=0.022$	per tubi sfalsati e $Re_D > 2 \cdot 10^5$
$M=0.84$	“ “ “ “
$C=0.27$	per tubi allineati e $Re_D < 2 \cdot 10^5$
$M=0.63$	“ “ “ “
$C=0.021$	per tubi allineati e $Re_D > 2 \cdot 10^5$
$M=0.84$	“ “ “ “

La caduta di pressione vale:

$$\Delta p = f N \rho \frac{u_{\max}^2}{2} Z$$

con f e Z dati dagli abachi di Figura 55 e Figura 56.

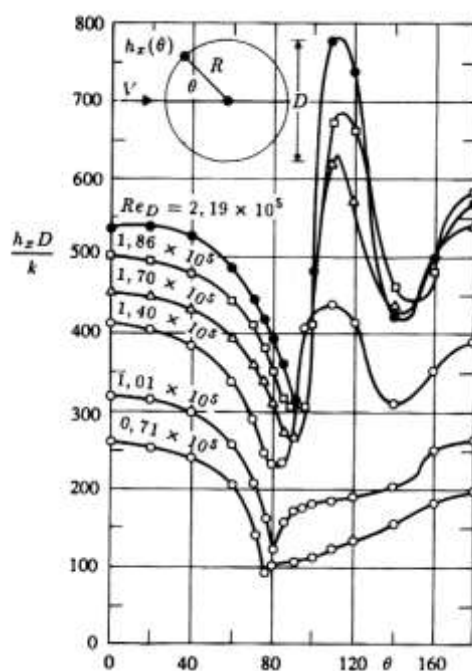


Figura 54: Numero locale di Nusselt

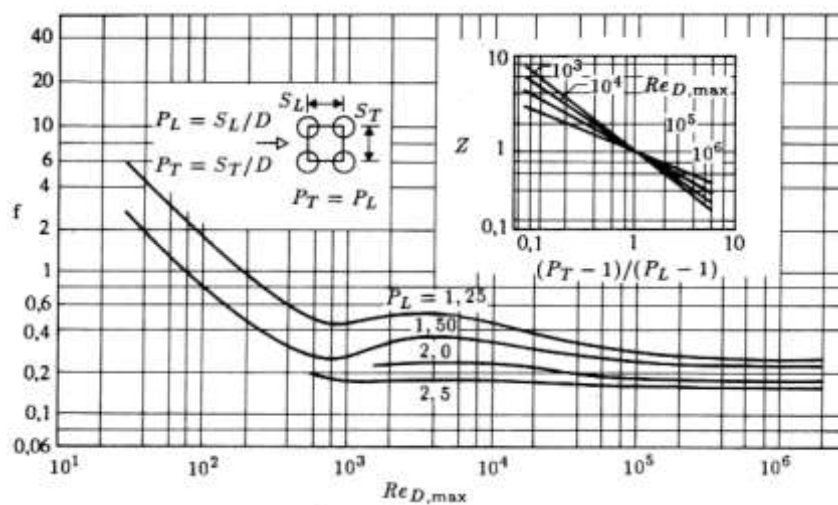
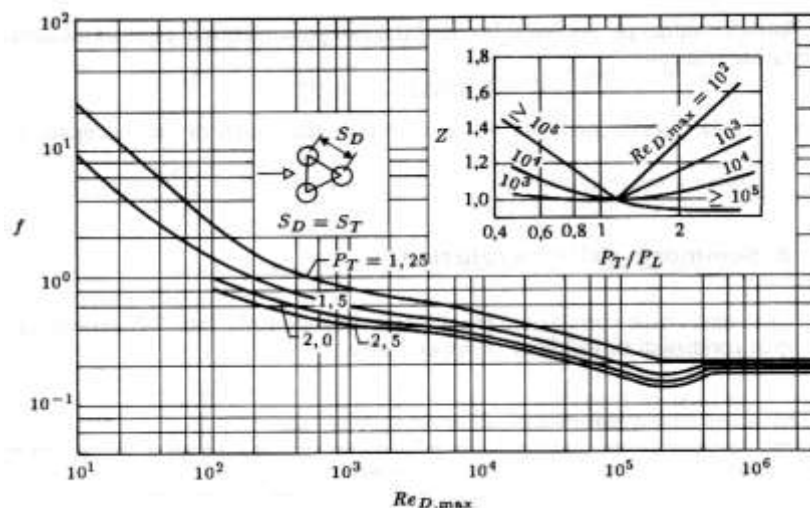


Figura 55: f e Z per passo quadrato

Figura 56: f e Z per passo triangolare

5.13 CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE FORZATA

Nelle prossime figure sono raccolte alcune correlazioni (sia sperimentali che teoriche) derivate per la convezione forzata. Ciascuna di queste correlazioni ha un campo di validità che è segnalato nell'ultima colonna delle tabelle.

Corr. n. Correlazione	Regime di moto	Note
$\delta(x) = 4.92x / \text{Re}_x^{0.5}$	laminare	lastra piana, valori locali
$C_{f_x} = \frac{0.664}{\text{Re}_x^{1/2}}$	laminare	lastra piana, valori locali
$Nu_x = 0,332 \text{ Re}_x^{1/2} \text{ Pr}^{1/3}$	laminare	lastra piana, temp. uniforme $\text{Pr} > 0,6$
$Nu_x = 0,332 \text{ Re}_x^{1/2} \text{ Pr}^{1/3} \cdot \left[1 - \left(\frac{\xi}{x}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}$	laminare	lastra piana, con zona di estensione ξ non riscaldata, temp. uniforme
$C_{f_L} = \frac{1,328}{\text{Re}_L^{1/2}}$	laminare	lastra piana, valore medio
$Nu_L = 0,664 \text{ Re}_L^{1/2} \text{ Pr}^{1/3}$	laminare	lastra piana, valore medio temp. uniforme
$St_x \text{ Pr}^{2/3} = \frac{C_{f_x}}{2}$	laminare	lastra piana, valori locali, temp. uniforme
$C_{f_x} = 0,0592 \text{ Re}_x^{-1/5}$	turbolento	lastra piana, valore locale $5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$
$Nu_x = 0,0296 \text{ Re}_x^{4/5} \text{ Pr}^{1/3}$	turbolento	lastra piana, valore locale temp. uniforme $0,6 \leq \text{Pr} \leq 60, 5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$
$Nu_x = 0,0296 \text{ Re}_x^{4/5} \text{ Pr}^{1/3} \cdot \left[1 - \left(\xi/x\right)^{9/10}\right]^{-1/9}$	turbolento	lastra piana con zona non riscaldata di estensione ξ

Tabella 8: Correlazioni per convezione forzata

Si consiglia di controllare sempre questi campi prima di applicare qualunque correlazione proposta. Le tipologie prese in considerazioni sono numerose e consentono di risolvere numerosi problemi pratici. In ogni caso occorre sempre ricordare che l'obiettivo principale è il numero di *Nusselt*, Nu , nel quale è definito il coefficiente di convezione h cercato.

L'uso delle correlazioni adimensionali risulta molto comodo, anche se all'inizio un po' forviante, perché in questo modo ci si svincola dal sistema di misura e dalle caratteristiche geometriche e topologiche dello scambio convettivo.

Correlazione	Regime di moto	Note
$f = 64 / Re$	laminare	moto complet. sviluppato in tubi circolari
$Nu_D = \frac{48}{11}$	laminare	moto complet. sviluppato in un tubo circolare con flusso termico costante
$Nu_D = 3,66$	laminare	moto complet. sviluppato in un tubo circolare con temper. di parete costante
$\overline{Nu}_D = 3,66 + \frac{0,0668Gz}{1 + 0,04(Gz)^{2/3}}$	laminare	regione di ingresso termica, moto sviluppato, tubo circolare, temp. parete costante

Tabella 9: Correlazioni per convezione forzata

$\overline{Nu} = 0.037(Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3}$	turbolento	lastra piana, valore medio, temp. uniforme $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^8$ $0,6 \leq Pr \leq 60$
$\overline{C}_{f,L} = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1742}{Re_L}$	laminare e turbolento	lastra piana, valore medio temp. uniforme $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^8$
$\overline{Nu} = 0,036(Re_L^{4/5} - 9200) Pr^{0,45} \cdot \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_P}\right)^{1/4}$	laminare e turbolento	lastra piana, valore medio temp. uniforme $10^5 < Re_L < 5,5 \cdot 10^6$ $0,7 \leq Pr \leq 380$
$Nu_x = 0,453 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$	laminare	lastra piana, valore locale flusso termico uniforme
$Nu_x = 1,04(Nu_x)_{T_s=\text{cost}}$	laminare	lastra piana, valore locale flusso termico uniforme ($Pr \geq 0,7$)
$\overline{Nu}_D = (0,4 Re_D^{1/2} + 0,06 Re_D^{2/3}) \cdot Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4}$		moto trasversale su cilindro $0,672 Pr < 300; 10 < Re_D < 10^5$ $0,25 < \mu_\infty / \mu_s < 5,2$
$\overline{Nu}_D = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0,4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \cdot [1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}]^{4/5}$		moto trasversale su cilindro $10^2 < Re < 10^7, Pe_D > 0,2$
$\overline{Nu}_D = C Re_D^m Pr^{0,36} \left(\frac{Pr_\infty}{Pr_s}\right)^n$		banchi di tubi in moto trasversale (v. par. 7.2.3)
$\overline{Nu}_D = C Re_D^{0,8} Pr^{0,4}$		banchi di tubi in moto parallelo (v. par. 7.2.4)

Tabella 10: Correlazioni per convezione forzata

5.14 CONVEZIONE TERMICA LAMINARE NEI CONDOTTI

E' di grande interesse lo studio della convezione termica all'interno di condotti circolari (o assimilabili). Si tratta, infatti, di un vasto campo di possibili applicazioni industriali al quale è opportuno dedicare maggiore attenzione.

Con riferimento alla Figura 57 si può osservare che lo strato limite dinamico cresce dall'imbocco fino al congiungimento sull'asse del condotto. La lunghezza corrispondente è denominata *lunghezza di imbocco* e si dimostra che, per il regime laminare, vale la relazione:

$$\frac{x_e}{D} = 0.05 \text{Re}_D$$

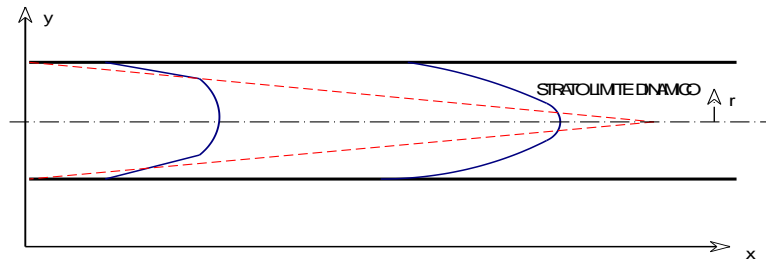


Figura 57: Strato limite dinamico in un condotto circolare

$\overline{Nu} = 0.037(\text{Re}_L^{4/5} - 871) \text{Pr}^{1/3}$	turbolento	lastra piana, valore medio, temp. uniforme $5 \cdot 10^5 < \text{Re}_L < 10^8$ $0.6 \leq \text{Pr} \leq 60$
$\overline{C}_{f,L} = \frac{0.074}{\text{Re}_L^{1/5}} - \frac{1742}{\text{Re}_L}$	laminare e turbolento	lastra piana, valore medio temp. uniforme $5 \cdot 10^5 < \text{Re}_L < 10^8$
$\overline{Nu} = 0.036(\text{Re}_L^{4/5} - 9200) \text{Pr}^{0.45} \cdot \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_P}\right)^{1/4}$	laminare e turbolento	lastra piana, valore medio temp. uniforme $10^5 < \text{Re}_L < 5.5 \cdot 10^6$ $0.7 \leq \text{Pr} \leq 380$
$Nu_x = 0.453 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$	laminare	lastra piana, valore locale flusso termico uniforme
$Nu_x = 1.04(Nu_x)_{T_s=\text{cost}}$	laminare	lastra piana, valore locale flusso termico uniforme ($\text{Pr} \geq 0.7$)
$\overline{Nu}_D = (0.4 \text{Re}_D^{1/2} + 0.06 \text{Re}_D^{2/3}) \cdot \text{Pr}^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4}$		moto trasversale su cilindro $0.672 \text{Pr} < 300; 10 < \text{Re}_D < 10^5$ $0.25 < \mu_\infty/\mu_s < 5.2$
$\overline{Nu}_D = 0.3 + \frac{0.62 \text{Re}_D^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{[1 + (0.4/\text{Pr})^{2/3}]^{1/4}} \cdot [1 + (\frac{\text{Re}_D}{282000})^{5/8}]^{4/5}$		moto trasversale su cilindro $10^2 < \text{Re} < 10^7, \text{Pe}_D > 0.2$
$\overline{Nu}_D = C \text{Re}_D^m \text{Pr}^{0.36} \left(\frac{\text{Pr}_\infty}{\text{Pr}_s}\right)^n$		banchi di tubi in moto trasversale (v. par. 7.2.3)
$\overline{Nu}_D = C \text{Re}_D^{0.8} \text{Pr}^{0.4}$		banchi di tubi in moto parallelo (v. par. 7.2.4)

Tabella 11: Correlazioni per convezione forzata

Ove x_e è la lunghezza di imbocco anzidetta e Re_D è il numero di Reynolds riferito al diametro del condotto. La velocità media del fluido può agevolmente essere calcolata mediante la relazione:

$$\bar{u} = \frac{\dot{m}}{\rho S} = \frac{1}{S} \int_S u(x, r) dS = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(x, r) r dr$$

Nel caso di moto laminare il profilo di velocità nel regime sviluppato è di tipo parabolico e rimane costante lungo la direzione di moto.

Ciò significa che deve essere $v=0$ e $\partial u / \partial x = 0$. Per ricavare il profilo di velocità possiamo utilizzare l'equazione della quantità di moto delle A) riscritta in coordinate cilindriche:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

In base alle considerazioni che sono $v=0$ e $\partial u / \partial x = 0$ allora si ha:

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

la quale, integrata, fornisce l'integrale generale:

$$u = \left(\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Le costanti di integrazioni si calcolano con le condizioni al contorno:

$$(u)_{r=R} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0} = 0$$

Ne segue:

$$u = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

che è l'equazione del profilo di velocità cercata. Per $r=0$ si ha la velocità massima:

$$u_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right)$$

Si osservi che il rapporto fra la velocità media e quella massima vale, per quanto trovato in precedenza:

$$\frac{u_{\max}}{\bar{u}} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Per la relazione di *Darcy – Weisbach* la caduta di pressione specifica vale:

$$-dp = \xi \frac{dx}{D} \frac{\bar{u}^2}{2} \rho$$

pertanto, anche in base all'espressione della velocità media dianzi calcolata, possiamo calcolare il *fattore di attrito*:

$$\xi = \frac{-\left(\frac{dp}{dx} \right) D}{\rho \frac{\bar{u}^2}{2}}$$

e quindi: $\xi = \frac{64}{Re_D}$

$\overline{Nu}_D = 1,86(Gz)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14}$	laminare	Regione di ingresso termica e fluidodinamica, tubo circolare, temp. parete costante $0,48 < Pr < 16700$ $Gz^{1/2} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} > 2$
$f = 0,184 / Re^{0,2}$	turbolento	Tubi lisci, moto compl. svil. $2 \cdot 10^4 < Re < 3 \cdot 10^5$
$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[\left(\varepsilon/3,7D \right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re_D} \right]$	turbolento	tubi scabbi $Re > 2 \cdot 10^4$
$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{1/3}$	turbolento	tubi lisci $0,7 < Pr < 160$ $Re > 10^4$, $L/D > 60$
$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n$ $n = 0,4$ riscaldamento $n = 0,3$ raffreddamento	turbolento	tubi lisci $0,7 < Pr < 160$ $Re > 10^4$, $L/D > 60$
$Nu = 0,027 Re^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14}$	turbolento	tubi lisci $0,7 Pr < 16700$ $Re > 10^4$, $L/D > 60$
$Nu = \frac{(f/8) Re Pr}{1,07 + 12,7 \sqrt{f/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^n$	turbolento	tubi lisci o scabbi $10^4 < Re < 5 \cdot 10^6$ $0,5 < Pr < 200$
$n = 0,11$ riscaldamento con T_p uniforme $n = 0,25$ raffreddamento con T_p uniforme $n = 0$ flusso termico uniforme o gas		
$Nu = 0,036 Re^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{D}{L} \right)^{0,055}$	turbolento	$10 < L/D < 400$
$Nu = 5 + 0,025 Pe_D^{0,8}$	turbolento	metalli liquidi, tubi circolari flusso termico unif. alla parete
$Nu = 4,82 + 0,0185 Pe^{0,827}$	turbolento	metalli liquidi, tubi circolari, flusso termico uniforme alla parete $3,6 \cdot 10^3 < Re < 9,05 \cdot 10^5$ $10^2 < Pe < 10^4$, $L/D > 60$
$Nu = 3,3 + 0,02 Pe^{0,8}$	turbolento	metalli liquidi, tubi circolari temperatura uniforme $L/D < 60$, $Pe > 100$
$Nu = 6,3 + 0,0167 Re^{0,85} Pr^{0,93}$	turbolento	metalli liquidi temp. parete uniforme tubi circolari $Pr < 0,03$

Tabella 12: Correlazioni per convezione forzata

Anche lo strato limite termico si sviluppa all'interno del condotto con andamento simile a quello delle velocità. La lunghezza di imbocco termica, x_t , può essere calcolata, nel caso di parete riscaldata (T imposta) fin dall'inizio, con la relazione:

$$\frac{x_t}{D} = 0.033 Re_D Pr$$

Nel caso di flusso imposto fin dall'inizio vale la relazione:

$$\frac{x_t}{D} = 0.043 \text{Re}_D \text{Pr}$$

I coefficienti di convezione possono essere calcolati, nei due casi di $q'' = \text{cost}$ e di $T = \text{cost}$, mediante le relazioni:

$$\text{Nu}_D = 4,36 \quad \text{per } q'' = \text{cost}$$

e:

$$\text{Nu}_D = 3.66 \quad \text{per } T = \text{cost}$$

Nella regione di ingresso, con strato limite termico ancora non stabilizzato, si hanno le relazioni:

$$\frac{x}{\text{Re}_D \text{Pr} R} = 2Gz^{-1}$$

$$\text{con } Gz = \frac{\text{Re}_D \text{Pr} D}{x}.$$

Una correlazione valida nel caso di contemporaneo sviluppo degli strati limiti dinamico e termico è la seguente (*Sieder – Tate*):

$$\overline{\text{Nu}} = 1.86 (Gz)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14}$$

$$\text{valida per } T_0 = \text{cost, per } 0.5 < \text{Pr} < 16700, 0.0044 < \frac{\mu_m}{\mu_p} < 0.75 \text{ e per } (Gz)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} > 2.$$

5.14.1 CONDOTTI A SEZIONE NON CIRCOLARE

In questo caso si opera con le stesse relazioni viste per i condotti circolari ma con un diametro *equivalente* (ai fini della portata²²) dato dalla relazione:

$$D_{eq} = \frac{4 \cdot S_{passaggio}}{C_{bagnato}}$$

ove con $S_{passaggio}$ si intende l'area di passaggio del fluido e con $C_{bagnato}$ il contorno bagnato.

E' sempre bene applicare alla lettera questa definizione, specialmente in quei casi nei quali l'area di passaggio è virtuale (cioè formata da più contorni) come, ad esempio, per il flusso all'esterno dei condotti negli scambiatori di calore, come illustrato in Figura 58.

In questo caso l'area di passaggio è virtuale ed è pari al prodotto dei passi longitudinale e trasversale diminuita di 4 quarti di area dei condotti circolari e il contorno bagnato è pari a 4 quarti di circonferenza dei condotti:

$$D_{eq} = \frac{L \cdot T - \pi D^2 / 4}{\pi D}$$

Allo stesso modo si calcola il diametro equivalente per una sezione rettangolare.

²² In alcuni casi (vedi reti tecnologiche per le quali si rimanda la volume 3°) si definisce un diametro equivalente a parità di perdite di pressione. L'espressione ottenuta è notevolmente diversa ed è data da: $d_{eq,pp} = 1,3 \frac{(a \cdot b)^{0.625}}{(a + b)^{0.25}}$.

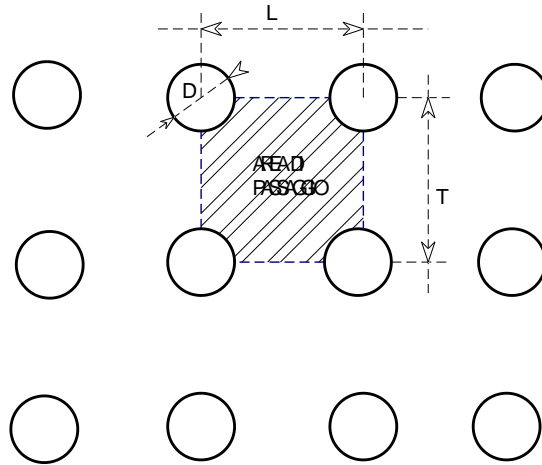


Figura 58: Calcolo del diametro equivalente per uno scambiatore di calore

In Figura 59 si hanno due casi: un condotto rettangolare con lati dello stesso ordine di grandezza ed un condotto con una dimensione prevalente sull'altra.

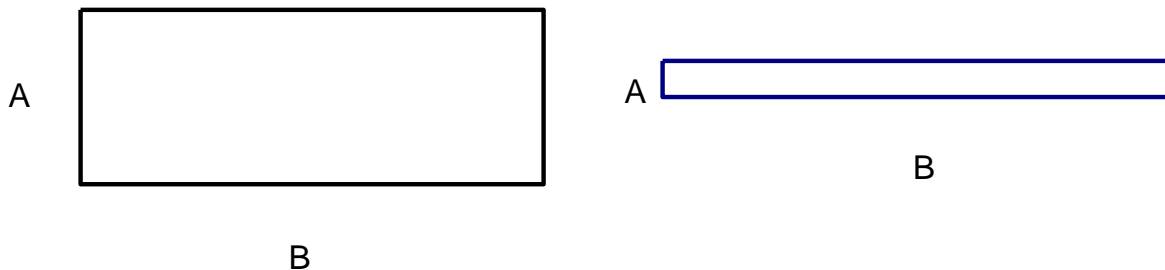


Figura 59: Diametro equivalente per condotti rettangolari

Applicando la definizione di diametro equivalente si ha:

$$D_{eq} = \frac{4(B \cdot A)}{2(B + A)}$$

Nel caso di sezione ristretta (a destra della Figura 59) allora essendo $A \ll B$ si ottiene:

$$D_{eq} = \frac{4(B \cdot A)}{2(B + A)} \approx \frac{4(BA)}{2B} \approx 2A$$

Quindi una sezione rettangolare ristretta ha un diametro equivalente pari alla somma delle dimensioni minori e ciò risulta penalizzante per le perdite di pressione secondo la relazione di Darcy Weissbach:

$$-\Delta p = \xi \frac{L}{D_{eq}} \frac{w^2}{2} \rho$$

Ai fini degli scambi termici, però, la presenza di spigoli acuti cambia le modalità operative e in particolare si osserva che il coefficiente di convezione si annulla in corrispondenza degli spigoli.

In Tabella 13 si hanno i numeri di Nusselt per varie configurazioni geometriche sia per temperatura imposta che per flusso imposto.

5.15 CONVEZIONE TERMICA NEI CONDOTTI IN REGIME TURBOLENTO

La transizione fra regime laminare e turbolento avviene, com'è noto dallo studio dei fluidi reali, quando il numero di Reynolds supera 2900 (meglio considerare 4000 nelle applicazioni pratiche).

La *lunghezza di imbocco* per lo sviluppo completo dello strato limite dinamico è data dalla relazione:

$$10 \leq \frac{x_{e,t}}{D} \leq 60$$

In genere si assume che la lunghezza di imbocco sia pari ad almeno 60 diametri del condotto.

Il coefficiente di attrito, C_f , è dato da:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = 2 \left(\frac{v^*}{u_m} \right)^2 = \frac{2}{(u_m^+)^2}$$

ove, si ricorsi dallo studio dei profili universali di velocità, si è posto:

$$v^* = \left(\frac{\tau_s}{\rho} \right)^{0.5}$$

$$u_m^+ = \frac{u_m}{v^*}$$

ed infine:

$$y^+ = \frac{u_m^+ y}{\nu}$$

con u_m velocità media del fluido all'interno del condotto.

Valori del numero di Nusselt e del coefficiente di attrito per il moto laminare completamente sviluppato in condotti di varia sezione.


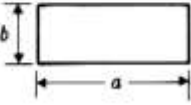


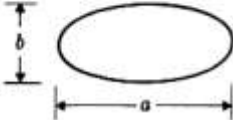
Forma della sezione		Nu_h ($q'' = \text{cost}$)	Nu_h ($T_p = \text{cost}$)	$C_f \cdot Re_h$
		4,36	3,66	16,00
 $a/b =$	1	3,61	2,98	14,23
	2	4,12	3,39	15,55
	3	4,79	3,96	17,09
	4	5,33	4,44	18,23
	6	6,05	5,14	19,70
	8	6,49	5,60	20,58
	∞	8,24	7,54	24,00
		4,00	3,34	15,05
 $\theta =$	10°	2,45	1,61	12,47
	30°	2,91	2,26	13,07
	60°	3,11	2,47	13,33
	90°	2,98	2,34	13,15
	120°	2,68	2,00	12,74
 $a/b =$	1	4,36	3,66	16,00
	2	4,56	3,74	16,82
	4	4,88	3,79	18,24
	8	5,09	3,72	19,15
	16	5,18	3,65	19,54

Tabella 13: Numeri di Nusselt per varie tipologie di condotti

Per il moto turbolento si assume valida la relazione:

$$u^+ = 2.5 \ln(y^+) + 5$$

Al variare di y (distanza dalla parete) si può calcolare y^+ e quindi il valore medio di u_m^+ vale:

$$u_m^+ = 2.5 \ln \left(\frac{R}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \right) + 1.75$$

Tenendo conto della definizione del coefficiente di attrito, C_f si ha, dopo alcuni passaggi:

$$u_m^+ = 2.5 \ln \left(\text{Re}_D \sqrt{C_f} \right) - 0.85$$

Essendo $\xi = 4C_f$ allora dalla precedente relazione si ricava:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2.035 \log \left(\text{Re} \sqrt{\xi} \right) - 0.6$$

che è la relazione di Prandtl. Weissbach ha trovato una relazione comoda nelle applicazioni:

$$\xi = 0.184 \cdot \text{Re}^{-0.2}$$

valida per tubi lisci con $10000 < \text{Re} < 300000$. Per condotti rugosi si hanno altre relazioni che tengono conto della scabrezza relativa.

Si ricordano quella di *Colebrook* (vedi volume sui fluidi reali):

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = -2.0 \log \left[\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\xi}} \right]$$

con ε scabrezza assoluta.

Questa relazione è scomoda da utilizzare perché fornisce ξ in forma implicita e quindi occorre ricorrere ad calcoli ricorsivi. Meglio usare la nuova correlazione di *Haaland* che, oltre ad essere esplicita, fornisce valori con errori entro l'1.5% rispetto alla correlazione di *Colebrook*:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}_D} \right]$$

5.15.1 CORRELAZIONE DI COLBURN PER MOTO TURBOLENTO

Dalle equazioni dello strato limite per regime turbolento, C), in vicinanza della parete si ha (come già visto per la derivazione dei profili universali di velocità) dall'equazione della quantità di moto:

$$\left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = \frac{\tau_s}{\rho}$$

e dall'equazione dell'energia:

$$\left[(a + \varepsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = \frac{-q''_s}{\rho c_p}$$

Quest'ultima può essere scritta nella forma:

$$\left[\left(\frac{\nu}{\text{Pr}} + \frac{\varepsilon_M}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = \frac{-q''_s}{\rho c_p}$$

con $Pr_t = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H}$. Nel caso in cui $Pr = Pr_t = 1$ allora le due relazioni sono formalmente eguali e quindi si può ritenere ancora valida la correlazione di *Colburn* ricavata per moto laminare:

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2}$$

Con riferimento al fattore di attrito di *Darcy*, essendo $f = 4 C_p$ si ha:

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{f}{8}$$

che, per la relazione di *Weissbach*, diviene:

$$St_x Pr^{2/3} = 0.023 Re^{-0.2}$$

dalla quale si ricava il numero di Nusselt:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3}$$

valida per tubi lisci con $0.7 < Pr < 150$, $Re > 10000$, $L/D > 60$. Per il moto turbolento nei condotti si hanno altre correlazioni sperimentali molto buone e in particolare quella di *Dittus – Boelter*:

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$$

con n pari a 0.4 nel caso di riscaldamento ($T_p > T_m$) ed $n=0.3$ per raffreddamento e con gli stessi limiti per Re e Pr della relazione precedente. Una correlazione molto usata è quella di *Sieder Tate*:

$$Nu = 0.027 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14}$$

che tiene conto della variabilità della viscosità alla temperatura di parete e alla temperatura media del fluido. Valida è anche la relazione di *Petukhov*:

$$Nu = \frac{\left(\frac{f}{8} \right) Re Pr}{1.07 + 12.7 \sqrt{\frac{f}{8} (Pr^{2/3} - 1)}} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^n$$

con n pari a 0.11 per riscaldamento uniforme a temperatura costante, 0.25 per raffreddamento uniforme a T costante ed pari a 0 per flusso termico imposto.

Nella zona di profilo di velocità non sviluppato si può usare la relazione di *Nusselt*:

$$Nu = 0.036 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{D}{L} \right)^{0.055}$$

valida per $10 < D/L < 400$.

Per condotti a sezione non circolare si può applicare quanto detto per i diametri equivalenti ai fini del calcolo delle perdite di pressione ma occorre apportare correzioni per il calcolo del coefficiente di convezione che dipende fortemente dalle condizioni locali e della presenza degli spigoli.

5.16 SCAMBIO TERMICO CON I METALLI LIQUIDI

I metalli liquidi sono caratterizzati da una elevata conducibilità termica e quindi da numeri di Prandtl ($Pr = c_p \mu / \lambda$) molto piccoli ($\ll 1$). Pertanto le correlazioni viste in precedenza non risultano più valide, come indicato anche dalle condizioni di interpolazione sempre riportate. I metalli liquidi, inoltre, sono in grado di trasmettere calore anche se non in movimento proprio per l'elevata conducibilità termica.

Ai fini del calcolo del coefficiente di convezione termica occorre modificare la forma matematica delle correlazioni utilizzate. In particolare si dimostra che le correlazioni di scambio sono della forma:

$$Nu = C_1 + C_2 (\text{Re Pr})^n$$

e ponendo $Pe = \text{Re Pr}$ (numero di *Peclet*) si ha anche la forma:

$$Nu = C_1 + C_2 Pe^n$$

Sabbotin suggerisce la correlazione:

$$Nu = 5 + 0.25 Pe^{0.8}$$

Per le leghe sodio – potassio (dette leghe NaK) si può usare la correlazione di *Skupinski*:

$$Nu = 4.82 + 0.0185 Pe^{0.827}$$

valida per $\text{Re} < 900000$, $100 < Pe < 10000$ e $L/D > 60$.

5.16.1 ALGORITMO DI CALCOLO PER LA CONVEZIONE FORZATA

Quanto detto in precedenza sulla convezione forzata prospetta una metodologia di risoluzione che qui possiamo riassumere nei seguenti punti fondamentali.

Determinazione delle proprietà termofisiche

Le proprietà termofisiche del fluido dipendono dalla temperatura e pertanto sorge subito la difficoltà di doverle determinare per un campo di temperature che spesso ha gradienti elevati.

Di solito si determinano alla temperatura media fra quella di parete e quella del fluido fuori dallo strato limite termico, detta anche *temperatura di film*:

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

Determinazione dei numeri di Reynolds e di Prandtl

Il numero di Reynolds è determinato nota la velocità, u_∞ (in genere quella del fluido non disturbato) e il parametro geometrico (x o D) e la viscosità cinematica del fluido alla temperatura di film. Il numero di Prandtl lo si calcola allo stesso modo o lo si ricava dai dati termofisici in forma tabellare o funzionale del fluido alla temperatura di film.

Utilizzo delle correlazioni di calcolo per la determinazione di Nu

In precedenza si sono dimostrate numerose correlazioni fra Nu e Re e Pr. Nelle tabelle del §5.13 se ne elencano alcune decine. La scelta della correlazione da utilizzare per calcolare Nu (e quindi il coefficiente di convezione termica) va fatta tenendo conto delle condizioni di validità indicate per ciascuna correlazione (cioè intervalli possibili per Re e per Pr) e al tipo di regime di moto (laminare o turbolento) che è possibile conoscere noto Re.

Calcolo del flusso termico

Tramite la correlazione di scambio si trova Nu e quindi, noto il parametro geometrico di similitudine, L , e il coefficiente di conducibilità del fluido alla temperatura di film, λ , si determina h :

$$h = \frac{Nu \cdot \lambda}{L}$$

Pertanto, note le temperature di parete e di fluido indisturbato, si calcola il flusso termico:

$$q'' = h(T_p - T_\infty)$$

Calcolo degli sforzi di attrito

Si è visto nei paragrafi precedenti come calcolare C_{fx} o anche il valore medio globale per varie condizioni geometriche e di moto.

Noto questo coefficiente si può calcolare lo sforzo tangenziale, τ , o le perdite per attrito.

6 CONVEZIONE NATURALE

La convezione naturale presenta difficoltà aggiuntive nella risoluzione delle equazioni della strato limite rispetto alla convezione forzata. In questo caso, infatti, le equazioni della quantità di moto (che ora riscriveremo) e dell'energia risultano *accoppiate* poiché la temperatura compare anche nella prima equazione.

La convezione naturale si può definire la vera convezione nel senso che il moto del fluido (e quindi il trasporto di materia ed energia) è conseguente al campo di temperature che si stabilisce nel fluido stesso.

Senza differenze di temperature il fluido non si muove e quindi si annulla la convezione termica naturale. La forza di spostamento (*driving force*) è determinata dallo squilibrio causato dalla forza di gravità fra le masse riscaldate (più leggere) e quelle fredde (solitamente più pesanti). Pertanto la differenza di densità, generata dalla differenza di temperature, genera il moto convettivo.

Oltre al campo gravitazionale terrestre nelle applicazioni si utilizzano anche campi artificiali, come avviene, ad esempio, per il raffreddamento delle palette delle turbine per il quale si sfrutta il campo di forze centrifughe generato dalla rotazione dei rotori.

La convezione naturale genera campi di velocità solitamente meno intensi di quelli in convezione forzata dove tali campi sono imposti dall'esterno in modo del tutto indipendente dal campo di temperatura.

Anche se la convezione forzata produce scambi termici più intensi per i più elevati coefficienti di convezione, la convezione naturale è fondamentale nei processi naturali (climatologia terrestre, riscaldamento naturale dei corpi, impiantistica, ...) e deve sempre essere presa in considerazione quale unico metodo di scambio in condizioni di emergenza quando il fluido non viene mosso da organi esterni.

Così, ad esempio, il radiatore di una autovettura funziona meglio quando la vettura è in movimento e ad alte velocità deve scambiare con l'aria ambiente più calore ma ha anche migliori condizioni di scambio termico.

Pertanto le condizioni più critiche si hanno a vettura ferma quando il flusso dell'aria di raffreddamento è generato dalla sola convezione naturale. E' a quel punto che parte la ventola supplementare di raffreddamento!

Un impianto termico (*nucleare o convenzionale*) ha le condizioni di criticità quando si fermano le pompe di circolazione. Un circuito elettronico ha le condizioni peggiori quando si ferma (o manca, come avviene nei portatili) la ventola di raffreddamento.

Equazione di continuità

L'equazione di continuità per la convezione naturale rimane invariata rispetto a quanto visto per la convezione forzata:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Equazione della quantità di moto

Le equazioni della quantità di moto deve ora contenere la forza unitaria X corrispondente alla forza di gravità. Proiettando sull'asse x l'equazione:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{D\tau} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F}$$

otteniamo, all'interno degli strati limiti:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g$$

che, come si osserva dall'ultimo termine a secondo membro, contiene un termine, $g\beta(T - T_\infty)$, che dipende dalla temperatura ed è detto *alleggerimento termico* (o anche, *thermal buoyancy*).

Equazione dell'energia

Anche questa equazione resta invariata rispetto a quella trovata per lo strato limite laminare per la convezione forzata:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Il termine dissipativo può trascurarsi a maggior ragione poiché il campo di velocità è meno intenso e pertanto l'equazione diviene:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

6.1 ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE PER LA CONVEZIONE NATURALE

Seguendo un procedimento già visto per la convezione forzata nel §5.5.2 cerchiamo di conoscere i parametri fondamentali per la convezione naturale adimensionalizzando le tre equazioni sopra scritte per lo strato limite laminare. Si pongano le seguenti variabili, indicando con u_0 una velocità di riferimento di comodo:

$$x^* = \frac{x}{L} ; y^* = \frac{y}{L}$$

$$u^* = \frac{u}{u_0} ; v^* = \frac{v}{u_0}$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho u_0^2}$$

allora le equazioni dello strato limite sopra scritte divengono:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)LT^*}{u_0^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

ove si ha $\text{Re} = u_0 L / \nu$. Il gruppo adimensionale a secondo membro dell'equazione della quantità di moto può essere scritto nella forma:

$$\frac{g\beta(T_p - T_\infty)LT^*}{u_0^2} = \frac{Gr}{\text{Re}^2} \cdot T^*$$

ove si è posto il nuovo gruppo adimensionale, detto di Grashoff:

$$\frac{g\beta(T_p - T_\infty)L^3}{\nu^2} = Gr$$

definiamo ora una velocità caratteristica del moto data dalla relazione:

$$u_c = \sqrt{g\beta L(T_p - T_\infty)}$$

allora il numero di Grashoff può essere scritto nella forma:

$$Gr = \left(\frac{u_c L}{\nu} \right)^2 = Re^2$$

che conferisce a Gr il significato di un quadrato di un numero di Reynolds riferito alla velocità caratteristica u_c .

Se ora poniamo $u_0 = u_c$ allora le equazioni adimensionalizzate dello strato limite divengono:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = T^* + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Ricordando che deve sempre essere per il coefficiente di convezione termica:

$$h = \frac{-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{(T_p - T_f)}$$

ne segue che il numero di Nusselt, Nu, dipende nella convezione naturale solamente da Gr e Pr e non più da Re.

Pertanto le relazioni funzionali saranno del tipo:

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

In molti casi, specialmente per i gas e l'aria, la dipendenza si semplifica nella forma:

$$Nu = f(Gr \cdot Pr) = f(Ra)$$

ove si è indicato il numero di Rayleigh:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g\beta L^3 (T_p - T_\infty)}{\nu \alpha}$$

Si osservi che avendo trovato l'equivalenza $Gr = Re^2$, con riferimento alla velocità caratteristica, allora si può dire che il peso della convezione naturale (per altro sempre presente) è sensibile quando il rapporto $\frac{Gr}{Re^2}$ è $\gg 1$.

Nel caso in cui è $\ll 1$ prevale la convezione forzata mentre se è circa 1 i due modi sono equivalenti.

Si osservi che quanto sopra ricavato per la lastra piana verticale vale in tutti i casi nei quali si considera la convezione naturale.

6.1.1 ANALISI ADIMENSIONALE PER LA CONVEZIONE NATURALE

Si vuole qui riportare il procedimento seguito con l'analisi adimensionale (applicazione del teorema di *Buckingham*) per la determinazione delle tipologie delle correlazioni per la convezione naturale.

I parametri che intervengono nel fenomeno della *convezione* sono visibili nelle equazioni dello strato limite prima scritte e pertanto si può affermare che il coefficiente di convezione h è funzione delle seguenti variabili:

$$h = h(\rho, \mu, g \beta \Delta T, l, c_p, \lambda) \quad [111]$$

ove il prodotto $g \beta \Delta T$ esprime l'*alleggerimento termico* prodotto dalla differenza di temperatura fra parete e fluido e gli altri simboli hanno il significato già noto.

Per il teorema di *Buckingham* (o teorema *pi-greco*) si dimostra che se una grandezza \mathbf{k} dipende da \mathbf{m} altre variabili e se è possibile scegliere \mathbf{n} **variabili indipendenti** allora la variabile \mathbf{k} si può porre in funzione di $\mathbf{m-n}$ gruppi adimensionali.

Nel caso in esame h è variabile dimensionale e il numero complessivo di variabili in gioco è pari a 7, pertanto se si scelgono come grandezze indipendenti quelle relative al *Sistema Internazionale*, **metro (m)**, **chilogrammo (kg)**, **secondo (s)**, **grado Kelvin (K)** allora si può scrivere una relazione funzionale fra $7-4=3$ gruppi adimensionali la cui determinazione segue un procedimento analitico relativamente semplice che qui si desidera accennare.

Se la [111] è valida si supponga di avere un legame funzionale di tipo monomio in modo che si possa scrivere una relazione del tipo:

$$h = C \rho^a \mu^b (g \beta \Delta T)^c l^d c_p^e \lambda^f \quad [112]$$

Per il principio di omogeneità le dimensioni di ambo i membri di questa eguaglianza debbono essere uguali.

Pertanto se esprimiamo nel S.I. (che ha le seguenti unità di misura fondamentali: M,L,T, θ) le dimensioni di tutti i parametri sopra indicati abbiamo i seguenti sviluppi:

$$\begin{aligned} [l] &= [L] \\ [g \beta \Delta T] &= [\theta^{-1} L T^{-2} \theta] = [L T^{-2}] \\ [\rho] &= [M L^{-3}] \\ [\mu] &= [M L^{-1} T^{-1}] \\ [\lambda] &= [M L T^{-3} \theta^{-1}] \\ [c_p] &= [L^2 T^{-2} \theta^{-1}] \\ [h] &= [M T^{-3} \theta^{-1}] \end{aligned}$$

Pertanto la [112] diviene:

$$[M T^{-3} \theta^{-1}] = C [M L^{-3}]^a [M L^{-1} T^{-1}]^b [L T^{-2}]^c [L]^d [L^2 T^{-2} \theta^{-1}]^e [M L T^{-3} \theta^{-1}]^f \quad [113]$$

Possiamo ora imporre che quanto presente per ciascuna unità di misura a primo membro deve essere uguale al secondo membro e cioè che si possa scrivere il seguente sistema dimensionale:

$$\begin{cases} 0 = -3a - b + c + d + 2e + f & \text{per } L \\ 1 = a + b + f & \text{per } M \\ -3 = -b - 2c - 2e - 3f & \text{per } T \\ -1 = -e - f & \text{per } \theta \end{cases} \quad [114]$$

Ne consegue che, essendo la caratteristica del sistema pari a $6-4=2$ (7 variabili pari al numero degli esponenti e quindi pari ai parametri da cui dipende h , 4 unità indipendenti del S.I.) ne segue, per il teorema di *Rouché e Capelli*, che le soluzioni possibili sono ∞^2 .

Basta scegliere due delle variabili come indipendenti e risolvere il sistema per esse. Trovate le soluzioni si trova che la [112] assume la forma:

$$h = \frac{\lambda}{l} \left(\frac{c_p \mu}{\lambda} \right)^m \left(\frac{\rho^2 g \beta \Delta T l^3}{\mu^2} \right)^n \quad [115]$$

Si possono riconoscere i seguenti gruppi adimensionali:

$$\begin{aligned} \cdot \quad \text{Numero di } \mathbf{Nusselt} \text{ definito da: } Nu &= \frac{hl}{\lambda} = \frac{\frac{l}{h}}{\frac{\lambda}{h}} = \frac{\text{Resistenza termica per conduzione}}{\text{Resistenza termica per convezione}} \\ \cdot \quad \text{Numero di } \mathbf{Prandtl} \text{ definito da: } Pr &= \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{\frac{c_p}{\lambda}} = \frac{\text{Diffusività meccanica}}{\text{Diffusività termica}} \end{aligned}$$

$$\text{Numero di } \mathbf{Grashoff} \text{ definito da: } Gr = \frac{g \beta \Delta T \rho^2 l^3}{\mu^2} \quad \text{equivalente a Reynolds}^2$$

La relazione funzionale [115] diviene, quindi:

$$Nu = C Pr^m Gr^n \quad [116]$$

con C, m, n determinate sperimentalmente mediante *best fit*.

Si tratta del tipo di relazione visto in precedenza mediante l'adimensionalizzazione delle equazioni dello strato limite. In genere per fluidi aeriformi gli esponenti m ed n coincidono e pertanto si hanno correlazioni del tipo:

$$Nu = C (Gr \cdot Pr)^n = C \cdot Ra^n \quad [117]$$

ove si è indicato con Ra il numero di **Rayleigh** dato da:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \beta \Delta T l^3 \rho^2}{\mu^2} \cdot \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{g \beta \Delta T l^3 \rho^2 c_p}{\mu \lambda} \quad [118]$$

6.1.2 PROFILO DI TEMPERATURA NELLO STRATO LIMITE TERMICO

Possiamo ancora una volta supporre che il profilo di velocità e di temperatura adimensionale siano polinomiali e cioè che si possa porre:

$$\frac{u}{u_0} = a_1 + a_2 \frac{y}{\delta} + a_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

con le condizioni al contorno:

$$\frac{u}{u_0} = 0 \quad \text{per } \frac{y}{\delta} = 0$$

$$\frac{u}{u_0} = 0 \quad \text{per } \frac{y}{\delta} = 1$$

$$\frac{\partial \left(\frac{u}{u_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)} = 0 \quad \text{per } \frac{y}{\delta} = 1$$

ed ancora che sia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{g \beta (T_p - T_\infty)}{\nu} \quad \text{per } \frac{y}{\delta} = 0$$

Con queste condizioni si trova:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) \delta^2}{4 u_0 \nu} \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2$$

Per il profilo di temperatura si può porre:

$$T^* = b_1 + b_2 \frac{y}{\delta_t} + b_3 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3$$

con le condizioni:

$$T^* = 1 \quad \text{per } y = 0$$

$$T^* = 0 \quad e \quad \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{per } y = \delta_t$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} = 0 \quad \text{per } y = 0$$

Si trova, pertanto:

$$T^* = 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3$$

Le esperienze di laboratorio mostrano che i due profili sopra determinati, pur se approssimati per via dell'ipotesi polinomiale, approssimano abbastanza bene gli andamenti reali.

6.1.3 STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO LAMINARE

Lo strato limite termico con moto convettivo in regime laminare, cioè per $Ra < 10^8$, può essere calcolato mediante la relazione:

$$\delta_t = 3.49 \frac{x}{Ra^{1/4}}$$

valida per $Pr \approx 1$. I parametri termofisici sono calcolati alla distanza x dal bordo di attacco alla temperatura di film già indicata in precedenza. Per $Pr \neq 1$ si può usare l'espressione:

$$\delta_t = 3.49 \frac{x Pr^{1/2}}{Ra^{1/4}}$$

Si osservi che se nell'equazione del momento si trascura il termine di attrito rispetto a quello di alleggerimento termico $g\beta\Delta T$ allora lo strato limite termico risulta proporzionale al prodotto $(Ra_x Pr)^{-1/4}$.

Si osservi che il nuovo gruppo adimensionale $RaPr$ non contiene la viscosità cinematica:

$$Ra_x Pr = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{a^2}$$

Questo nuovo gruppo adimensionale è detto *Numero di Boussinesque*, Bo_{β} . Anche il numero locale di Nusselt è funzione dello stesso gruppo adimensionale, cioè:

$$Nu = f(Ra_x Pr)^{1/4}$$

6.1.4 STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO TURBOLENTO

Per valori di $Ra > 10^8$ il moto convettivo assume le caratteristiche di un moto turbolento ed hanno inizio i fenomeni di transizione dal moto laminare con formazione di vortici. Per $Ra > 10^9$ il moto è definitivamente turbolento, almeno per la lastra piana verticale.

Lo strato limite termico può ancora essere calcolato utilizzando le stesse espressioni dello strato limite dinamico per $Pr = 1$ mentre per valore diversi si applica ancora il fattore correttivo $Pr^{1/2}$.

6.1.5 CONVEZIONE NATURALE CON PARETE PIANA VERTICALE ISOTERMA

La soluzione esatta può essere ottenuta applicando ancora la teoria della similitudine (*similarity*) e cioè ponendo una variabile di similitudine data dal rapporto:

$$\eta = \frac{x}{yRa_x^{-1/4}}$$

Introducendo le funzioni di corrente di flusso (*streamfunction*):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

la funzione di similitudine è definita come:

$$F(\eta, Pr) = \frac{\psi}{aRa_x^{1/4}}$$

Per la temperatura la forma adimensionale si ha:

$$\theta(\eta, Pr) = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

Per applicare il metodo di Blasius occorre procedere in due fasi: prima si eliminano u e v mediante le derivate della funzione di corrente, ψ , poi eliminando x, y, ψ e T mediante η, F e θ .

Si possono scrivere le equazioni differenziali:

$$\frac{3}{4} F \theta' = \theta''$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{1}{2} F'^2 - \frac{3}{4} FF'' \right) = -F''' + \theta$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{array}{lll} F = 0 & \text{per} & \eta = 0 \\ F' = 0 & \text{per} & \eta = 0 \\ \theta = 1 & \text{per} & \eta = 0 \\ F' = 0 & \text{per} & \eta \rightarrow \infty \\ \theta = 0 & \text{per} & \eta \rightarrow \infty \end{array}$$

La soluzione delle precedenti equazioni risulta piuttosto complessa e viene qui omessa per semplicità. Il numero locale di Nusselt è così determinato:

$$Nu_x = 0.503 \left(\frac{Pr}{Pr + 0.986 Pr^{1/2} + 0.492} \right)^{1/4} Ra_x^{1/4}$$

valida per tutti i numeri di Prandtl. I valori asintotici sono:

$$Nu_x = 0.503 Ra_x^{1/4} \quad \text{per } Pr \gg 1$$

e ancora:

$$Nu_x = 0.600 (Ra_x Pr)^{1/4} \quad \text{per } Pr \ll 1$$

Entrambe queste correlazioni confermano le aspettative indicate nel §6.1.3. Il valore medio vale:

$$\overline{Nu}_x = 0.671 \left(\frac{Pr}{Pr + 0.986 Pr^{1/2} + 0.492} \right)^{1/4} Ra_x^{1/4}$$

Per l'aria, avente $Pr = 0.72$, si ottiene la relazione semplificata:

$$\overline{Nu}_x = 0.571 Ra_x^{1/4}$$

Una relazione valida per qualunque numero di Prandtl e con $Ra < 10^{12}$ è, per Nusselt medio (correlazione di *Churchill* e *Chu*):

$$Nu_x = 0.825 + \frac{0.387 Ra_x^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} :$$

che per l'aria, $Pr = 0.72$, diviene:

$$\overline{Nu}_x = (0.825 + 0.325 Ra_x^{1/6})^2$$

In regime laminare ($Ra < 10^9$) si ha la correlazione:

$$\overline{Nu}_x = 0.68 + \frac{0.67 Ra_x^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{4/9}}$$

che per l'aria, $Pr = 0.72$, diviene:

$$\overline{Nu}_x = 0.68 + 0.515 Ra^{1/4}$$

6.1.6 FLUSSO UNIFORME DALLA PARETE

Supponiamo ora che lungo la parete verticale si abbia un flusso uniforme, $q'' = \text{cost}$, e che pertanto la temperatura della stessa parete cresca uniformemente e monotonicamente nella direzione x .

Per fluidi con elevati numeri di Prandtl si ha relazione:

$$\frac{q''_s}{[T_p(x) - T_\infty]} \frac{x}{\lambda} \approx \left[\frac{g \beta (T_p - T_\infty) x^3}{\alpha \nu} \right]^{1/4}$$

Sperimentalmente si è trovata la relazione:

$$Nu_x = 0.616 \left(\frac{Pr}{Pr + 0.8} \right)^{1/5} Ra_x^{1/5}$$

La turbolenza si ha per $Ra_x > 10^{13}$.

Vlet e *Liu* propongono le seguenti relazioni:

$$Nu_x = 0.6Ra_x^{1/5}$$

$$\overline{Nu}_x = 0.75Ra_x^{1/5}$$

per regime laminare: $10^5 < Ra_x < 10^{13}$, mentre per regime turbolento, $Ra_x > 10^{13}$, si ha:

$$\overline{Nu}_x = 0.568Ra_x^{0.22}$$

$$\overline{Nu}_x = 0.645Ra_x^{0.22}$$

Per l'aria *Vlet* e *Liu* propongono le relazioni:

$$Nu_x = 0.55Ra_x^{0.2} \quad \text{laminaire}$$

$$Nu_x = 0.17Ra_x^{0.25} \quad \text{turbolento}$$

Chu e *Churchill* propongono una relazione valida per ogni Ra e Pr :

$$\overline{Nu}_x = \left\{ 0.825 + \frac{0.38Ra^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.437}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$$

Questa relazione richiede che la temperatura di riferimento sia calcolata mediante la differenza con il valore medio della temperatura di parete, cioè:

$$T_f = \overline{T}_p - T_\infty$$

Per l'aria, $Pr = 0.72$, la precedente correlazione diviene:

$$\overline{Nu}_x = (0.825 + 0.328Ra_x^{1/6})^2$$

In Letteratura si hanno numerose altre correlazioni sperimentali per il calcolo del coefficiente di convezione per diverse situazioni geometriche rispetto alla parete piana verticale sopra vista.

6.1.7 CONVEZIONE NATURALE SU UNA LASTRA PIANA ORIZZONTALE

Si tratta di un caso molto importante per le applicazioni impiantistiche. La lunghezza caratteristica L è data dal rapporto:

$$L = \frac{A}{P}$$

ove A è l'area della piastra e P è il perimetro. Le situazioni di scambio termico possibili sono diverse a seconda della posizione della lastra piana e questa è a temperatura maggiore (riscaldamento) o minore (raffreddamento) rispetto al fluido.

Con lastra piana calda rivolta verso l'alto o anche con lastra piana fredda rivolta verso il basso si possono usare le correlazioni:

$$\overline{Nu}_L = 0.54Ra_L^{1/4}$$

valida per regime laminare ($10^4 < Ra < 10^{11}$) mentre per regime turbolento ($Ra > 10^{11}$) si ha:

$$\overline{Nu}_L = 0.15Ra_L^{1/3}$$

negli altri due casi, cioè lastra piana calda rivolta verso il basso o lastra piana fredda rivolta verso l'alto, non si dovrebbe verificare alcuna convezione termica.

In realtà si hanno deboli flussi termici difficilmente stimabili e dovuti a disturbi casuali del moto del fluido.

6.2 CONVEZIONE NATURALE PER CILINDRI ORIZZONTALI LUNGH

Il parametro geometrico di riferimento è il diametro D e il numero di Nusselt locale varia, come già visto per la convezione forzata, con la posizione lungo la circonferenza. Il valore medio circonferenziale è dato dalla relazione:

$$\overline{Nu}_D = 0.53 Ra_D^{1/4}$$

valida per regime laminare ($10^3 < Ra < 10^9$). Per il regime turbolento ($10^9 < Ra < 10^{12}$) si ha:

$$\overline{Nu}_D = 0.13 Ra_D^{1/3}$$

Recentemente è stata proposta una correlazione più complessa ma più precisa:

$$\overline{Nu}_H = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0.559 Pr^{9/16}) \right]^{8/27}} \right\}^2$$

valida sia in regime laminare che turbolento.

6.3 CONVEZIONE NATURALE IN CAVITÀ CHIUSE

Questo argomento è oggi di grandissimo interesse non solo per gli aspetti relativi alla trasmissione del calore ma anche per gli aspetti epistemologici relativi ai sistemi *dissipativi* secondo le teorie di Y. Prigogine.

La convezione termica avviene all'interno di domini chiusi (di forma parallelepipedica o fra superfici piane affacciate con diversa temperatura. In Figura 61 si ha una cavità a sezione rettangolare con due lati adiabatici con lato caldo a sinistra e lato freddo a destra. Nella figura a destra si ha la distribuzione di temperatura che indica la formazione di uno strato limite ascendente sul lato caldo e di uno strato limite discendente sul lato freddo. Il flusso termico è calcolato sempre con la relazione di Newton con coefficiente di convezione da valutare alla temperatura media:

$$T_{fm} = \frac{T_c + T_f}{2}$$

con T_c e T_f temperature del lato caldo e freddo.

Il numero di Grashoff è calcolato con la relazione:

$$Gr = \frac{g \beta (T_c - T_f) H^3}{\nu^2}$$

con H altezza delle superfici attive. Per Ra bassi ($< 10^3$) si hanno ridottissimi movimenti del fluido e la trasmissione del calore avviene quasi esclusivamente per conduzione termica attraverso lo stesso fluido e quindi si ha:

$$Q \cong \frac{\lambda}{b} S (T_c - T_f)$$

ove b è lo spessore della cavità ed S l'area della sezione verticale (non adiabatica) e λ il coefficiente di conducibilità termica del fluido. La precedente relazione implica che il numero di Nusselt riferito alla larghezza della cavità è:

$$Nu_b = \frac{hb}{\lambda} \approx 1$$

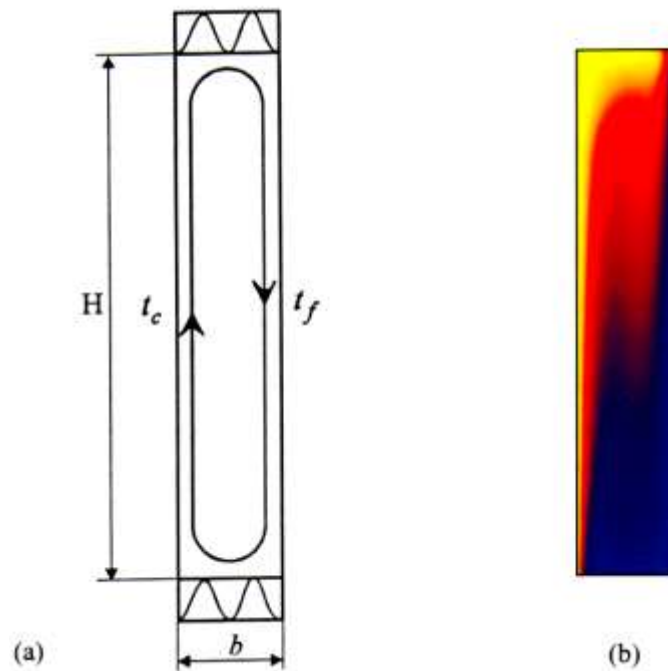


Figura 61: Convezione naturale in una cavità chiusa

Quanto detto vale per rapporti H/b compresi fra 2 e 10 per $Ra < 10^3$ e per H/b fra 10 e 40 per $10^3 < Ra < 10^4$. Per valori più elevati di Ra si instaura una circolazione di fluido che diviene sempre più consistente e il numero di Nusselt è dato dalla relazione:

$$Nu_b = 0.22 \left(\frac{Pr}{0.2 + Pr} Ra \right)^{0.28} \left(\frac{b}{H} \right)^{1.09}$$

valida per $10 < H/b < 40$, $Pr < 10^5$ e $10^4 < Ra < 10^{13}$. Si ha la correlazione:

$$Nu_b = 0.42 Ra^{0.25} \left(\frac{b}{H} \right)^{1.05}$$

valida per $10 < H/b < 40$, $1 < Pr < 10^4$ e $10^7 < Ra < 10^{11}$. Per valori di $H/b > 40$ si pone sempre $H/b=40$ nella precedente correlazione.

Nel caso di cavità sottili, con $H/b < 1$ allora il comportamento termico dipende dal tipo di trasmissione alle pareti.

Per flusso costante alle pareti si ha la correlazione:

$$\overline{Nu} = 0.34 Ra^{2/9} \left(\frac{H}{b} \right)^{1/9}$$

con Ra_H dato dalla relazione:

$$Ra_H = \frac{g \beta H^4 q''}{\alpha \nu \lambda}$$

Nel caso in cui si calcoli Ra con la relazione:

$$Ra = \frac{Ra_H}{Nu} = \frac{g \beta \Delta T H^3}{\alpha \nu}$$

allora la correlazione da utilizzare è la seguente:

$$\overline{Nu} = 0.25 Ra_H^{2/7} \left(\frac{H}{b} \right)^{1/7}$$

Si è osservato sperimentalmente che nel caso in cui si abbia temperatura di parete costante si possono usare la stessa correlazione sopra indicata purché il numero di *Rayleigh* sia calcolato con riferimento alla temperatura media fra la parete calda e quella fredda.

6.3.1 CAVITÀ RISCALDATE DAL BASSO

La differenza fra le cavità riscaldate lateralmente e quelle riscaldate dal basso è che ora le cavità sono riscaldate dal lato vuoto e non da una parete, come illustrato in Figura 62).

Queste cavità, dette anche *Celle di Bènard*, attivano una circolazione di fluido anche con pochi gradi di differenza di temperatura fra la superficie inferiore e quella superiore.

Il valore critico perché questa circolazione avvenga è che si abbia:

$$Ra_H \geq 1708$$

con Ra_H dato da:

$$Ra = \frac{Ra_H}{Nu} = \frac{g\beta(T_c - T_f)H^3}{\alpha\nu}$$

La circolazione che si instaura è caratteristica di queste celle, vedi figura, che può anche diventare turbolenta incrementando sensibilmente il flusso termico dal basso verso l'alto. Sperimentalmente si è trovata valida la correlazione:

$$\overline{Nu}_H = 0.069 Ra_H^{1/3} Pr^{0.074}$$

con proprietà termofisiche calcolate alla temperatura media. Per $Ra_H > 10^9$ si ha una proporzionalità diretta di Nusselt con $Ra_H^{0.33}$ con flusso indipendente dallo spessore H della cella.

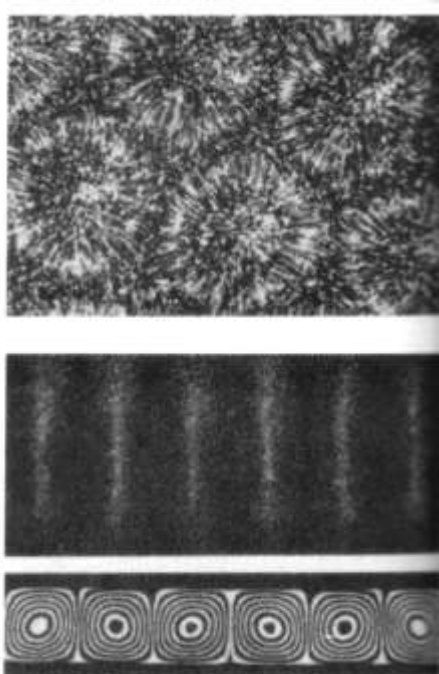


Figura 62: Cavità riscaldate dal basso (*Celle di Bènard*)

Al di sotto del valore di 1708 il moto del fluido è del tutto trascurabile e il flusso è praticamente solo conduttivo. Le celle di *Bènard* sono utilizzate per raffreddare mediante convezione naturale superfici molto calde, come ad esempio le lampade allo iodio usate nei proiettori luminosi.

6.4 CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE NATURALE

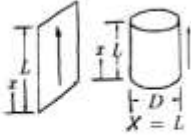
<div> <div> <div>Lastra piana verticale e cilindri di elevato diametro</div>  </div> </div>		
Autore	Correlazione	Note
Polhausen, Schuh	$Nu = 0,48 (Gr)^{1/4}$ (per aria) $Nu = C \cdot (Ra)^{1/4}$	$Gr Pr < 10^9$ $Pr = 0,73 \quad C = 0,571$ $Pr = 10 \quad C = 0,612$ $Pr = 100 \quad C = 0,652$ $Pr = 1000 \quad C = 0,653$
Churchill	$Nu = 0,68 + \frac{0,67 (Ra)^{1/4}}{[1 + (\frac{0,492}{Pr})^{9/16}]^{4/9}}$	$10^5 < Ra < 10^9$
Chu	$Nu^{1/2} = 0,85 + \frac{0,387 (Ra)^{1/5}}{[1 + (\frac{0,492}{Pr})^{9/16}]^{5/4}}$	$10^{-1} < Ra < 10^{12}$ $0 < Pr < \infty$
Mc Adams	$Nu = 0,59 (Ra)^{1/4}$ $Nu = 0,13 (Ra)^{1/3}$	$Pr \approx 1,0, \quad 10^4 < Ra < 10^9$ $10^9 < Ra < 10^{13}$
Churchill	$Nu = 0,67 + \frac{0,67 (Ra)^{1/4}}{[1 + (\frac{0,492}{Pr})^{9/16}]^{4/9}}$	$8 \cdot 10^{-5} < Ra < 4 \cdot 10^{14}$
Thelen		$0,022 < Pr < 7640$
Vliet	$Nu_x = 0,55 (Gr_x^* Pr)^{0,2}$	laminare
Ross	$Nu_x = 0,17 (Gr_x^* Pr)^{0,25}$	turbolento

Tabella 14: Correlazioni per la convezione naturale


<div> <div>Lastra piana orizzontale, flusso termico ascendente</div>  </div>		
Autore	Correlazione	Note
Fujii Jmura	$Nu = 0,13 (Ra)^{1/3}$	$4 \cdot 10^4 < Ra < 7 \cdot 10^{10}$ $0,3 \times 0,15 \text{ m}$ $0,07 \times 0,05 \text{ m}$
Lewandowski	$Nu = 0,766 (Ra)^{1/5}$ $Nu = 0,173 (Ra)^{1/3}$	$10^4 < Ra < 10^7$ $10^5 < Ra < 10^8$
Fishenden Saunders	$Nu = 0,54 (Ra)^{1/4}$ $Nu = 0,14 (Ra)^{1/3}$	$10^5 < Ra < 10^7$ $10^7 < Ra < 3 \cdot 10^{10}$ $0,61 \times 0,61 \text{ m}$
Hassan Mohamed	$Nu = 0,135 (Ra)^{1/3} \pm 15\%$	$Pr = 0,72, \quad 10^3 < Gr < 10^9$ $0,5 \times 0,2 \text{ m}$
Al-Arabi El-Riedy	$Nu = 0,7 (Ra)^{1/4} \pm 14\%$ $Nu = 0,155 (Ra)^{1/3} \pm 12\%$	$2 \cdot 10^5 < Ra < 4 \cdot 10^7, \quad 0,05 \text{ m}$ $Ra > 4 \cdot 10^7 \quad Pr = 0,72$ $0,1 \text{ m}, 0,15 \times 0,25 \text{ m}$

Tabella 15: Correlazioni per la convezione naturale

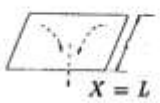
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div> <p>Lastra piana orizzontale, flusso termico discendente</p> </div> <div>  </div> </div>		
Autore	Correlazione	Note
Mc Adams	$Nu = 0,27 (Ra)^{1/4}$	$3 \cdot 10^5 < Gr Pr < 10^{10}$
Fujii Imura	$Nu = 0,58 (Ra)^{1/5}$	$10^6 < Ra < 10^{11}$
Chapman	$Nu = 0,44 (Ra)^{1/5}$	$10^5 < Ra < 2 \cdot 10^7$

Tabella 16: Correlazioni per la convezione naturale

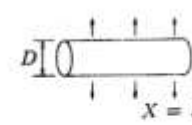
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div> <p>Cilindri orizzontali</p> </div> <div>  </div> </div>		
Autore	Correlazione	Note
Mc Adams	$Nu = 0,53 (Ra)^{1/4}$	$10^4 < Ra < 10^9$
	$Nu = 0,13 (Ra)^{1/3}$	$10^9 < Ra < 10^{12}$
Churchill	$Nu = \left[0,60 + 0,387 \left\{ \frac{Ra}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{16/9}} \right\}^{1/4} \right]^2$	$10^5 < Ra < 10^{12}$
Chu		
Elenbaas	$Nu^3 e^{-6/\sqrt{Nu}} = \frac{Gr Pr}{235}$	$Gr Pr < 10^4$ (fili)

Tabella 17: Correlazioni per la convezione naturale

Geometria	Laminare $10^3 < Gr Pr < 10^9$	Turbolento $Gr Pr > 10^9$
Lastra o cilindro verticale	$h = 1,42 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	$h = 0,95 (\Delta T)^{1/3}$
Cilindro orizzontale	$h = 1,32 (\Delta T / D)^{1/4}$	$h = 1,24 (\Delta T)^{1/3}$
Lastra orizzontale (quadrata): Faccia riscaldata verso l'alto o faccia più fredda verso il basso	$h = 1,32 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1,43 (\Delta T)^{1/3}$
Faccia riscaldata verso il basso o faccia più fredda rivolta verso l'alto	$h = 0,61 \left(\frac{\Delta T}{L^2} \right)^{1/5}$	

Tabella 18: Correlazioni per la convezione naturale

6.5 GETTI E PENNACCHI

Lo studio dei getti e dei pennacchi riveste notevole interesse sia industriale che ambientale. Si tratta di due esempi di convezione termica non confinata, cioè non limitata da superfici solide: una corrente fluida (getti o fumi) induce un moto convettivo della massa esterna (ad esempio aria per il caso dei pennacchi).

Con riferimento alla Figura 63, una corrente di fluido immesso attraverso un orifizio, dopo una zona iniziale (circa 6 volte la dimensione del foro nel quale la velocità media coincide con quella a monte dell'orifizio) passa dalla zona laminare a quella turbolenta.

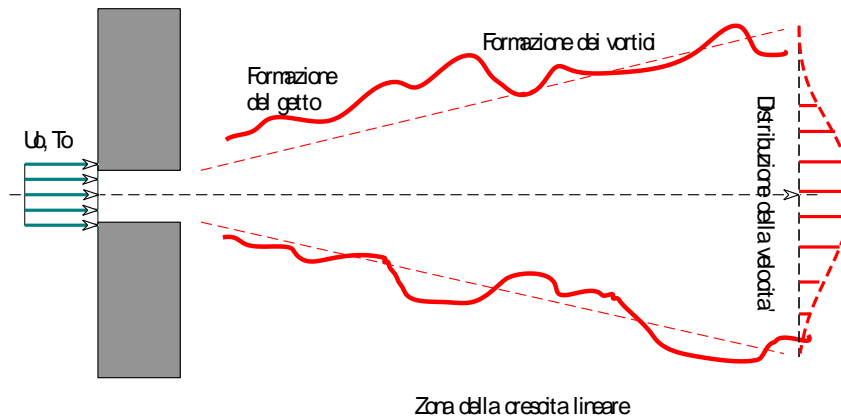


Figura 63: Formazione del getto (zona turbolenta)

Il getto si allarga man mano che si procede in avanti e si parla di una zona di accrescimento lineare dello spessore del getto.

La distribuzione della velocità nel getto si dimostra, partendo dalle equazioni allo stato limite turbolento, che è di tipo esponenziale secondo la relazione:

$$\bar{u} = \bar{u}_c e^{-(r/b)^2}$$

ove è $b = 0.107 x$ ed u_c è la velocità sull'asse. Analogamente la distribuzione di temperatura è:

$$\bar{T} - \bar{T}_\infty = (\bar{T}_c - T_\infty) e^{-(r/b_T)^2}$$

con $b_T = 0.127 x$. Le precedenti equazioni necessitano dei valori della velocità e della temperatura sull'asse del getto. Si dimostra che vale la seguente relazione:

$$2\pi \int_0^\infty \rho \bar{u}^2 r dr = \rho U_0^2 \frac{\pi}{4} D_0^2$$

Combinando con l'equazione della distribuzione di velocità si ottiene il valore della velocità sull'asse:

$$\bar{u}_c = 6.61 \frac{U_0 D_0}{x}$$

Si osservi come questa velocità decresce al crescere di x e che per $x = 6.61 D_0$ si ha $\bar{u}_c = U_0$.

Si dimostra ancora valida la relazione:

$$2\pi \int_0^\infty \rho c_p \bar{u}^2 (\bar{T} - T_\infty) r dr = \rho c_p U_0^2 \frac{\pi}{4} (T_0 - T_\infty) D_0^2$$

Combinando con l'equazione della distribuzione della temperatura si ottiene:

$$\bar{T}_c - T_\infty = 5.65 \frac{(T_0 - T_\infty)}{x} D_0$$

Quindi l'eccesso di temperatura decresce ancora con la distanza x dall'orifizio.

Se un getto viene orientato su una parete verticale allora nell'area della sezione del getto si hanno coefficienti di convezione elevati.

Pertanto si usano i getti per il raffreddamento rapido ed intensivo di superfici particolarmente calde (ad esempio le palette delle turbine, ...).

Per i pennacchi si ha una situazione del tipo descritto in Figura 64.

La sorgente di calore innesca un movimento ascensionale di fluido caldo che, a partire da una certa distanza da questa, innesca moti turbolenti con formazione di vortici che trascinano (*entrainment*) il fluido circostante.

Le distribuzioni di velocità e di temperature hanno ancora l'andamento esponenziale già visto in precedenza per i getti con valori delle costanti da determinare sperimentalmente.

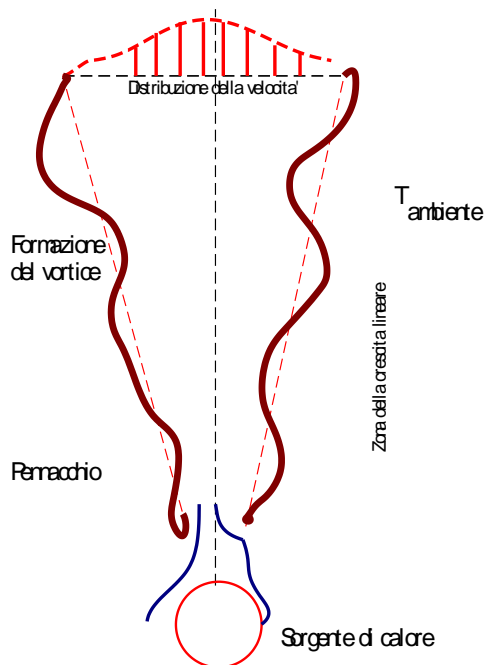


Figura 64: Formazione di un pennacchio

In Figura 65 si ha un esempio di pennacchio reale formatosi al di sopra di una torcia di *blow down* di uno stabilimento industriale.

Maggiori informazioni sono reperibili nei manuali specializzati.



Figura 65: Formazione di un pennacchio in una torcia di raffineria

7 METODI NUMERICI PER LA FLUIDODINAMICA (CFD)

7.1 LE PROBLEMATICHE DELLA SIMULAZIONE NUMERICA

La soluzione dei problemi di fluidodinamica è molto più complessa di quella vista per la conduzione termica. Le equazioni differenziali (Navier Stokes più equazione dell'energia) sono di tipo alle derivate parziali, non lineari, paraboliche, ellittiche e iperboliche al tempo stesso.

L'applicazione del metodo alle differenze finite porta a notevoli diversità rispetto a quanto già visto per la conduzione. A causa della non linearità del problema. Una evoluzione del metodo alle differenze finite è il metodo ai volumi finiti.

In questo caso si suddivide il dominio di applicazione delle equazioni differenziali in una serie di volumi di controllo, opportunamente selezionati, su cui integrare le equazioni stesse usando profili noti della variabile incognita.

Nei volumi di controllo debbono valere le leggi di conservazione già descritte (massa, energia, quantità di moto, ...) in modo del tutto simile a quanto visto per il metodo alle differenze finite.. Proprio questa conservazione delle grandezze fondamentali è il principale vantaggio del metodo a volume di controllo.

In genere per evitare divergenze matematiche si usano varie metodologie risolutive (vedi, ad esempio, metodo *upwind*)

Un secondo importante metodo utilizzato è il metodo agli elementi finiti (*FEM*) che qui brevemente si sintetizza. In questo caso, in analogia con il metodo delle differenze finite, si cerca la soluzione delle equazioni differenziali per approssimazioni successive su elementi per i quali la soluzione è nota o ipotizzabile in modo quasi esatto.

Il metodo agli elementi finiti assume una funzione approssimata che soddisfi i vincoli della *PDE* di partenza e che dipenda da parametri da ottimizzare (ad esempio minimizzando l'energia totale). Esso definisce a priori l'andamento della soluzione su singole porzioni (elemento finito, EF) del continuo connesse alle altre in dati punti.

Pertanto si suddivide il continuo con una griglia (*mesh*) che delimita gli Elementi Finiti (EF). La griglia definisce: volume, posizione dei nodi ed appartenenza dei nodi ad uno o più EF.

Gli EF si scambiano azioni solo tramite i nodi. Si assumono andamenti "*semplificati*" delle variabili all'interno degli EF.

Si impongono condizioni di continuità e congruenza nei nodi e, in parte, sui contorni degli EF confinanti.

Le equazioni di vincolo dei nodi formano un sistema globale che viene risolto con i classici metodi matriciale.

In definitiva si ha la seguente procedura:

Discretizzazione, soluzione definita "a pezzi", continuità e congruenza sui bordi

7.2 LA FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE (CFD)

Lo scopo della *Fluidodinamica Computazionale* (CFD) è quello di formulare *modelli* adatti a descrivere i fenomeni fluidodinamici. Considerazioni sulla natura dei fluidi e analisi del livello di scala spaziale, temporale e dinamico della realtà sono gli strumenti indispensabili per formulare modelli fisici per la fluidodinamica che possiedano il requisito di *riprodurre la realtà con il livello di approssimazione desiderato*.

L'effettiva *validità* di ogni modello, in quanto necessariamente approssimato, dovrà poi essere verificata confrontando le previsioni che esso è in grado di fornire con dati sperimentali, oppure con le previsioni di altri modelli fisici ottenuti con un livello minore di approssimazione. Conoscere un fenomeno fluidodinamico significa conoscere compiutamente (sebbene con un certo livello di approssimazione) la distribuzione spaziale e l'evoluzione temporale di un certo numero di variabili fluidodinamiche (velocità, temperatura, pressione, ecc.) che lo caratterizzano.

Il numero minimo di tali variabili dipende, di volta in volta, non solo dal tipo di fenomeno, ma anche dal livello di approssimazione con cui desideriamo conoscerlo.

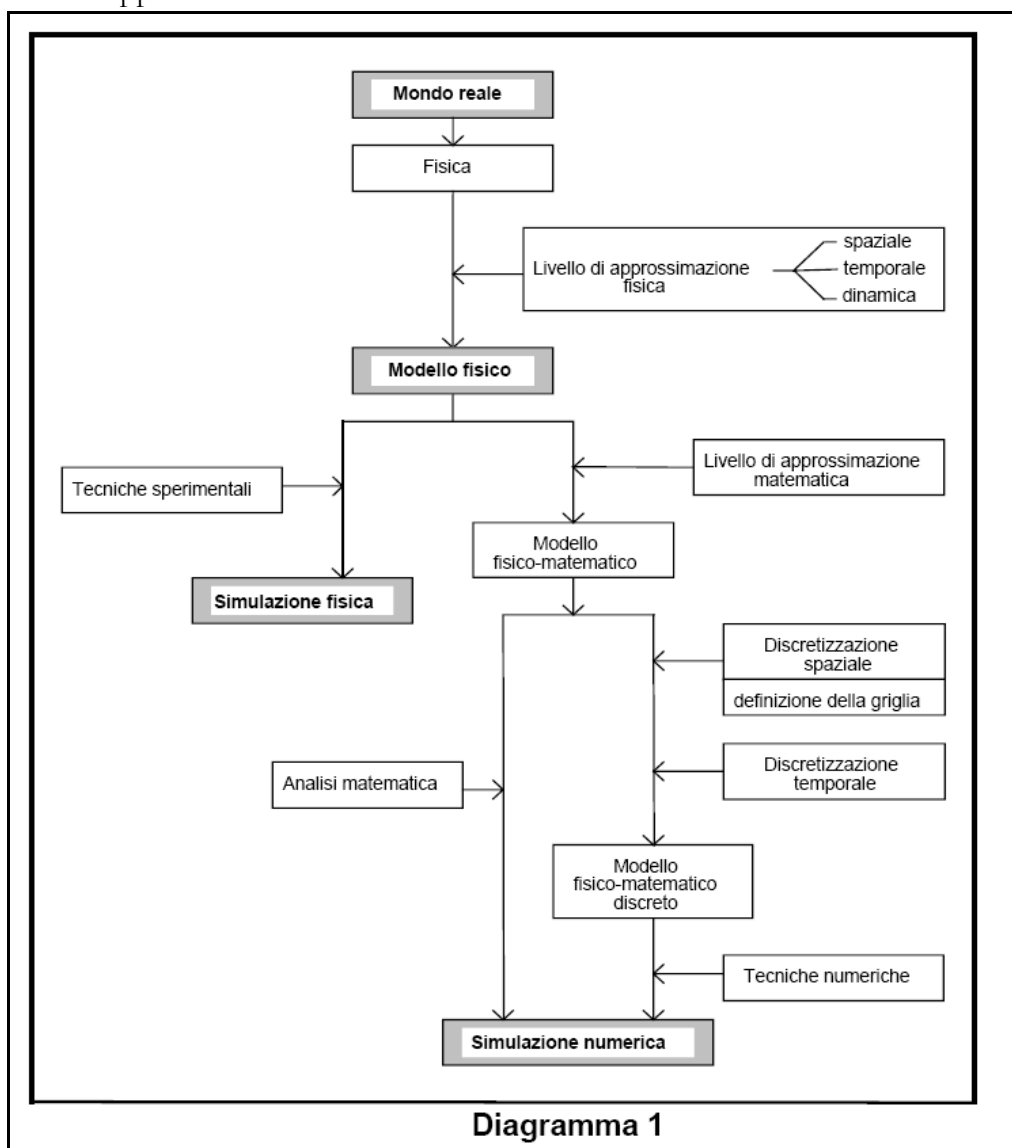


Figura 66: Schema della modellizzazione fluidodinamica

Come indicato nel diagramma di Figura 66, a tale conoscenza si può pervenire, dopo averne formulato un modello fisico, sia attraverso misure sperimentali dirette di tali variabili, sia risolvendo sistemi di equazioni le cui variabili sono appunto tali proprietà fluidodinamiche.

Si tratta di quelle che, con un termine poco felice, ma ormai universalmente diffuso, prendono rispettivamente il nome di *simulazione fisica*, o sperimentale, e di *simulazione numerica*. Nel secondo caso, il passo che è necessario compiere dopo aver formulato un modello fisico consiste nel tradurlo in un *modello fisico-matematico*.

Il passaggio dal modello fisico a quello fisico-matematico si basa su alcune leggi fondamentali della fisica, che impongono che in un sistema di fluido, come in ogni altro sistema dinamico della meccanica classica, determinate grandezze quali la massa, la quantità di moto generalizzata e l'energia soddisfino precise equazioni di bilancio che esprimono quelli che, più o meno propriamente, prendono il nome di *principi di conservazione*.

Nell'ambito della fluidodinamica classica, ovvero nell'ambito del livello di approssimazione della realtà del *continuo deformabile di tipo newtoniano*, il più completo tra i modelli fisico-matematici è costituito dal sistema di *equazioni di Navier-Stokes* che esprime, appunto, il principio di *conservazione della massa*, il *teorema della quantità di moto* e il principio di *conservazione dell'energia totale*.

Una volta che siano note l'equazione di stato e le proprietà fisiche del fluido in esame, questo sistema di equazioni differenziali, integrato numericamente, secondo la tecnica che prende il nome di *DNS*, (da *Direct Numerical Simulation*), è perfettamente in grado di descrivere a livello microscopico anche la più complicata delle correnti.

Ad esempio, è in grado di riprodurre compiutamente tutti i dettagli di una corrente turbolenta (e pertanto caratterizzata da una marcata tridimensionalità e non stazionarietà), anche in presenza di fenomeni termici, di reazioni chimiche, etc²³.

Tuttavia è estremamente utile analizzare come l'introduzione di successive ipotesi di *approssimazione spaziale, temporale e dinamica* consenta di ottenere modelli fisici di *validità e complessità decrescenti*, a partire da quello che presenta il massimo di complessità e di generalità (diagramma 2 di Figura 67).

Un primo passo nella semplificazione del modello fisico-matematico lo si può compiere se invece di voler approssimare la realtà fisica a livello delle scale microscopiche, si accetta di descriverla con livelli di accuratezza spaziale e temporale meno raffinati.

Il modello fisico-matematico che si ottiene è quello che prende il nome di *LES* (da *Large Eddy Simulation*).

Non è il caso di entrare ora nei dettagli di questa tecnica, ma si può facilmente intuire che l'aver ridotto così drasticamente i requisiti di risoluzione spaziale e temporale del problema porterà ad una altrettanto drastica riduzione del *costo* e del *tempo* necessari per effettuare un'eventuale simulazione numerica del fenomeno, a fronte di una perdita di informazioni che può ritenersi, nel caso in esame, del tutto accettabile, se non addirittura benefica.

Tuttavia, se ci limitassimo a risolvere le equazioni di Navier-Stokes semplicemente adottando una scarsa risoluzione spaziale e temporale, commetteremmo un gravissimo errore. Non si può negare che le considerazioni appena fatte siano sensate, ma nel nostro ragionamento abbiamo assunto implicitamente (e in modo del tutto ingiustificato) che, dal momento che certi dettagli del fenomeno *non ci interessano*, questi sono automaticamente *ininfluenti* per la sua evoluzione reale: quanto avviene a livello microscopico (il livello che abbiamo deciso di trascurare) può anche non interessare affatto a chi desidera effettuare un'analisi a livello macroscopico.

La perdita dei dettagli del moto turbolento a livello microscopico deve essere pertanto compensata, almeno *statisticamente*, da altre informazioni che devono essere reintrodotte nel modello fisico attraverso *modelli aggiuntivi*: i cosiddetti *modelli di turbolenza sottogriglia*, il cui nome indica appunto che è loro affidato il compito di riprodurre tutti gli effetti dinamici di quanto avviene alle scale del moto inferiori a quella della *griglia di discretizzazione*.

Il problema è concettualmente identico a quello che ha portato dal modello molecolare del gas a quello del continuo deformabile. Un modello che riproduca ogni dettaglio del moto molecolare di un gas è, non solo estremamente oneroso, ma anche spesso del tutto inutile dal punto di vista pratico, tuttavia quanto avviene a livello molecolare può essere trascurato soltanto a condizione che l'inevitabile perdita di informazione venga compensata dall'equazione di stato e da informazioni sulle proprietà fisiche *statistiche* del fluido.

In molti casi, si può rinunciare a conoscerne i dettagli, non solo a livello delle scale spaziali e temporali delle singole particelle fluide, ma addirittura anche a quello delle grandi strutture turbolente: in altre parole, può essere sufficiente descrivere quello che prende il nome di *moto medio* e apprezzarne l'evoluzione temporale mediando su intervalli di tempo di durata variabile tra qualche minuto e, al limite, l'intera durata del fenomeno.

Questo secondo livello di approssimazione porta al modello fisico-matematico delle *equazioni mediate di Reynolds*. Anche in questo caso, e in misura ancor maggiore che nel caso della LES, si ottiene un'enorme riduzione del *costo* e del tempo necessari per ottenere una simulazione numerica dell'intero fenomeno.

²³ Problemi complessi ottenuti dalla somma di diversi problemi di simulazione (diffusione, reazioni chimiche, campi dinamici, ...) sono detti *multifisici* e sono caratterizzati da un numero elevato di equazioni differenziali alle derivate parziali spesso anche fra loro correlate.

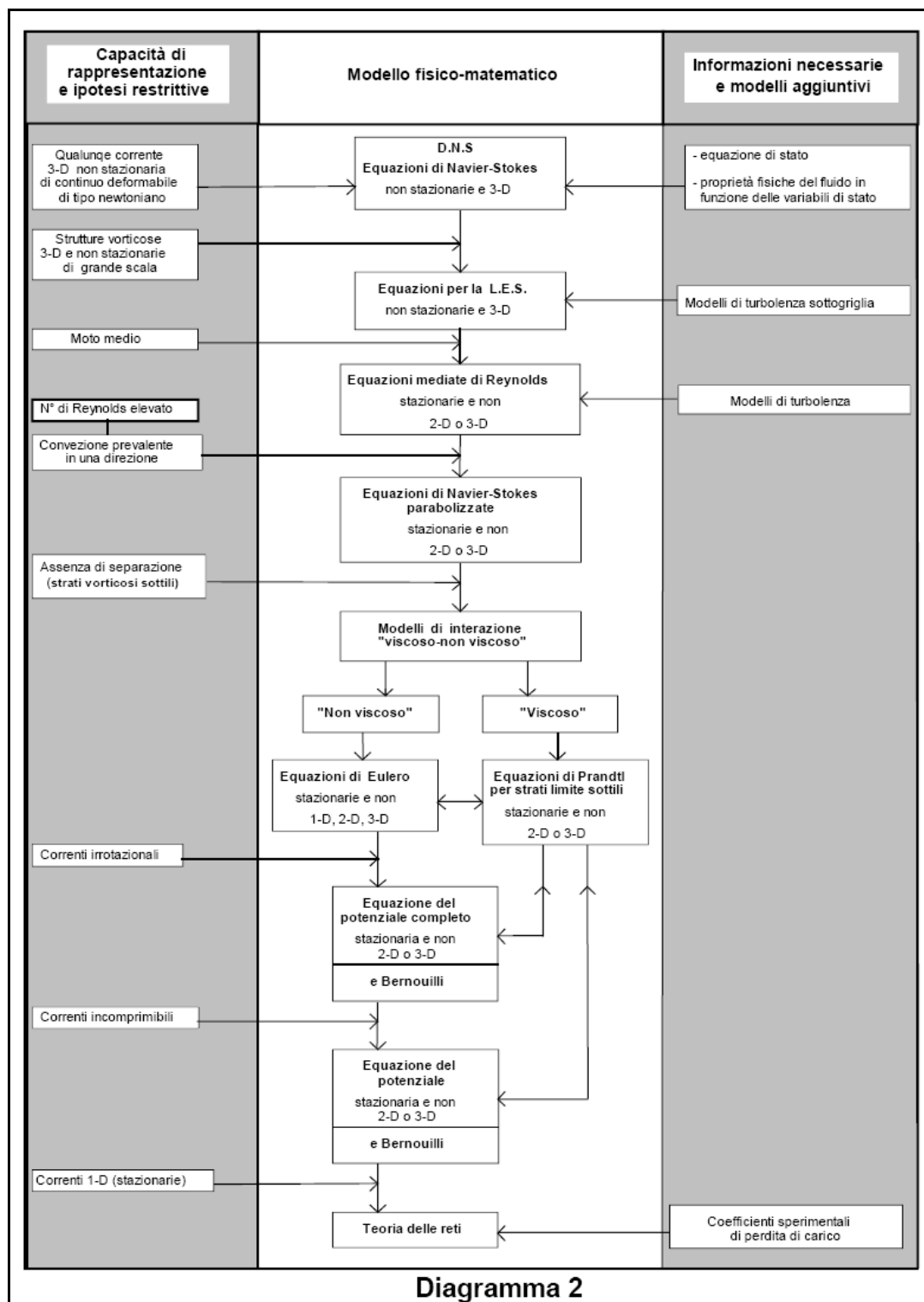


Figura 67: Applicazione delle ipotesi spaziali e temporali al modello CFD

Ci sono addirittura delle situazioni in cui il moto è *in media stazionario* il che rende del tutto superflua la sua discretizzazione temporale, oppure casi in cui *la corrente media* è bidimensionale, ovvero indipendente da una delle coordinate spaziali, nel qual caso la discretizzazione spaziale del problema potrebbe essere limitata al solo *piano del moto medio*.

Ovviamente il sistema delle equazioni mediate di Reynolds deve essere integrato con informazioni fornite da *modelli di turbolenza*. A differenza dei modelli sottogriglia della LES, ai *modelli di turbolenza per le equazioni mediate di Reynolds* è affidato il compito di riprodurre gli effetti dinamici *dell'intero spettro* dei moti tridimensionali e non stazionari che caratterizzano la corrente turbolenta. Compito che li rende piuttosto complicati e scarsamente generali.

Ulteriori modelli semplificati sono derivabili a partire dal modello delle equazioni mediate di Reynolds, sulla base di successive *approssimazioni dinamiche*, la prima delle quali è quella di *numero di Reynolds elevato*. Il numero di Reynolds è uno dei parametri dinamici fondamentali ed esprime essenzialmente il peso relativo delle forze d'inerzia del fluido rispetto a quelle viscosi, nella particolare corrente in esame.

Un numero di Reynolds elevato significa quindi che, in un determinato fenomeno, gli effetti delle forze d'inerzia sono mediamente preponderanti (anche di vari ordini di grandezza) rispetto a quelli delle forze viscosi. Se è verificata la condizione che il numero di Reynolds della corrente è elevato, può talvolta verificarsi anche una seconda condizione.

Può succedere che all'interno di un moto che rimane pur sempre tridimensionale e non stazionario, la velocità media con cui viene trasportato il fluido abbia una componente decisamente prevalente rispetto alle altre e si può quindi identificare una direzione dello spazio, che prende il nome di *direzione del moto medio*, lungo la quale i fenomeni convettivi sono decisamente preponderanti rispetto a quelli diffusivi. In tali condizioni, si possono quindi ritenere trascurabili gli effetti della diffusione viscosa e turbolenta nella *sola direzione del moto medio* e si ottiene il modello fisico-matematico che prende il nome di *equazioni di N-S parabolizzate*.

Qualora, poi, verificate le ipotesi appena descritte, si verifichi anche che il *verso* della velocità nella direzione del moto medio è ovunque il medesimo, si può adottare una geniale approssimazione dinamica, dovuta a *Prandtl*. Egli intuì che, sotto opportune condizioni (la prima delle quali è un elevato numero di Reynolds, la seconda è l'assenza di controcorrenti), gli effetti dinamici diffusivi, associati alla presenza di vorticità, viscosità e turbolenza, possono essere confinati in regioni del dominio di moto di spessore estremamente limitato, che si sviluppano in corrispondenza delle pareti solide lambite dalla corrente e che prendono appunto il nome di *strati limite* o, meglio, di *strati vorticosi sottili*.

Da una lucida analisi del peso relativo delle forze in gioco, *Prandtl* dedusse che, non solo il *moto medio* all'interno di questi strati poteva essere descritto da forme semplificate delle equazioni di Navier-Stokes, che prendono appunto, come già visto in precedenza, il nome di *equazioni dello strato limite* (o *degli strati vorticosi sottili*), ma anche che, *all'esterno* di tali strati di corrente, gli *effetti della viscosità* del fluido potevano essere completamente trascurati.

Deduzione, quest'ultima, non meno importante della prima, dal momento che consente di ritenere che il campo di moto all'esterno degli strati limite sia determinabile prescindendo completamente dagli effetti della viscosità. Ne deriva che in una (gran) parte del dominio, il comportamento della corrente può essere descritto dalle *equazioni di Eulero*, un modello fisico-matematico che si ottiene a partire dalle equazioni di Navier-Stokes nell'ipotesi, appunto, di poter eliminare completamente gli effetti della viscosità nelle equazioni di bilancio per la quantità di moto e per l'energia. L'accoppiamento tra quelli che prendono, molto impropriamente, il nome di modello *viscoso* (le equazioni di *Prandtl* che governano il moto nelle regioni vorticosi sottili) e modello *non viscoso* (valido all'esterno di esse) avviene essenzialmente attraverso la variabile scalare pressione.

Altri modelli semplificati si possono ottenere a patto che sia verificata un'ulteriore *approssimazione dinamica* sul peso relativo tra le forze elastiche con cui il fluido, comprimendosi o espandendosi, reagisce alle variazioni della pressione e, ancora, le forze d'inerzia.

Se tale rapporto è piccolo, ovvero se il *numero di Mach* della corrente è tale da garantire l'assenza di onde d'urto, l'atto di moto nelle regioni esterne agli strati limite è *irrotazionale* e quindi descrivibile con un modello più semplice di quello di Eulero, ovvero con il modello del *potenziale completo*.

E se, al limite, si può ragionevolmente assumere che le pressioni in gioco siano tali da non alterare la densità del fluido, si può formulare l'ipotesi di completa *incomprimibilità*, che porta a descriverne il moto con una semplice equazione di Laplace per il *potenziale cinetico*.

Nei casi in cui l'atto di moto all'esterno degli strati limite sia irrotazionale, il campo della pressione, che descrive compiutamente lo stato di sforzo nella corrente (essendo ivi nulli gli effetti della viscosità) può ottenersi semplicemente con l'equazione di *Bernoulli*, a partire dal campo di velocità fornito dalle equazioni del potenziale.

Si è già accennato al fatto che, anche in una corrente turbolenta, le variabili fluidodinamiche medie possono presentare talvolta gradienti nulli lungo una direzione dello spazio.

E' evidente che, in questi casi, è sufficiente fornirne una descrizione nel solo piano normale alla direzione di uniformità (il cosiddetto *piano del moto medio*).

Qualora le direzioni di uniformità fossero due, anziché una, la *corrente media* potrebbe essere ovviamente descritta con un modello *monodimensionale*. Una situazione del genere non si presenta mai nel mondo reale, ma esistono effettivamente correnti, stazionarie e non, nelle quali i gradienti di alcune grandezze fluidodinamiche sono relativamente piccoli in una gran parte del campo di moto.

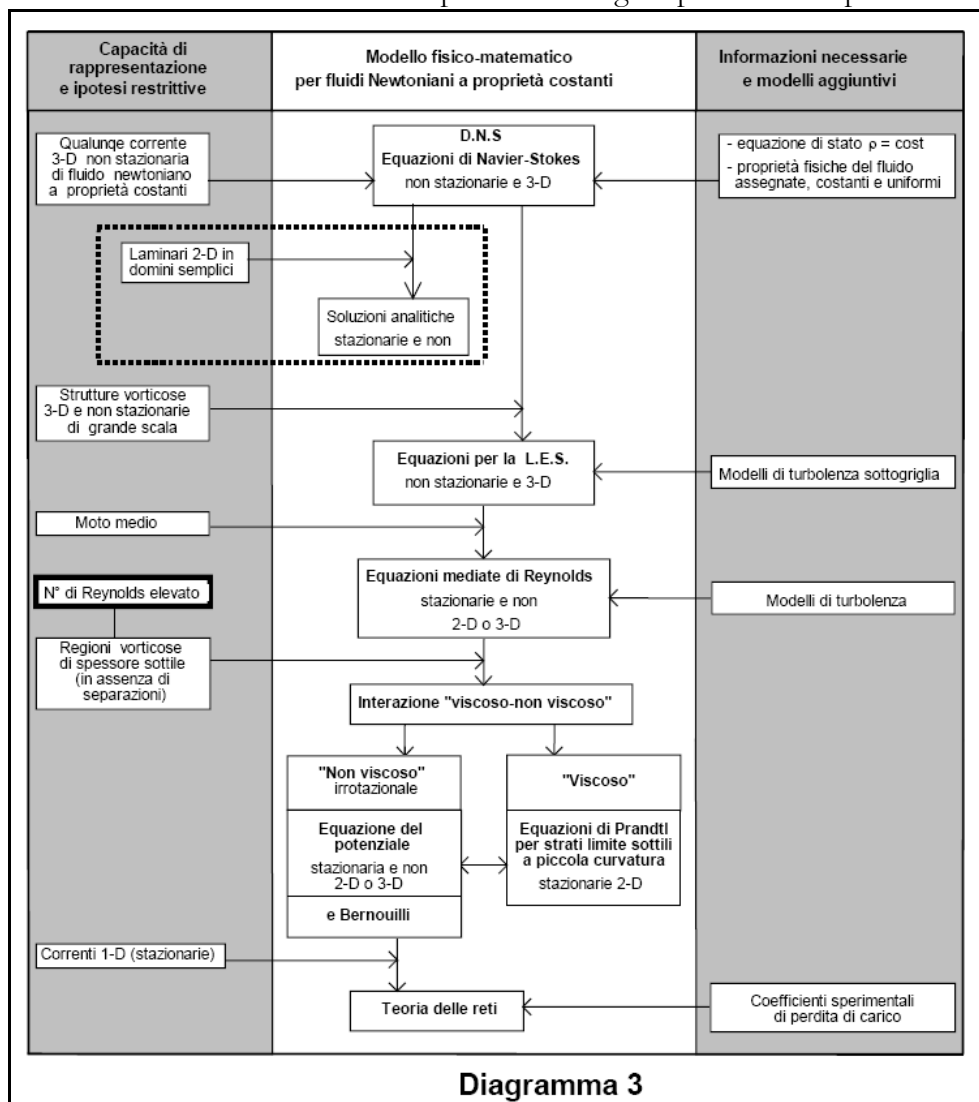


Figura 68: Gerarchia dei modelli di simulazione

E' questo il caso di alcune correnti interne a condotti che presentano un'estensione longitudinale assai maggiore di quella trasversale: se si escludono le regioni (magari sottili) adiacenti alle pareti solide e quelle in cui si verificano variazioni brusche della direzione o del modulo della velocità media, velocità e pressione si mantengono praticamente uniformi in ciascuna sezione del condotto e presentano gradienti significativi soltanto nella direzione del moto medio, il quale può pertanto essere descritto con una forma monodimensionale delle equazioni di Eulero, se il fluido è comprimibile, oppure da forme monodimensionali dell'equazione di continuità e della quantità di moto, nel caso di fluidi a proprietà costanti.

Nel caso di correnti stazionarie di fluidi a proprietà costanti, il modello che si deriva dall'ipotesi di monodimensionalità prende il nome di *teoria delle reti*.

E' chiaro però che un modello di questo genere è utilizzabile solo se accoppiato a *modelli aggiuntivi* che siano in grado di tenere conto di tutti quegli effetti tridimensionali che, sebbene abbiano luogo in regioni effettivamente limitate del campo di moto, non per questo devono avere conseguenze trascurabili.

Queste informazioni aggiuntive sono generalmente costituite da coefficienti e correlazioni di origine sperimentale, che prendono il nome di *coefficienti di perdita di carico*.

Si conclude osservando che la gerarchia di modelli fisico-matematici fin qui esaminata è rappresentativa della quasi totalità dei problemi della fluidodinamica classica. La parte iniziale di questa trattazione verrà dedicata, con particolare attenzione, alla formulazione del modello generale delle *equazioni di Navier-Stokes*. Successivamente si esamineranno i problemi relativi alla loro integrazione numerica diretta (DNS), si accennerà alle equazioni per la LES ed infine a quelle mediate di Reynolds.

Per queste ultime si affronterà il “*problema della chiusura*”, già introdotto nei capitoli precedenti, prestando in particolar modo attenzione al modello a due equazioni differenziali (K-ε), il quale è stato più volte applicato nelle simulazioni fluidodinamiche. La gerarchia dei metodi di modellazione in funzione dell'applicazione considerata è riportata nel diagramma 3 di Figura 68:

7.3 MODELLO AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER LA VISCOSITÀ TURBOLENTA

Per superare alcuni dei limiti dei modelli algebrici di viscosità turbolenta, sono stati sviluppati i *modelli differenziali* che, in generale, prevedono la scrittura e l'integrazione di una o più equazioni differenziali che descrivono, o direttamente la dinamica del tensore degli sforzi di Reynolds, oppure la dinamica di una o più grandezze scalari correlate con la viscosità cinematica turbolenta introdotta da Boussinesq.

Il vantaggio è che le equazioni differenziali di trasporto per queste grandezze consentono, in ogni caso, di valutare la viscosità turbolenta tenendo conto della effettiva storia della corrente. Quando il modello prevede la soluzione di un'unica equazione differenziale (si parla di modelli di ordine uno), la viscosità turbolenta è generalmente correlata ad un'equazione di bilancio per *l'energia cinetica turbolenta*. Fu lo stesso Prandtl che, vent'anni dopo i suoi lavori sulla mixing length, e sfruttando un'intuizione di Kolmogorov, aprì la via ai *modelli differenziali* di turbolenza, formulandone uno basato su di un'equazione di bilancio per la grandezza scalare *energia cinetica turbolenta media specifica* \overline{K} , che si indicherà nel seguito semplicemente con il termine di *energia cinetica turbolenta*, e che è definita come:

$$\overline{K} = \frac{1}{2} (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) \quad [119]$$

Nel nuovo modello differenziale, Prandtl conserva il principio che la viscosità cinematica turbolenta sia esprimibile attraverso il prodotto di una velocità turbolenta $\nu_{(t)}$ e di una lunghezza di mescolamento ma lascia cadere la relazione $\nu_{(t)} = l_m \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|$.

Invece di esprimere la velocità turbolenta attraverso il prodotto del gradiente della velocità media per la lunghezza di mescolamento, assume che tale *velocità di agitazione* sia direttamente proporzionale alla radice quadrata dell'*energia cinetica turbolenta* K :

$$\nu_{(t)} \propto \sqrt{2\overline{K}} \quad [120]$$

Sotto tali ipotesi, quindi, la relazione:

$$\nu_{(t)} = \nu_{(t)} l_m \quad [121]$$

diventa:

$$\boxed{\nu_{(t)} = l \sqrt{\overline{K}}} \quad [122]$$

dove, in luogo di $l_m \sqrt{2}$ si è indicata la lunghezza l che, anche nei modelli ad una equazione differenziale, continua ad essere calcolata con formule opportune, esattamente come avveniva nel modello algebrico di Prandtl per la lunghezza di mescolamento l_m . In questo tipo di modello, dunque, si mantiene il concetto di viscosità turbolenta, ma nella sua espressione non compaiono più termini legati

al gradiente della velocità media, bensì termini contenenti l'energia cinetica turbolenta K , la quale può essere calcolata, in modo del tutto generale, in ogni istante ed in ogni punto del campo di moto, sulla base di un'equazione differenziale di trasporto che si deriva con un procedimento concettualmente semplice, ma piuttosto laborioso.

Di fatto, si tratta di:

- a) moltiplicare l' i -esima componente dell'equazione di bilancio per la quantità di moto, relativa alla velocità istantanea $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, per la componente i -esima u'_i della velocità fluttuante;
- b) sommare le tre equazioni così ottenute e
- c) mediare nel tempo l'equazione risultante.

Ciò che si ottiene è la seguente equazione di bilancio per l'energia cinetica turbolenta media K , per unità di massa:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j}}_{\text{Variaz tot di K}} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{Produzione}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underbrace{\nu \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j}}_{\text{diff.molecolare}} - \underbrace{\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_j u'_j}}_{\text{trasporto turb}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j}}_{\text{diff. press}} \right)}_{\text{diff. press}} - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{dissipazione}} \quad [123]$$

Il primo membro dell'equazione di bilancio [123] rappresenta, come di consueto, la *variazioni totale* di K , e cioè la somma delle derivate temporale e convettiva. Tutti i termini hanno le dimensioni di $[m^2 \cdot s^{-3}]$, ovvero di un'energia per unità di tempo e per unità di massa, e cioè di una potenza per unità di massa. Il primo termine al secondo membro indica la produzione per unità di massa e di tempo (si tratta quindi di una velocità di produzione) di energia cinetica turbolenta operata dal tensore degli sforzi di Reynolds e viene generalmente denotato con P_K , il secondo, la velocità di diffusione molecolare di energia cinetica turbolenta, il terzo, la velocità di trasporto di K da parte delle fluttuazioni della velocità, il quarto, la velocità di diffusione di K per opera delle fluttuazioni della pressione, il quinto, infine, la velocità di dissipazione, che si indica con ϵ_K .

Poi si può osservare che una parte del termine di *produzione* di K è esattamente lo sforzo di Reynolds. Pertanto, in base alla sua definizione

$$S^{(t)}_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$$

all'ipotesi di Boussinesq

$$-S^{(t)}_{ij} = \nu_{(t)} \bar{e}_{ij}$$

questo termine può essere riscritto come:

$$-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \nu_{(t)} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad [124]$$

Se si esclude il termine di *diffusione molecolare*, che coinvolge la variabile K e la viscosità molecolare, che è nota, tutti gli altri termini dell'equazione [124] contengono prodotti, o correlazioni, tra fluttuazioni della velocità e della pressione e devono essere, pertanto, modellati.

Il termine più critico, da questo punto di vista, è quello di diffusione di K per fluttuazione della pressione che, fortunatamente, è sufficientemente piccolo da poter essere o trascurato oppure modellato insieme al termine di trasporto turbolento di K , assumendo che:

$$\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_j u'_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} = -\frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j} \quad [125]$$

dove σ_K è un coefficiente empirico, che prende il nome di *numero di Prandtl* per la diffusione turbolenta.

Per quanto concerne invece il termine di dissipazione di energia cinetica turbolenta, l'analisi dimensionale, nelle ipotesi di Kolmogorov, suggerisce di esprimerlo in funzione di K e di una lunghezza, che è quella di mescolamento l , secondo la relazione:

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = C_D \frac{\bar{K}^{3/2}}{l} \quad [126]$$

dove C_D è un parametro che deve essere assegnato, di volta in volta, in funzione del tipo di corrente.

In conformità a queste ipotesi, l'equazione [126] diventa dunque:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j}}_{\text{Variaz tot di K}} = \underbrace{\nu_{(t)} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2}_{\text{Produzione}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_j} \right)}_{\text{diffusione e trasporto}} - \underbrace{C_D \frac{\bar{K}^{3/2}}{l}}_{\text{dissipazione}} \quad [127]$$

La [127] contiene ora solo grandezze medie e può essere finalmente integrata e fornire, istante per istante, la distribuzione spaziale di K , purché si sia in grado di assegnare condizioni iniziali ed al contorno anche per questa nuova variabile media. Per quanto concerne la superficie di contorno all'ingresso del dominio di calcolo (quella che, in generale, prende il nome di sezione di inflow) è necessario assegnare la distribuzione di K , mentre, sulle eventuali pareti solide, si impone, ovviamente, la condizione di $K = 0$.

A titolo di esempio, vediamo di riscrivere e di discutere l'equazione per K nel caso particolare di *strato limite turbolento sottile* non separato, con moto medio bidimensionale. Negli strati limite sottili, come vedremo più avanti, la componente della velocità normale alla parete, che indichiamo con v , è generalmente piccola rispetto alla componente parallela, u . Inoltre, il gradiente della velocità in direzione parallela alla parete, che indichiamo con x , è piccolo rispetto a quello in direzione normale, y . Nelle ipotesi di strato limite sottile, quindi, la [127] può essere riscritta nella forma:

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{K}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{K}}{\partial y} = \nu_{(t)} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \bar{K}}{\partial y} \right) - C_D \frac{\bar{K}^{3/2}}{l}$$

dove C_D è una costante che ha valori dell'ordine di $0.07 \div 0.09$, mentre il numero di Prandtl assume valore pari all'unità. Nel caso degli strati limite sottili, il modello che consente di determinare la viscosità cinematica turbolenta isotropa $\nu(t)$ in base all'equazione di bilancio per l'energia cinetica turbolenta media K per unità di massa può quindi essere riassunto nella forma seguente:

$$\nu_{(t)} = l \sqrt{\bar{K}}$$

$$\frac{D\bar{K}}{Dt} = \nu_{(t)} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \bar{K}}{\partial y} \right) - C_D \frac{\bar{K}^{3/2}}{l} \quad [128]$$

$$C_D = 0.07 \div 0.09; \quad \sigma_K = 1.0$$

In base alle [128] è quindi ancora necessario prescrivere un'opportuna distribuzione della lunghezza l in funzione della coordinata y , che può essere anche di tipo algebrico. La legge di variazione di l naturalmente dipende dal tipo di corrente considerata.

Nel caso di correnti turbolente di parete è usuale assumere $l = c_1 x_n$, dove x_n è la distanza dalla parete, ed il coefficiente c_1 ha un valore intorno a 0.41. Nel caso di correnti turbolente libere, invece, si può assumere che $l = c\delta$, dove δ è lo spessore locale dello strato vorticoso ed il coefficiente c è compreso tra 0.4 ed 1.0.

A differenza di quelli algebrici, questo modello, grazie all'equazione di trasporto per l'energia cinetica turbolenta media, è in grado di tenere conto della storia della corrente. Il risultato è che, pur con un costo computazionale piuttosto modesto, si possono ottenere indicazioni relativamente affidabili anche, ad esempio, in strati limite che si sviluppano o si rilassano.

D'altro lato, esiste ancora almeno una limitazione piuttosto pesante: non solo non esiste (esattamente come nei modelli tipo *mixing length*) un'espressione di validità generale per la scala di lunghezze l , ma non possono essere rappresentati nemmeno gli effetti di trasporto di tale scala, che sono invece assai importanti in tutte le correnti separate.

7.4 MODELLO A DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI (K- ϵ)

Anche i modelli ad un'equazione (tutti ricavati secondo lo schema di calcolo esposto nei precedenti capitoli per la convezione termica), pur presentando indubbi vantaggi rispetto ai modelli algebrici del tipo *mixing length* soffrono di alcune limitazioni, la più gravosa delle quali consiste nel fatto che i risultati dipendono ancora da una imposizione a priori della scala di lunghezza l .

Invece di prescrivere l a priori, così come \bar{K} è ottenuta da un'equazione di trasporto, si può quindi utilizzare una seconda equazione di trasporto per la lunghezza l , oppure per una qualsiasi variabile che sia correlata contemporaneamente, sia all'equazione per \bar{K} , che è relativamente semplice da trattare e che sembra dunque sensato continuare a risolvere, sia alla lunghezza l . In altri termini, si tratta di definire finire una qualunque variabile del tipo $\bar{K}^a l^b$, e di scriverne l'equazione esatta di trasporto, mediante *manipolazione* delle equazioni di Navier e Stokes. E' evidente che l'equazione risultante conterrà in ogni caso numerosi prodotti di grandezze turbolente che richiederanno, come nel caso dell'equazione per \bar{K} il ricorso alla modellazione. Tra le possibili variabili del tipo $\bar{K}^a l^b$, sono comunemente usate: $\sqrt{\bar{K}l}$ (frequenza turbolenta), $\bar{K}l^2$ (vorticità turbolenta) e $\bar{K}^{3/2}l$ (velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta).

A titolo di esempio, vediamo come si può scrivere un'equazione di bilancio per la variabile *velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta specifica* $\epsilon = \bar{K}^{3/2}l$ una grandezza scalare che già compare nell'equazione per \bar{K} , e che consente di calcolare molto semplicemente l , una volta nota \bar{K} , attraverso il rapporto:

$$l = \frac{\bar{K}^{3/2}}{\epsilon} \quad [129]$$

La scelta di ϵ presenta, rispetto alle altre possibili, il vantaggio di non richiedere termini correttivi in vicinanza di pareti, dal momento che \bar{K} si annulla automaticamente all'annullarsi della velocità a parete, mentre ϵ si mantiene finita. L'equazione per ϵ si può scrivere evidenziando, al solito, i termini di produzione, diffusione e distruzione, che hanno le dimensioni di $[m^2 \cdot s^{-4}]$, ovvero di una potenza per unità di tempo e per unità di massa:

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = P_\epsilon + d_\epsilon - distr_\epsilon \quad [130]$$

Il trasporto di ϵ , e cioè il trasporto di velocità di dissipazione, viene ovviamente calcolato in modo esatto, mentre restano da modellare i termini di produzione di ϵ , P_ϵ , di diffusione d_ϵ e di distruzione $distr_\epsilon$, esattamente come avveniva per l'equazione di bilancio per \bar{K} . Vediamo, in estrema sintesi, come si possono modellare questi termini, e cioè esprimerli in funzione di grandezze medie.

In generale, la produzione di ϵ deve bilanciare la produzione di \bar{K} e, al fine di evitare la crescita illimitata di quest'ultima, si può assumere che:

$$P_{\varepsilon} \propto \frac{\varepsilon}{K} P_K \quad [131]$$

dove il fattore di proporzionalità $\frac{\varepsilon}{K}$ è l'inverso di una scala di tempo, coerentemente con il fatto che la produzione di ε è, di fatto, la *velocità* di distruzione di K .

Pertanto, introducendo il fattore di proporzionalità $c_{\varepsilon 1}$ e riprendendo il termine P_K dalla [131] si scrive l'uguaglianza:

$$P_{\varepsilon} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \nu_{(t)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad [132]$$

Per la diffusione di ε , ancora in analogia con quanto si è fatto per la diffusione di K , si assume che essa sia funzione delle viscosità molecolare e turbolenta e del gradiente di ε , secondo una relazione del tipo:

$$d_{\varepsilon} \propto \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad [133]$$

dove σ_{ε} è un coefficiente del tutto analogo al numero di Prandtl σ_K . Infine, il termine di distruzione di ε deve tendere all'infinito quando K tende a zero per evitare che K possa assumere valori negativi. Questo porta a scrivere:

$$distr_{\varepsilon} \propto \frac{\varepsilon}{K} \varepsilon \quad [134]$$

cioè, introducendo un ulteriore fattore di proporzionalità:

$$distr_{\varepsilon} = c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad [135]$$

L'equazione può quindi scriversi come:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \nu_{(t)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad [136]$$

A questo punto, anche l'equazione di trasporto per ε può essere integrata insieme alle equazioni mediate di Reynolds e all'equazione di bilancio per K , ma richiede anch'essa condizioni iniziali e al contorno per ε , nonché di determinare i valori di alcuni parametri che compaiono nell'espressione dei termini a secondo membro.

Questi valori vengono definiti attraverso un processo di "*calibrazione*" del modello, a partire da quelli, relativi a quella che prende il nome di formulazione standard del modello K - ε , riportati nel seguito.

$$\text{Assunzioni base: } \nu_{(t)} = l \sqrt{K} \quad l = \frac{\overline{K}^{3/2}}{\varepsilon}$$

Viscosità cinematica turbolenta: $\nu_{(t)} = c_\mu \frac{\overline{K}^2}{\varepsilon}$

Equazione per K:
$$\frac{D\overline{K}}{Dt} = \nu_{(t)} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial y} \right) - C_D \frac{\overline{K}^{3/2}}{l}$$

Equazione per ε :
$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\overline{K}} \nu_{(t)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{(t)}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{\overline{K}}$$

Parametri:	C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_K	σ_ε
	0.09	1.1256	1.92	1.0	1.3

I modelli del tipo K- ε rappresentano, almeno dal punto di vista concettuale, un indubbio miglioramento rispetto a quelli ad una sola equazione differenziale: la viscosità turbolenta viene finalmente calcolata sulla base di una velocità turbolenta e di una scala di lunghezze le cui distribuzioni spaziali non sono più assegnate a priori, bensì entrambe calcolate con equazioni di trasporto che tengono conto della storia dell'accelerazione. Anche questi modelli, tuttavia, presentano ancora dei punti deboli: come tutti i modelli per le equazioni mediate di Reynolds, mancano di universalità, il che si traduce nella necessità di adattare caso per caso, le varie "costanti" del modello.

Inoltre, richiedono inevitabilmente distribuzioni iniziali e valori al contorno per K e per ε , che non è sempre facile assegnare in modo rigoroso. Per cercare di superare questi limiti si sono sviluppati anche modelli che prevedono l'integrazione di un'equazione di trasporto per ciascuna delle componenti del tensore degli sforzi di Reynolds (ovviamente sempre in termini di variabili medie). Anche questi ultimi, peraltro, continuano a rimanere poco generali. Bisogna inoltre considerare che, all'aumentare del numero delle equazioni differenziali che va ad aggiungersi alle equazioni mediate di Reynolds, il lavoro di calibrazione dei vari parametri diventa sempre più complicato e l'impegno di calcolo rischia di diventare quasi confrontabile con quello richiesto da altri metodi, quali la *Large Eddy Simulation*.

7.5 FONDAMENTI DELLA "LARGE EDDY SIMULATION (LES)"

L'approccio della *Large Eddy Simulation* (LES), ovvero della discretizzazione spaziale e temporale del moto medio e delle sole strutture turbolente di scala relativamente grande, si situa, sia per dettaglio dei risultati forniti, sia per impegno di risorse di calcolo, in una posizione intermedia fra la soluzione delle equazioni mediate di Reynolds e la soluzione diretta delle equazioni di Navier e Stokes.

L'esposizione rigorosa di questa tecnica richiede il ricorso ad integrali e a trasformate di Fourier delle variabili fluidodinamiche.

Tuttavia, se ci si limita ai soli aspetti fondamentali, è sufficiente richiamare alcuni concetti generali sulla turbolenza quali, ad esempio, la cascata energetica, le scale spazio-temporali ecc. In particolare, si deve ricordare che, all'interno dello spettro d'energia delle varie scale turbolente è possibile riconoscere la funzione energetica di strutture vorticosi che possono essere approssimativamente raggruppate nelle tre bande dimensionali, o scale denominate, rispettivamente:

- - banda energetica (o energy-containing range), contenente le strutture vorticosi turbolente di grande scala,
 - - banda inerziale (*inertial range* o *subrange*), che comprende i vortici di dimensione media,
 - - banda dissipativa (*dissipation range*), relativa alle strutture vorticosi di piccola scala.
- significato più chiaro ai termini "grande" e "piccolo", riferiti alle dimensioni dei vortici.

Su tali basi, possiamo infatti affermare che le strutture vorticosi di scala maggiore (i grandi vortici):

- - hanno natura convettiva e numeri di Reynolds caratteristici relativamente elevati (tanto che, per instabilità, sono in grado di produrre vortici di dimensioni più ridotte),
- - hanno una scala temporale paragonabile a quella del moto medio,
- - hanno origine e tipologia fortemente dipendenti dal moto medio, ovvero dal tipo e dalla geometria del dominio di moto (o, in altre parole, dal tipo di corrente),
- - estraggono energia cinetica dal moto medio per produrre energia cinetica turbolenta,
- - hanno forma e dimensione poco dipendenti dal numero di Re della corrente media,
- - sono generalmente anisotrope.

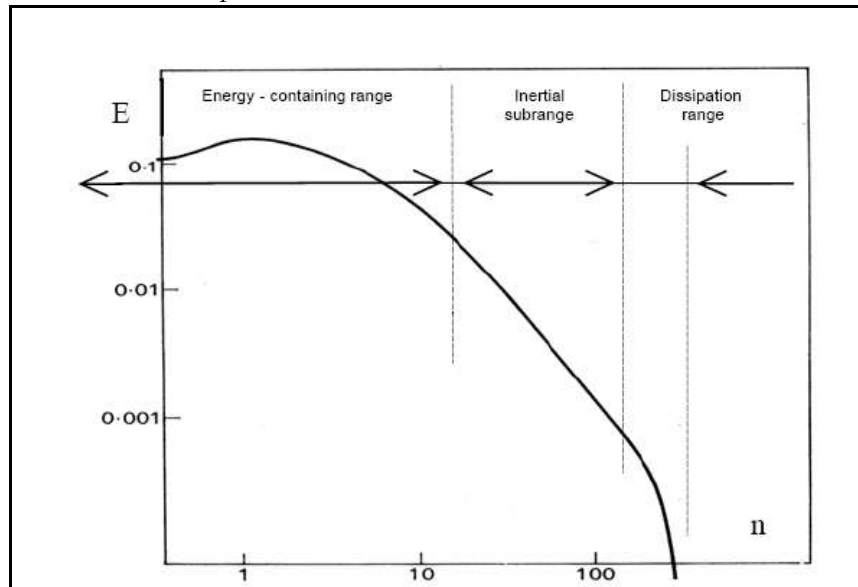


Figura 69: Le tre bande caratteristiche dello spettro d'energia della turbolenza: scale energetiche, inerziali e dissipative

Le strutture turbolente di dimensioni intermedie:

- - sono generate dall'instabilità non lineare delle grandi strutture,
- - sono anch'esse instabili, in quanto caratterizzate da numeri di Reynolds ancora relativamente elevati,
- - hanno essenzialmente la funzione di trasferire ai vortici piccoli l'energia cinetica turbolenta prodotta, e ricevuta, da quelli grandi;

I vortici più piccoli:

- - nascono da interazioni non lineari fra quelli grandi e quelli intermedi,
- - sono stabili, in quanto caratterizzati da numeri di Re bassi (dell'ordine dell'unità),
- - hanno natura dissipativa e convertono in calore, attraverso la viscosità, l'energia cinetica turbolenta loro trasmessa dai vortici intermedi,
- - hanno vita media molto più breve degli altri vortici e decadono con legge esponenziale,
- - hanno tempi caratteristici molto brevi e di conseguenza, come si è già detto, una dinamica praticamente indipendente da quella dei grandi vortici e del moto medio,
- - hanno dimensioni relative rispetto a quelle dei grandi vortici che dipendono quasi esclusivamente dal numero di Re della corrente,
- - hanno una struttura più universale (ovvero indipendente dal tipo di corrente) e relativamente isotropa.

E' da queste considerazioni che nascono le idee fondamentali della *Large Eddy Simulation*, che possono essere riassunte in:

- 1) i vortici *grandi e medi* devono essere necessariamente (e quindi vengono) *risolti* esplicitamente, come in una DNS,
- 2) soltanto i vortici *piccoli* si prestano ad essere (e quindi vengono) *modellati*.

Mentre con l'approccio delle equazioni mediate di Reynolds non si distingue fra strutture grandi e piccole, e si è costretti ad usare modelli che devono quindi simulare gli effetti della totalità dello spettro delle dimensioni spaziali delle strutture turbolente, e che pertanto non avranno mai il requisito dell'universalità, con la LES si può sperare che, ricorrendo alla modellazione dei *soli* vortici piccoli (quelli grandi sono, infatti, risolti direttamente), questo possa essere al contempo non eccessivamente complicato e sufficientemente universale, dal momento che più universali sono le proprietà dei vortici che richiedono la modellazione.

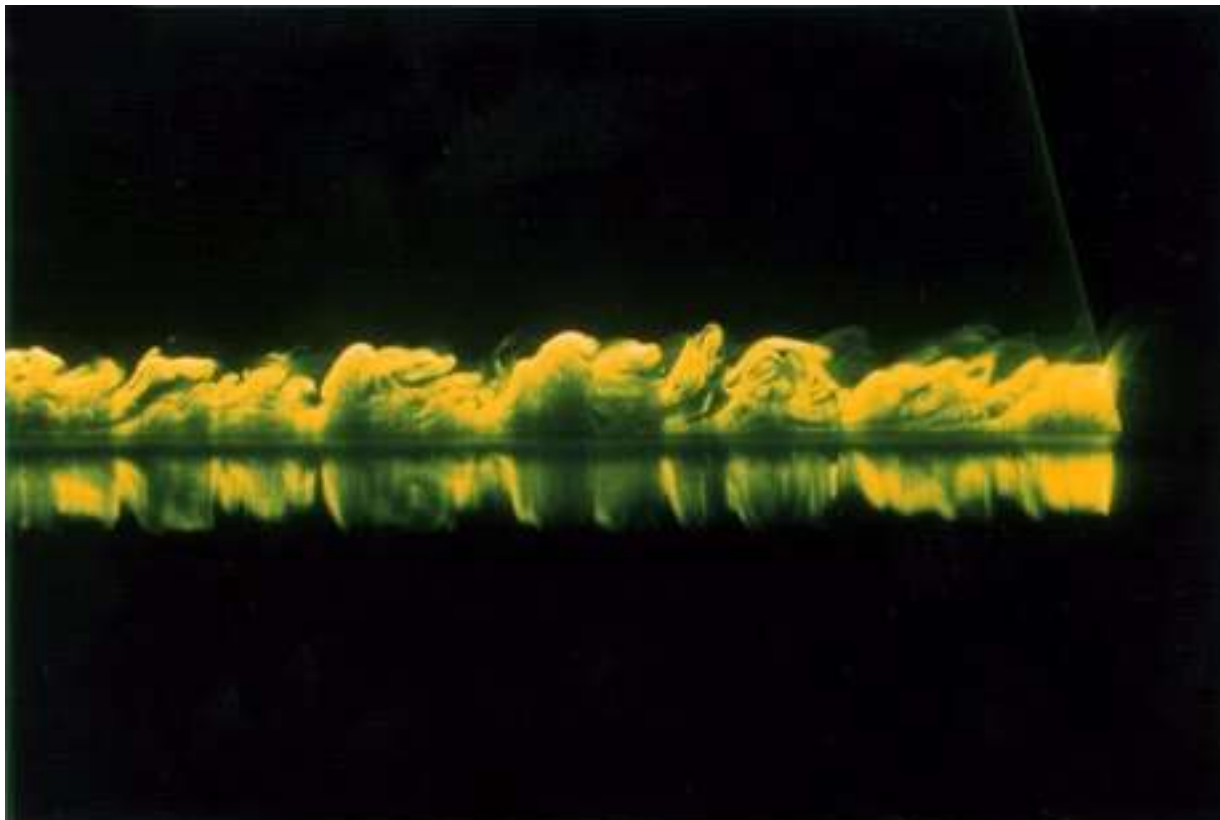


Figura 70: Strato limite turbolento in Large Eddy Simulation

E anche l'isotropia, implicita nel concetto dello *scalare* viscosità turbolenta, è più ragionevolmente ipotizzabile nel caso dei vortici di piccola scala. La LES quindi, seppure meno accurata, è però molto meno costosa della DNS, soprattutto se i numeri di Reynolds in gioco sono elevati e, per quanto concerne le informazioni più significative, ovvero quelle relative al moto medio e alle strutture convettive di grande scala, è praticamente altrettanto affidabile, in quanto questi sono calcolati esplicitamente.

Il processo di derivazione delle equazioni della LES, a partire da quelle di Navier- Stokes, è analogo a quello utilizzato nell'approccio delle equazioni mediate di Reynolds, salvo che, in questo caso, sono completamente diversi il concetto e la definizione dell'operatore di media. Per le equazioni mediate di Reynolds si è eseguita un'operazione di media, o di *filtraggio temporale* delle variabili istantanee, al fine di separare la parte discretizzata e *risolta* direttamente con le equazioni del moto medio, da quella fluttuante, che veniva *modellata*.

Qui, al contrario, alle medesime variabili si applica un *filtraggio spaziale*, per separare la parte spaziale discretizzata e *risolta* direttamente, dalla parte spaziale, che viene ancora modellata.

L'operazione di filtraggio più intuitiva (sebbene non definibile in modo molto rigoroso dal punto di vista matematico) è quella implicitamente operata dal "volumetto di controllo", ovvero dal volume racchiuso da ciascun elemento o cella della discretizzazione spaziale.

Nel caso della LES, si adottano dimensioni delle celle che non sono sufficientemente piccole da permettere di descrivere in dettaglio la dinamica di *tutte* le strutture turbolente (altrimenti si ricadrebbe, evidentemente, nei medesimi problemi della DNS) e, pertanto, le strutture di scala minore vengono parzialmente o completamente *filtrate* dalla soluzione.

E, così come avveniva per le fluttuazioni temporali nelle equazioni mediate di Reynolds, gli effetti delle strutture spaziali *non risolte* vengono reintrodotti nel modello fisico-matematico attraverso relazioni (o modelli) aggiuntivi. Nella LES, le equazioni per la quantità di moto (da integrarsi ovviamente a sistema con l'equazione di continuità, anch'essa filtrata) sono del tipo:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i u_j} \right] + f_i \quad [137]$$

Equazione in cui, nel caso qui esaminato di fluidi a proprietà uniformi e costanti, il termine "viscoso" può anche essere riscritto nella forma, del tutto equivalente, seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}$$

Le [137], pertanto, sono formalmente identiche alle equazioni mediate di Reynolds, salvo che la barretta orizzontale qui indica la componente direttamente *risolta*, e cioè residua dopo l'operazione di filtraggio spaziale, mentre l'apice indica la componente filtrata, non risolta, o "sottogriglia".

Nel caso della LES, tuttavia, il tensore di componenti $\overline{u_i u_j}$, che ha il significato di "sforzo sottogriglia specifico", richiede evidentemente modelli diversi da quelli impiegati per modellare il tensore degli sforzi di Reynolds.

Inoltre si deve ricordare che, mentre nelle equazioni mediate nel tempo, i termini contenenti le derivate temporali delle grandezze medie erano presenti soltanto nel caso di moto medio non stazionario, qui sono sempre presenti: infatti, anche se il moto medio è stazionario, le strutture turbolente grandi e quelle intermedie, che devono essere risolte direttamente, sono, in ogni caso, non stazionarie.

E allo stesso modo, anche nel caso di correnti medie bidimensionali, le equazioni della LES (al contrario di quelle mediate di Reynolds) vanno sempre risolte in tre dimensioni, dal momento che non esiste struttura turbolenta che non possieda la caratteristica della tridimensionalità.

7.6 ESEMPIO: SIMULAZIONE DI UNO SWIRLER

La simulazione del bruciatore in questione è stata effettuata tramite il programma di calcolo ad elementi finiti "FEMLAB²⁴", prodotto e distribuito dalla software house svedese COMSOL®. Il programma di calcolo possiede un "model navigator" dotato al suo interno di una serie di moduli applicabili per analisi di vario tipo, dalla fluidodinamica alla meccanica strutturale.

All'interno di ognuno di questi sono a loro volta presenti dei sottomoduli contenenti gli algoritmi di risoluzione delle equazioni differenziali tipiche del problema che s'intende analizzare.

Seguendo la logica di soluzione del programma di calcolo utilizzato, l'analisi e la modellazione del problema affrontato sono state realizzate seguendo una successione di procedure, partendo dalla realizzazione della geometria fino ad arrivare al plottaggio e al post-processamento dei risultati.

Le diverse fasi sono analizzate in dettaglio nei successivi paragrafi e costituiscono i passi necessari per sviluppo di un generico modello di calcolo numerico, a prescindere dal software utilizzato.

²⁴ Il CAD FEMLAB® ora prende il nome di COMSOL MULTIPHYSICS®

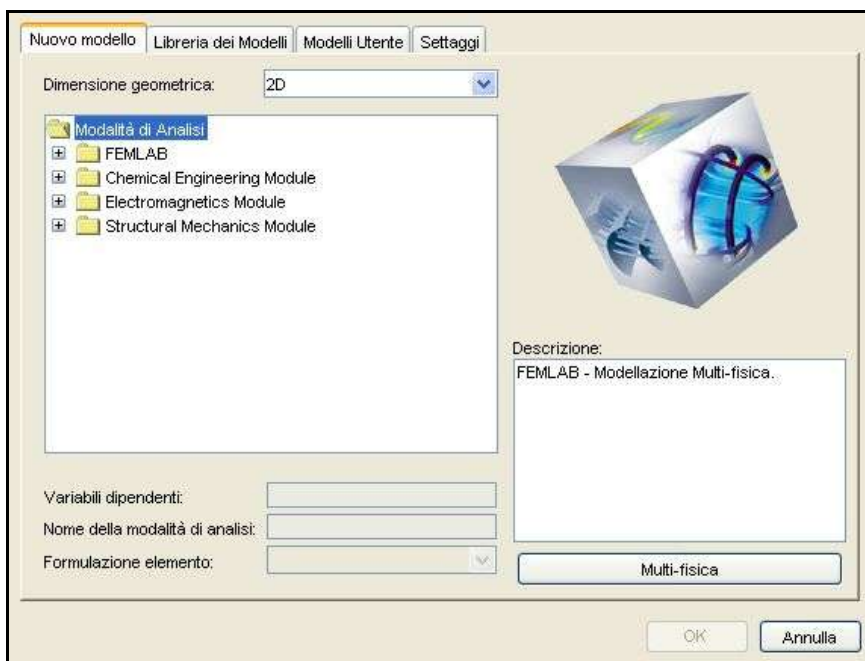


Figura 71: Finestra iniziale FEMLAB

7.6.1 COSTRUZIONE DELLA GEOMETRIA

Il primo passo inevitabile per la realizzazione del modello risiede nella costruzione della geometria del sistema. In particolare ai fini del calcolo non è stato necessario considerare il sistema per la sua lunghezza effettiva, ma, ai fini di un più scrupoloso utilizzo delle risorse di memoria, si è analizzata la sezione finale del bruciatore più o meno a ridosso della zona in cui è presente lo swirler. Il programma di calcolo è dotato di un'interfaccia CAD per la costruzione delle geometrie.

Tuttavia questa si è dimostrata inadeguata ai fini della realizzazione dello swirler il quale presenta una geometria troppo complessa per essere eseguita con le primitive messe a disposizione dal software.

Per la costruzione della geometria completa si è allora proceduto separatamente. Come prima cosa è stato modellato lo swirler, utilizzando un CAD adeguato (*Solid Works®*), la cui immagine è riportata in Figura 72.

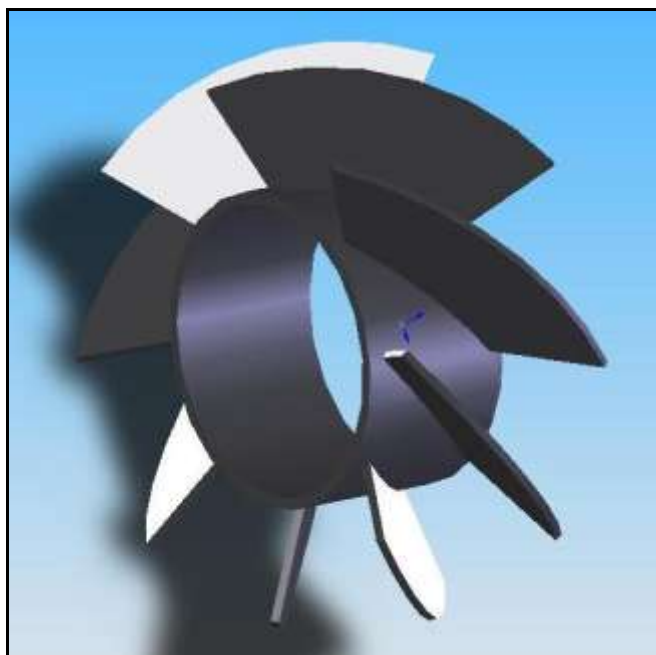


Figura 72: Modellazione geometrica dello swirler

Successivamente il file IGES²⁵ relativo allo swirler è stato importato all'interno dell'interfaccia grafica del software e su di esso è stata completata la geometria complessiva.

Questa è suddivisa in due zone: il primo tratto, sul quale è stato inserito lo swirler, è caratterizzato da due cilindri concentrici che rappresentano il condotto del bruciatore entro cui fluisce il comburente.

Il secondo tratto, caratterizzato da un cilindro pieno, rappresenta un volume di controllo entro il quale si può analizzare il campo di moto del fluido in uscita dal bruciatore, e che simula una porzione del reattore.

La geometria completa è riportata in Figura 73.

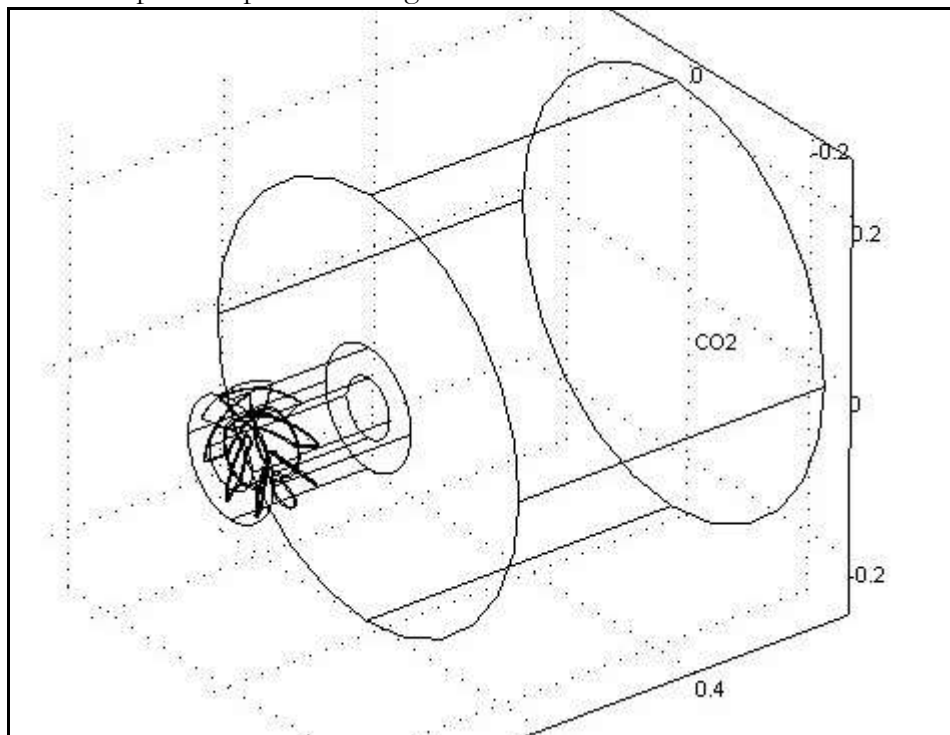


Figura 73: Geometria completa del sistema studiato

7.6.2 EQUAZIONI DEL MODELLO, SOTTODOMINI E CONDIZIONI AL CONTORNO

Il passo successivo alla costruzione del modello geometrico, è stato scegliere il sistema di equazioni differenziali che meglio approssima il comportamento del sistema nelle sue condizioni di funzionamento, imponendo i giusti parametri sia per quanto riguarda il sottodominio sia per quanto riguarda le condizioni al contorno.

In base alle rilevazioni sperimentali portate a termine sul bruciatore, le condizioni operative sono risultate le seguenti:

- Il fluido, ovvero il comburente, entra dalla sezione iniziale con una velocità di circa 20 m/s, in accordo con la portata di progetto;
- La densità del fluido è stata approssimata ad un valore di circa 1 Kg/m³, in funzione della temperatura e di una media pesata effettuata sulle densità dei componenti facenti parte della miscela gas-ossigeno (che caratterizza il comburente in esame);
- La viscosità cinematica è stata fissata sul valore di 1*10⁻⁵ m²/s in accordo con i valori tipici riportati in letteratura;
- La pressione all'interno del volume di controllo, assimilabile ad una porzione del reattore, è stata fissata ad un valore di 3 bar.

²⁵ Il formato IGES è riconosciuto da molti programmi come un formato standard per la modellizzazione solida.

Note le condizioni operative del sistema, sono stati calcolati due parametri adimensionali di fondamentale importanza, allo scopo di determinare il regime di moto nel quale si trova il fluido, ovvero il numero di Mach e il numero di Reynolds. Per il primo si è ottenuto che:

$$Ma = \frac{w}{c_s} = 0.04$$

dove si ha che:

$w = 20 \text{ m/s}$ è la velocità del fluido;

$c_s = \sqrt{kRT} = 480 \text{ m/s}$ è la velocità del suono;

e, considerando il comburente come un gas perfetto, ad una temperatura $T = 300^\circ\text{C}$ si ha che:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1.4 \quad R = 287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}.$$

Per il secondo invece il valore ottenuto è il seguente:

$$Re = \frac{w \cdot (D_e - D_i)}{\nu} = 72000$$

Dall'analisi di questi due parametri si è arrivati alle seguenti conclusioni:

- Per prima cosa, si è potuto, con buona approssimazione, considerare il fluido “*incomprimibile*” (ovvero si sono trascurate le variazioni di densità) essendo il numero di Mach molto minore dell'unità²⁶. Questo è giustificabile osservando che le velocità in gioco nell'efflusso non sono particolarmente elevate.
- In secondo luogo, dato il valore assunto dal numero di Reynolds, si capisce come il regime di moto sia sicuramente turbolento.
- Infine il fluido in questione è considerato newtoniano, essendo una miscela gassosa; ciò comporta l'indipendenza della viscosità dal gradiente di velocità.

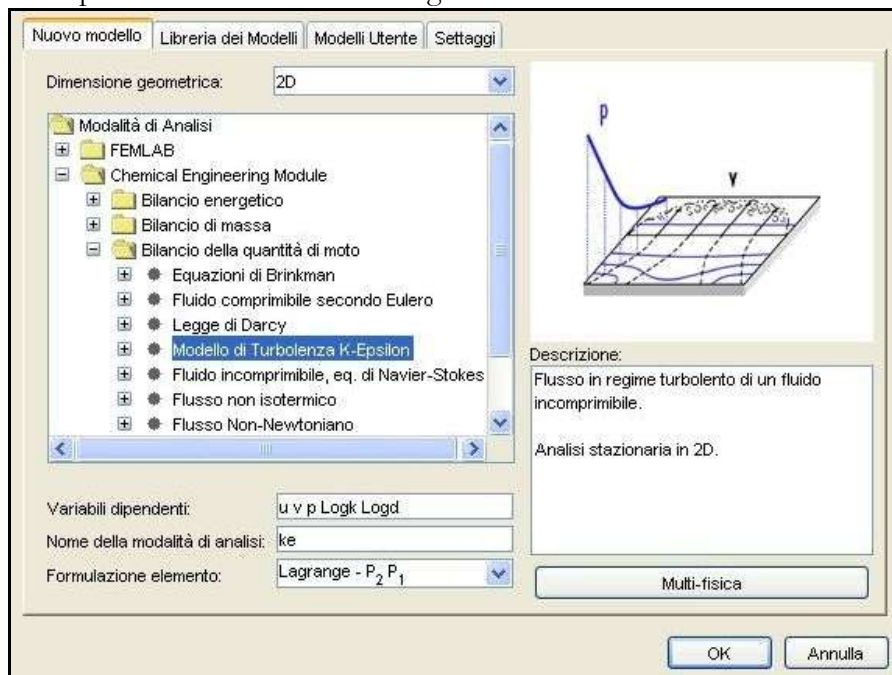


Figura 74: Finestra di selezione dei sottomoduli di risoluzione

²⁶ In realtà si parla di incomprimibilità quando $Ma < 0.3$, condizione il che è ampiamente soddisfatta nel caso in esame.

Sotto queste condizioni, il modulo adottato per la risoluzione numerica del problema è il “*modello a due equazioni differenziali k-ε*”, inserito all’interno del “*Chemical Engineering module*”.

Come già osservato nel capitolo quinto, il modello k-ε è uno dei migliori per lo studio dei fenomeni che concernono la turbolenza. Le equazioni caratteristiche di questo approccio sono l’equazione di continuità e le equazioni di bilancio di quantità di moto, inglobando in queste anche le due equazioni ausiliarie sull’energia cinetica turbolenta “k” e sull’energia di dissipazione turbolenta “ε”, necessarie per la chiusura del problema:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p / \rho + \nabla \cdot \left[(\nu + \nu_T) \nabla \mathbf{u} \right] + \mathbf{F} / \rho$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) k = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right]$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon = c_{\varepsilon 1} \varepsilon / k \cdot \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \varepsilon^2 / k + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right]$$

Individuato il modulo per lo studio si è effettuato il settaggio del sottodominio, in accordo con i valori derivanti dalle specifiche precedentemente elencate:

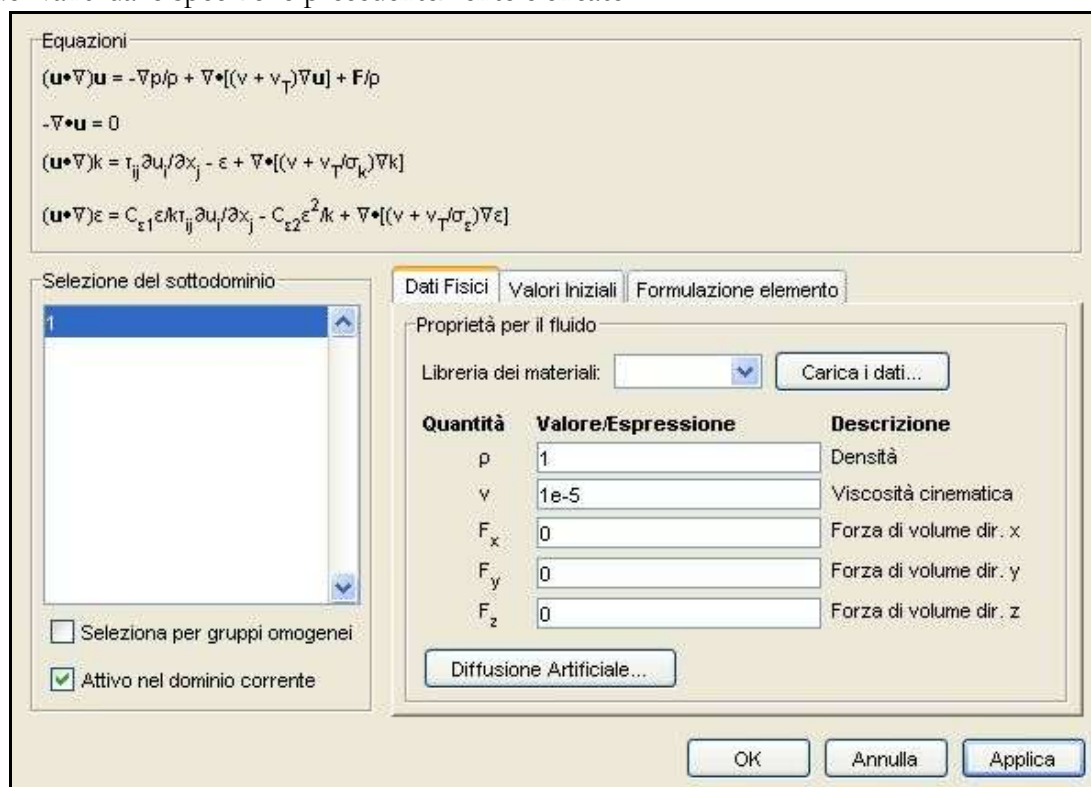


Figura 75: Finestra per il settaggio dei sottodomini

A seguire sono state impostate le condizioni al contorno (“boundary conditions”) per le quali il software offre diverse tipologie (Figura 76). Per la fisica del problema affrontato le condizioni al contorno imposte si possono riassumere come segue:

- Condizione di velocità assiale nella sezione d’ingresso, pari a 20 m/s;
- Condizione di aderenza (no slip) su tutte le superfici solide che costituiscono le pareti dei condotti e le palette dello swirler;
- Condizione di pressione pari a 3 bar nella sezione finale del sistema.

7.6.3 LA MESH DEL MODELLO

Una volta stabilite tutte condizioni fisiche del modello, si è potuto passare alla realizzazione della mesh. Quest'ultima è stata realizzata con elementi tetraedrici che meglio si adattano a casi di geometrie 3D, diversamente dalle mesh mappate con elementi quadrangolari.

Il problema esaminato, per via della sua geometria piuttosto complessa in prossimità dello swirler, presenta un elevato numero di gradi di libertà che hanno creato non pochi problemi per la gestione della memoria del calcolatore utilizzato. I valori impostati per la definizione degli elementi della mesh sono riportati nella Figura 77.

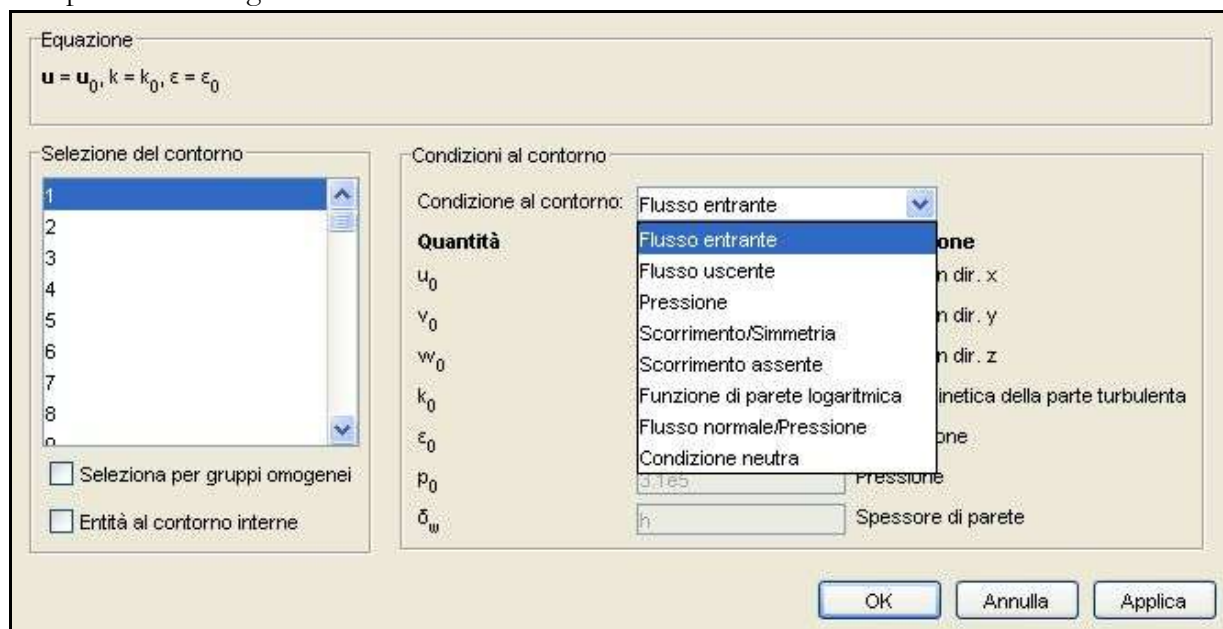


Figura 76: Finestra per il settaggio delle condizioni al contorno

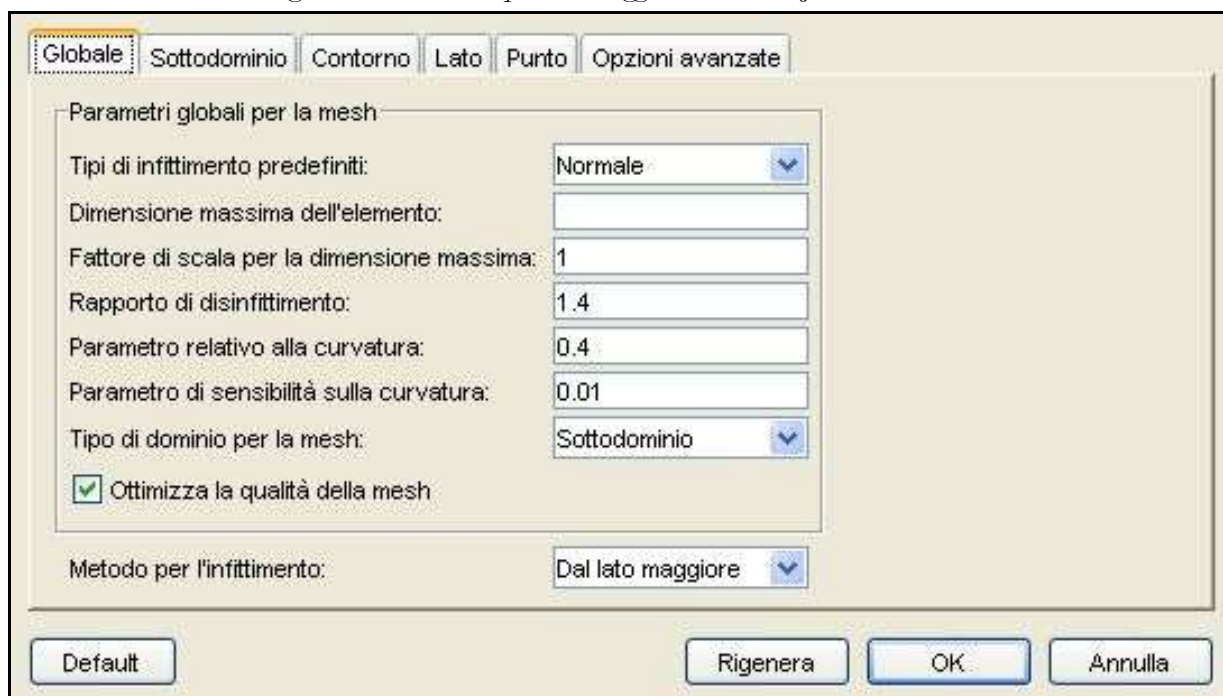


Figura 77: Finestra di settaggio per i parametri della mesh

Imponendo tali valori la mesh del modello è risultata come riportato in Figura 78.

Da questa si può osservare che la zona in cui è presente lo swirler risulta molto più densa di elementi, essendo questa suddivisa in tanti piccoli sottodomini caratterizzati dai vani compresi tra le palette. Ciò si osserva meglio nell'ingrandimento riportato in Figura 79.

Tuttavia nonostante l'apparente bontà della mesh, il numero delle maglie non è quello ottimale per ottenere risultati di precisione elevata, per i quali necessiterebbero mesh con milioni di gradi di libertà.

In ogni caso l'analisi è risultata pienamente soddisfacente con il livello di approssimazione considerato e ha restituito indicazioni importanti sulle distribuzioni del campo di velocità e di pressione del sistema studiato.

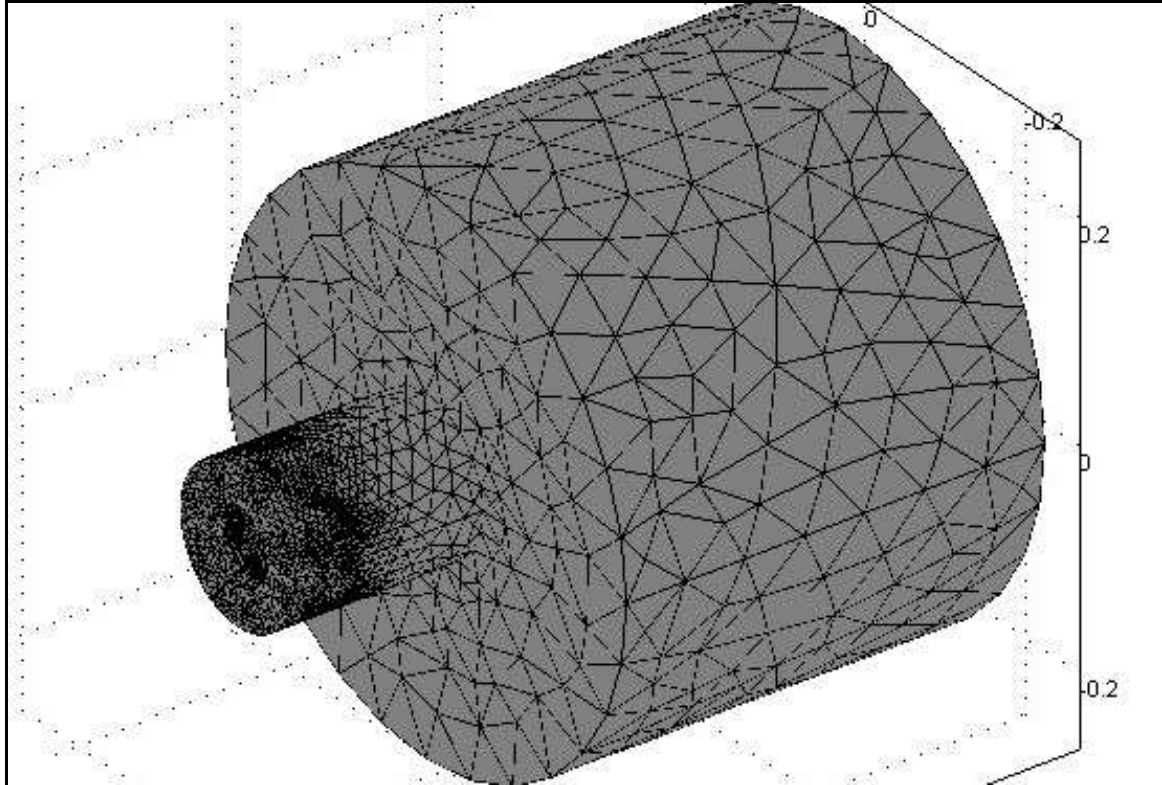


Figura 78: Mesh del modello

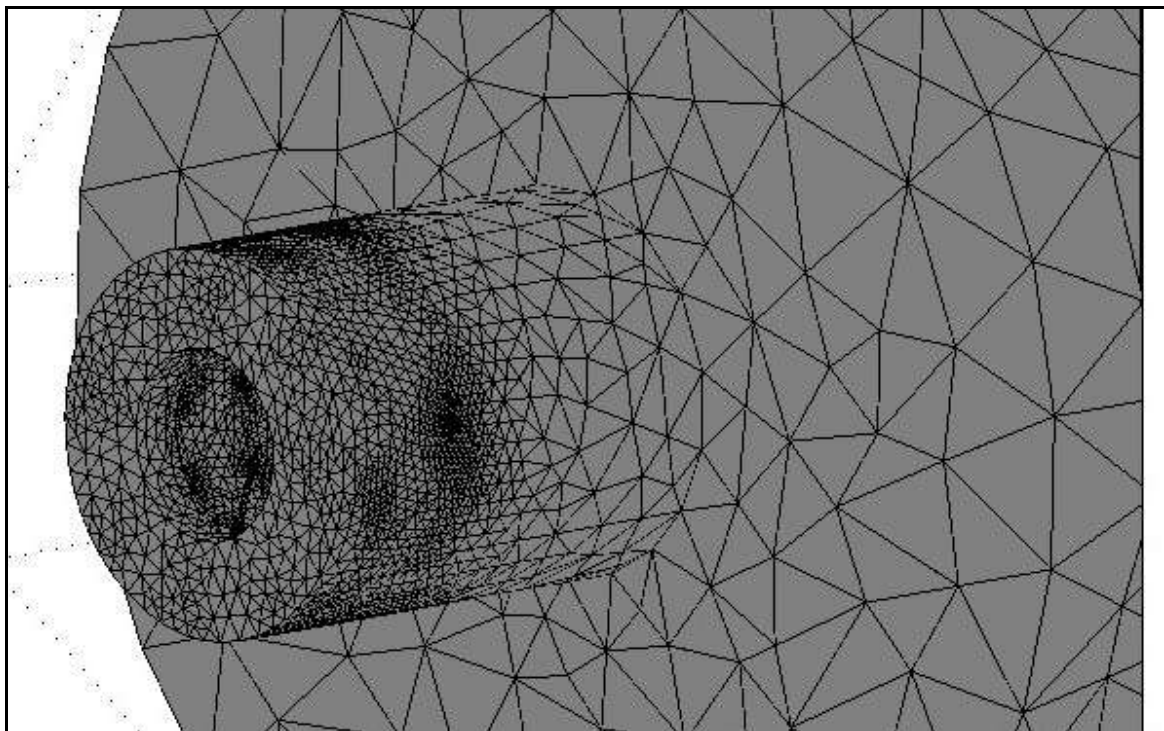


Figura 79: Ingrandimento della mesh nella zona dello swirler

7.6.4 SOLUZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA

Questa fase rappresenta sicuramente il punto cruciale nella risoluzione del problema. Il software utilizzato possiede di default una serie di solutori i quali possono essere opportunamente gestiti in funzione dell'entità del calcolo e della tipologia di problema da risolvere. In breve i solutori possono essere suddivisi come segue:

- Solutori lineari: per problemi semplici di carattere lineare;
- Solutori non lineari: per problemi complessi non lineari;
- Solutori diretti: ricavano la soluzione con metodo diretto ma con eccessivo utilizzo di memoria;
- Solutori iterativi: ricavano la soluzione in modo iterativo, sfruttando meno memoria, ma impiegando più tempo.

Normalmente per problemi come quello affrontato, in cui analizzano problemi di turbolenza con geometrie 3D, il solutore che meglio si presta per la risoluzione è sicuramente di tipo non lineare e iterativo, da un lato perché le equazioni caratteristiche del moto sono non lineari, dall'altro perché il solutore iterativo non presenta gli oneri di calcolo che presenterebbe un solutore diretto (soprattutto nel caso di geometrie 3D).

Tuttavia a causa delle numerose iterazioni che questo tipo di solutore si trova ad eseguire per risolvere il sistema di equazioni in questione, si è optato, in definitiva, per un solutore non-lineare diretto, che pur richiedendo notevole risorse di memoria ha consentito una maggiore rapidità di calcolo.

Com'è riportato in Figura 80, l'analisi effettuata risulta essere “*stazionaria non lineare*” ed il solutore prescelto risulta essere l'UMFPACK il quale è stato settato limitando il fattore di smorzamento per far convergere più rapidamente la soluzione del problema:

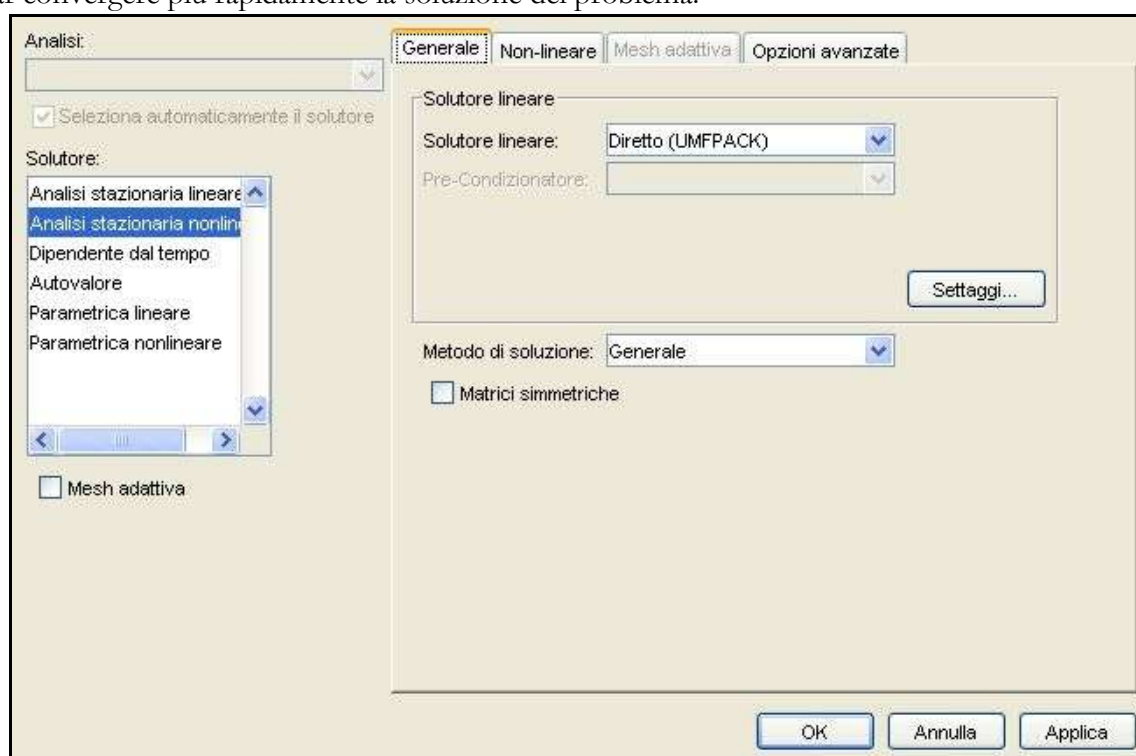


Figura 80: Finestra di gestione del solutore

Infine, il “*metodo di soluzione*” delle equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) è fissato sulla modalità “*generale*”, necessaria quando vengono affrontati problemi di natura non lineare, o semi-lineare.

7.6.5 PLOTTAGGIO DEI RISULTATI E POST-PROCESSAMENTO

Questa è la fase finale del processo di modellazione la quale consiste nel plottare i risultati ottenuti dalla simulazione e di effettuare il loro post-processamento.

Il software utilizzato ha, nel post-processamento dei risultati, uno dei suoi punti forti in quanto presenta un'interfaccia di gestione semplice da utilizzare, ma allo stesso tempo completa. Il primo risultato che è stato plottato, riporta la distribuzione del modulo del campo di velocità, analizzato in una serie di sezione trasversali del sistema ed è rappresentato in Figura 81. Si evince chiaramente dalla figura che il fluido entrando con una velocità di circa 20 m/s subisce un'accelerazione all'interno dello swirler a causa della stazionarietà del problema. Infatti, la conservazione della portata di massa comporta il conseguente aumento della velocità al ridursi della sezione.

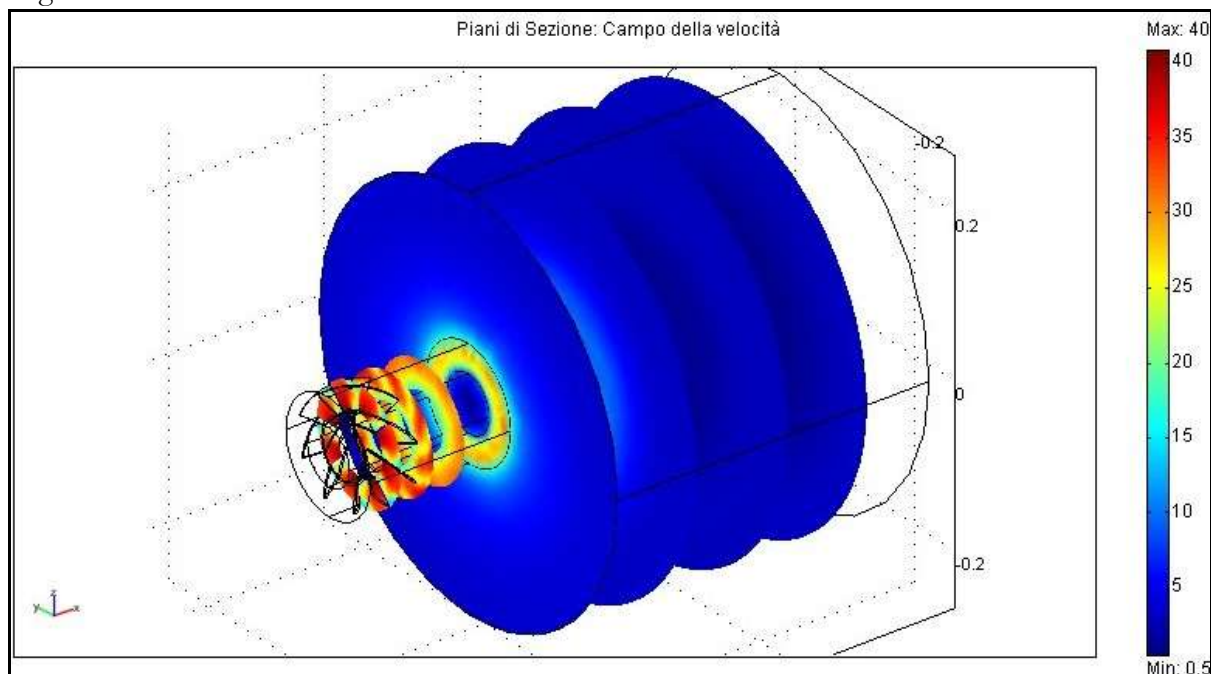


Figura 81: Piani di sezione: campo di velocità

All'interno del reattore il fluido incontra un ambiente di grosse dimensioni espandendosi e rallentando bruscamente fino a valori della velocità di 1 m/s circa. Il tutto appare più chiaro nella seguente sezione longitudinale:

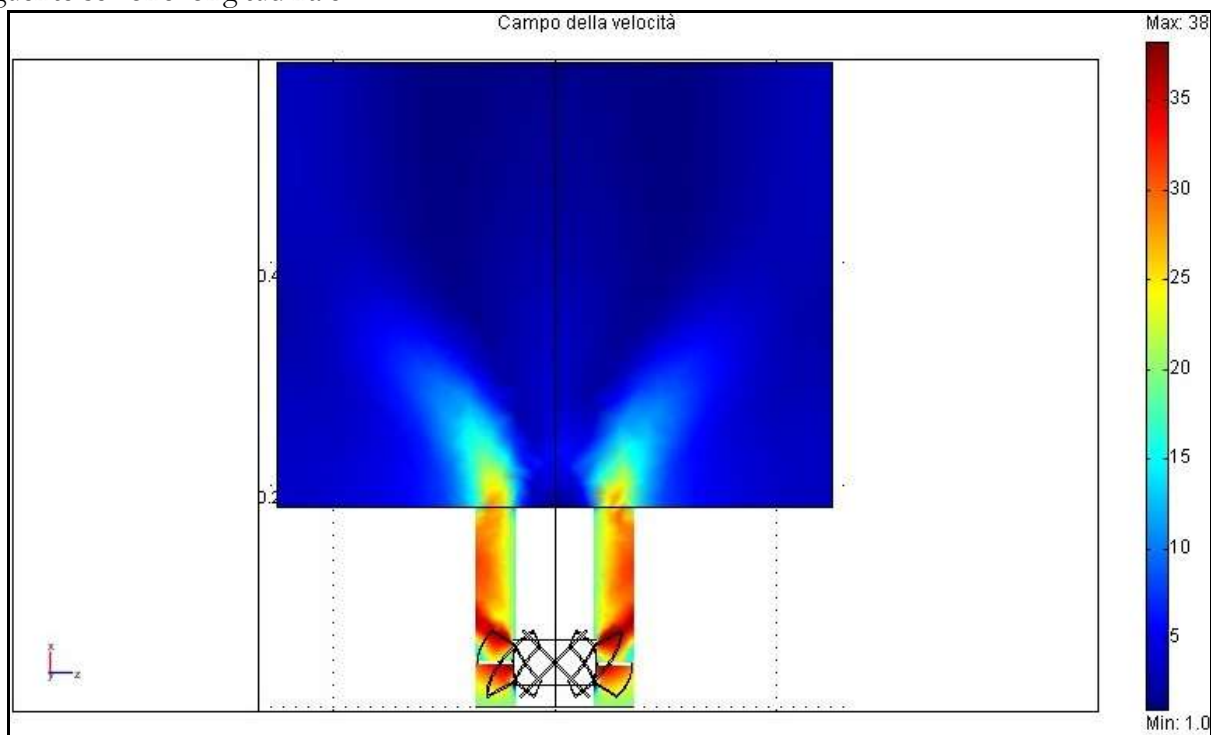


Figura 82: Sezione longitudinale del modello

Dalla Figura 82 risulta evidente l'espansione del getto fluido (con andamento tipicamente conico) al momento dell'ingresso nel reattore, con conseguente diminuzione di velocità.

Per quanto invece riguarda la direzione del campo di moto, si sono andati ad analizzare le linee di flusso²⁷ e i vettori velocità, come mostrato nelle seguenti immagini.

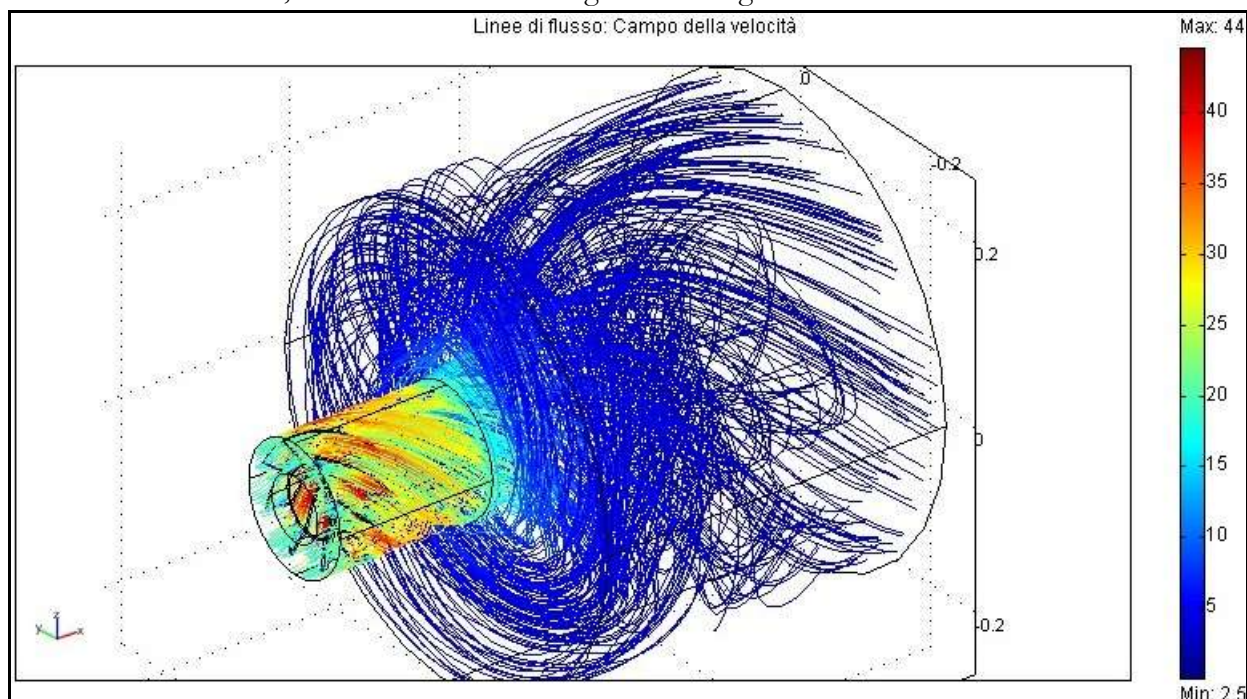


Figura 83: Linee di flusso

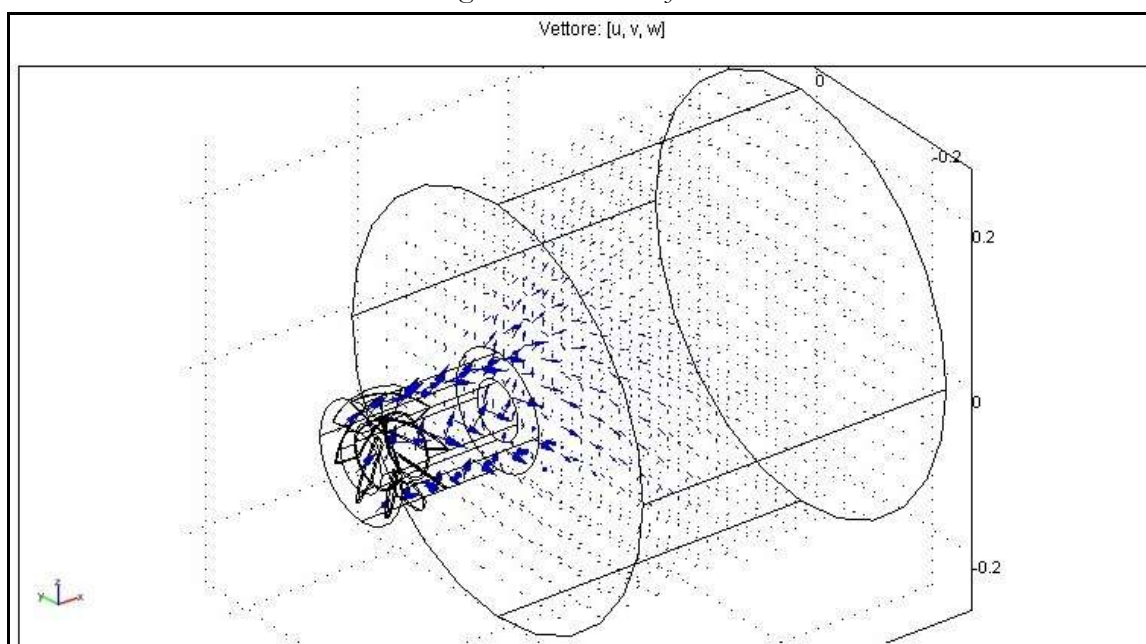


Figura 84: Vettori velocità

Risulta in questo caso ben visibile il moto a spirale tipico di un flusso swirlato. In particolare il moto impresso dalla palettatura crea, come accennato nel capitolo precedente, una zona di depressione interna con conseguente sviluppo di una zona di ricircolo centrale (“*Central Toroidal Recirculation Zone*”) che riporta il fluido verso la sezione d'uscita del bruciatore.

²⁷ Si ricorda che per linea di flusso (*streamline*) s'intende la linea che si mantiene tangente in ogni punto al vettore velocità.

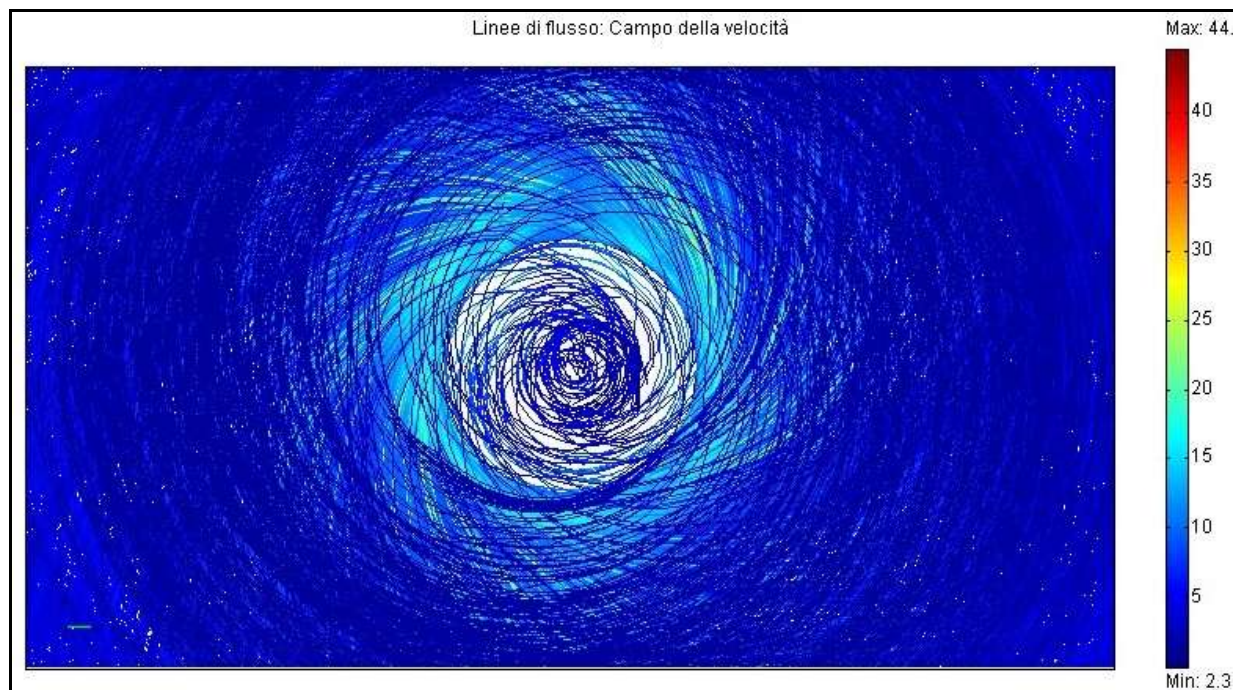


Figura 85a: Ingrandimento della zona di formazione del vortice (posteriore)

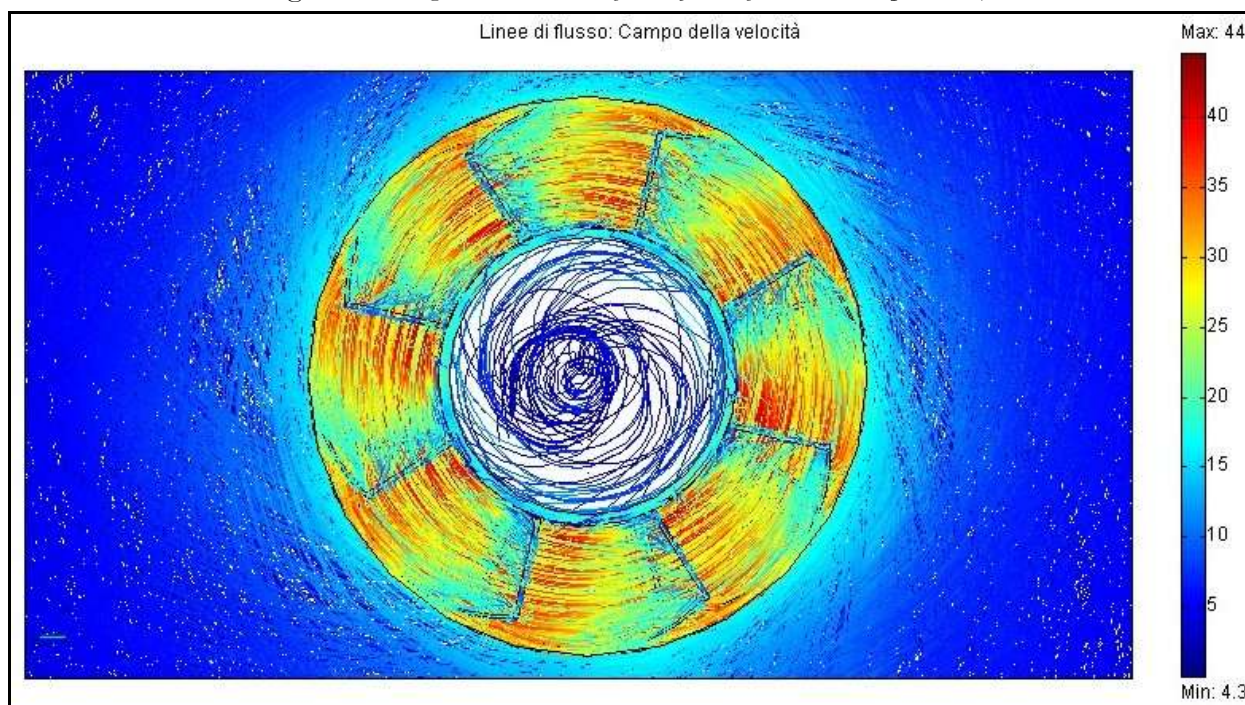


Figura 85b: Ingrandimento della zona di formazione del vortice (anteriore)

Eseguendo in prossimità di quest'ultima (ad una distanza di circa 1 cm) un'analisi della distribuzione radiale della componente assiale della velocità, è possibile osservare su un generico piano longitudinale della geometria, un andamento del tipo riportato in Figura 86.

E' facile osservare come nella zona centrale, ovvero all'interno del nucleo del vortice, il modulo della velocità assiale assuma valori negativi. Ciò, ovviamente, è collegato all'inversione del flusso causata dai gradienti pressori che si originano in suddetta zona.

I valori trovati sono aderenti ai risultati ottenuti per via sperimentale, tramite LDV e concordano con i numerosi casi analoghi ritrovabili in letteratura. I valori inerenti all'effetto di ricircolo ottenuti con la simulazione inoltre risultano concordanti con il grado di swirl posseduto dal bruciatore.

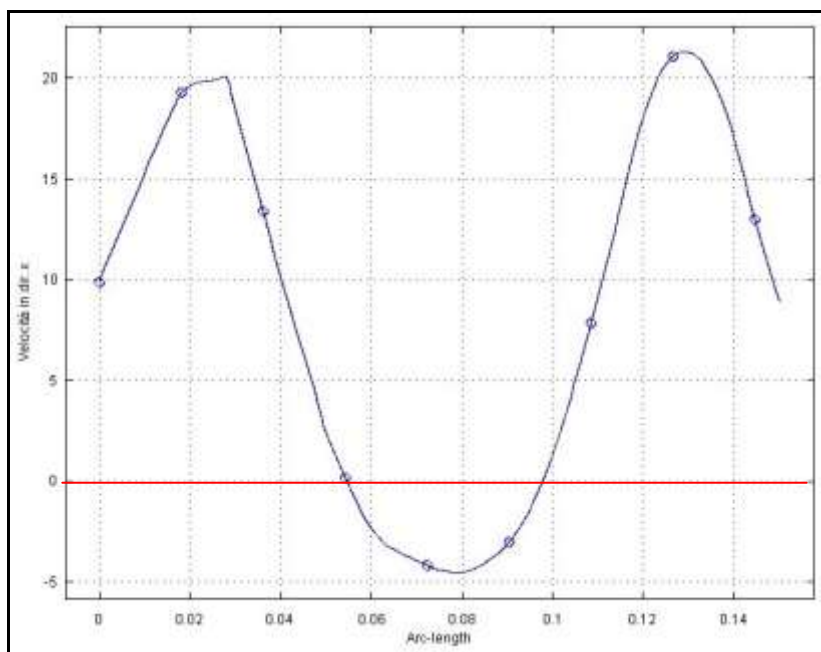


Figura 86: Distribuzione radiale della componente assiale della velocità all'uscita del bruciatore

Si è, calcolato il numero di swirl per il sistema in esame basata sulla geometria del sistema, ottenendo che:

$$S = \frac{2}{3} \left[\frac{1 - (R_h/R)^3}{1 - (R_h/R)^2} \right] \tan \alpha = 0.77$$

Secondo la suddivisione effettuata nel sesto capitolo in merito ai diversi gradi di effetto swirl, si osserva che il sistema esaminato rientra nel caso di un “*medium swirl*”, essendo il numero di swirl compreso tra 0 ed 1.

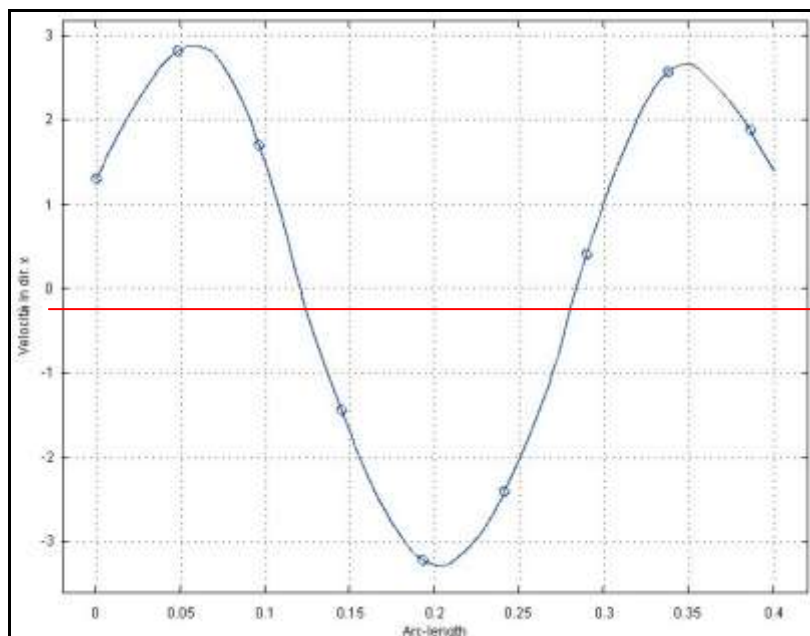


Figura 87: Distribuzione radiale della componente assiale della velocità a 20 cm dalla sezione d'uscita del bruciatore

In questa categoria, infatti, rientrano tutti i sistemi in cui l'effetto è tale da generare un gradiente di pressione assiale e radiale sufficientemente intenso da formare vortici di rientro in cui viene ricircolata una certa percentuale di massa fluida.

Ciò, quindi, corrisponde perfettamente a quanto ottenuto dalla simulazione. La stessa analisi è stata successivamente effettuata a distanze crescenti rispetto alla sezione d'uscita del bruciatore per analizzare la permanenza e la lunghezza della zona di ricircolo.

Come riportato in Figura 87 ad una distanza di circa 20 cm dalla bocca del bruciatore si ha ancora un notevole effetto di ricircolo evidenziato dai valori assunti dalla componente assiale della velocità, i quali permangono negativi.

Questo denota un elevato grado di miscelazione tra comburente e combustibile, il quale viene, in una buona percentuale, ricircolato dai vortici toroidali del comburente verso la zona d'iniezione, dando origine a tutti gli effetti benefici che sono già stati più volte sottolineati riguardo le emissioni e la stabilità di fiamma.

In maniera analoga è stato possibile analizzare la distribuzione radiale di pressione sempre in prossimità della sezione d'uscita, il cui andamento è riportato in Figura 88.

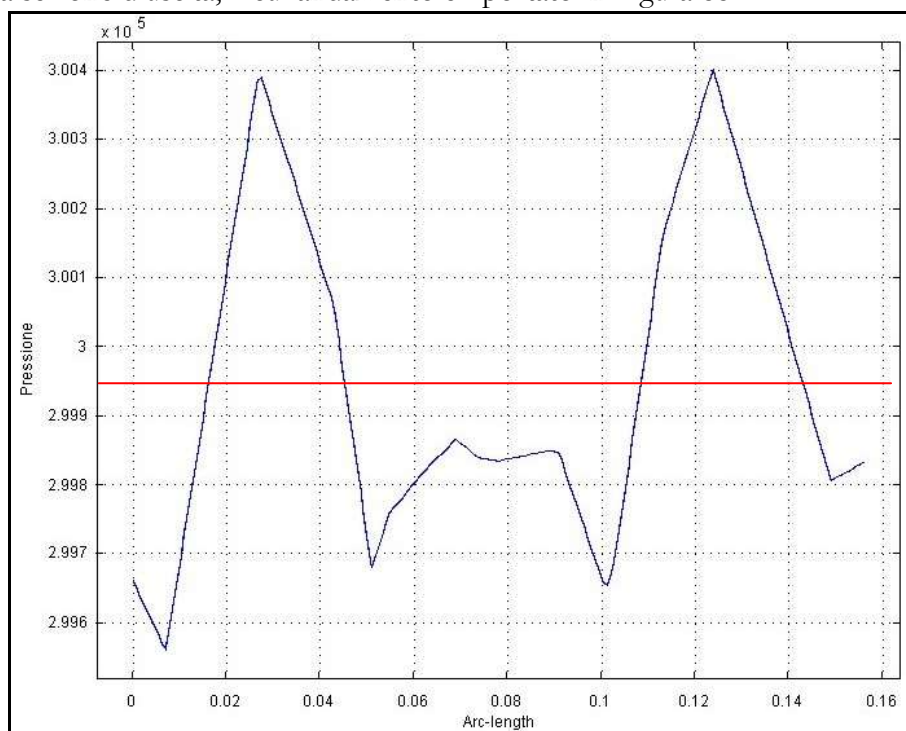


Figura 88: Distribuzione della pressione all'uscita del bruciatore

La figura è esplicitativa del fatto che, pur essendo fondamentalmente tutto l'ambiente alla pressione di progetto di 3 bar, all'uscita del bruciatore si viene a creare quella leggera depressione tipica dei flussi swirlati.

La leggera discontinuità che si può notare nell'immagine, nella zona centrale, deriva dall'imprecisione di calcolo implicita nella mesh prescelta che, come già osservato, comporta degli errori durante l'analisi numerica.

8 EBOLLIZIONE E CONDENSAZIONE DEI FLUIDI

I fluidi (liquidi e vapori) possono cambiare di stato, come si è visto in *Termodinamica Applicata* con le curve di *Andren's*. Questi cambiamenti di stato, ebollizione e condensazione, rivestono una grandissima importanza industriale per le numerosissime ed importantissime applicazioni in campo energetico. Si pensi, ad esempio, al raffreddamento dei reattori nucleari, ai tubi di calore e alle applicazioni in campo elettronico (raffreddamento di componenti fortemente energetici).

Oggi con queste tecniche si riesce a raggiungere una intensità di flusso estratto dell'ordine del MW/m^2 e quindi valori elevatissimi e adatti a far fronte alle esigenze di raffreddamento di dispositivi ad elevata densità di potenza²⁸. Si vuole in questo capitolo presentare brevemente queste problematiche affrontandole più in modo qualitativo che quantitativo, anche in considerazione della natura del presente Corso. Si rimanda ai testi specializzati ogni ulteriore approfondimento.

Un altro motivo di interesse specifico di questi fenomeni di scambio termico con passaggio di stato è dovuto alla semplice considerazione che per essi non si possono applicare le relazioni adimensionali della convezione termica viste in precedenza. Si osservi, infatti, che per la convezione forzata si hanno relazioni adimensionali del tipo:

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n$$

mentre per la convezione naturale si hanno correlazioni adimensionali del tipo:

$$Nu = C \cdot Gr^m \cdot Pr^n$$

che spesso, nel caso di gas per i quali gli esponenti m ed n sono uguali, si possono ricondurre nella forma semplificata:

$$Nu = C \cdot Ra^m$$

Si ricorda che il numero di Prandtl è definito dal rapporto:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$$

e quindi dipende dal calore specifico a pressione costante del fluido interessato. Durante i passaggi di stato la pressione si mantiene costante ma anche la temperatura e quindi c_p è infinito. Ne segue che durante i passaggi di stato non possiamo usare correlazioni adimensionali ove compare c_p .

Occorre, quindi, affrontare diversamente il problema dello scambio termico in cambiamento di fase con osservazioni e metodologie di studio specifiche per questi fenomeni.

8.1 EBOLLIZIONE STATICA

Prima di affrontare lo studio dell'ebollizione è bene ricordare che questa differisce dalla *evaporazione*. Questa, infatti, è un fenomeno di transizione dalla fase liquida a quella di vapore nella regione superficiale di contatto dei due fluidi ed è determinata dalla differenza fra la pressione di saturazione e la pressione parziale del vapore. L'*ebollizione* interessa, invece, la massa del fluido ed è determinata dal raggiungimento della temperatura di saturazione nel punto specifico e alle condizioni di pressione presenti. L'ebollizione è stata studiata negli anni *quaranta* da *Nukijama* che propose il diagramma di Figura 89 per ebollizione statica: in ascisse è rappresentato ΔT_{sat} cioè la differenza di temperatura della parete, T_p , e quella di saturazione del liquido, T_s , in ordinate si ha il flusso specifico $[\text{W/m}^2]$ in unità arbitrarie.

²⁸ I reattori nucleari raggiungono densità di potenza dell'ordine di qualche centinaio di Watt per centimetro cubo. Dello stesso ordine di grandezza sono le densità di potenza dei tubi claystron utilizzati negli impianti radar. Si pensi, ancora, che un semplice Pentium III disperde circa 40 W con una superficie di circa 2 cm² e quindi con una densità superficiale di 0.2 MW/m². E' opportuno osservare che oltre al valore assoluto della potenza termica da estrarre (ad esempio negli impianti di potenza) è importante considerare anche le densità (volumiche o superficiali). Se non si riesce a smaltire queste potenze specifiche i dispositivi interessati possono subire danni irreversibili o non funzionare affatto.

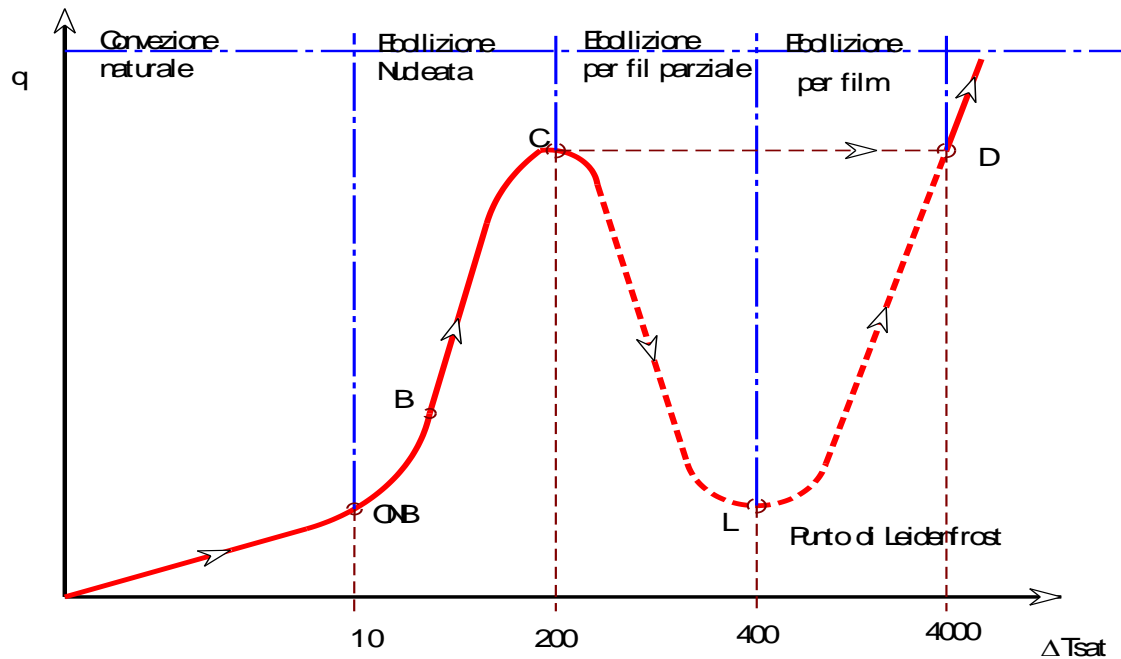


Figura 89: Curva di Nukijama

L'ebollizione statica si ha, ad esempio, ponendo la classica pentola sul fuoco: il fluido è in condizioni statiche e non in movimento, come avviene nei tubi all'interno di una caldaia.

Se si aumenta la potenza ceduta alla parete di fondo si hanno, inizialmente, valori di ΔT_{sat} bassi, dell'ordine di qualche grado, come indicato in figura.

Per effetto di questa differenza di temperatura si instaurano fenomeni convettivi per i quali il fluido caldo, a contatto con la parete di fondo riscaldata, si sposta verso l'alto, ove la temperatura è inferiore a quella di saturazione dando luogo alla convezione termica, così come vista in precedenza. In questa zona si possono utilizzare le correlazioni adimensionali solite per la convezione naturale e il flusso specifico è dato da²⁹:

$$q = h \Delta T_{sat}$$

Molto usata è la correlazione di Mc Adams: $Nu = 0.56(Gr Pr)^{0.25}$ per moto laminare e $Nu = 0.13(Gr Pr)^{0.33}$ per moto turbolento.

Ad un certo punto, a seconda della combinazione di fluido e materiale delle pareti e della pressione sul fluido, si cominciano ad osservare sulla parete di fondo riscaldata alcune bollicine che appena nate subito spariscono.

Per comprendere questo fenomeno occorre ricordare che l'ebollizione del liquido avviene solo quando si supera la temperatura di saturazione e per effetto di una causa scatenante, una sorta di innesco spesso dato dalla presenza di impurezze, di gas diverso dal vapore o da asperità tipiche delle lavorazioni delle pareti metalliche.

In Figura 90 si ha un ingrandimento della parete di fondo con l'evidenziazione delle asperità dovute alle lavorazioni. Si osservi che queste asperità sono volute, come si dirà fra poco, perché aiutano il processo di formazione delle bolle.

²⁹ Si utilizza il salto di temperatura ΔT_{sat} come valore di riferimento certo. Il salto reale di temperatura dipende dalle condizioni locali non sempre facilmente calcolabili.

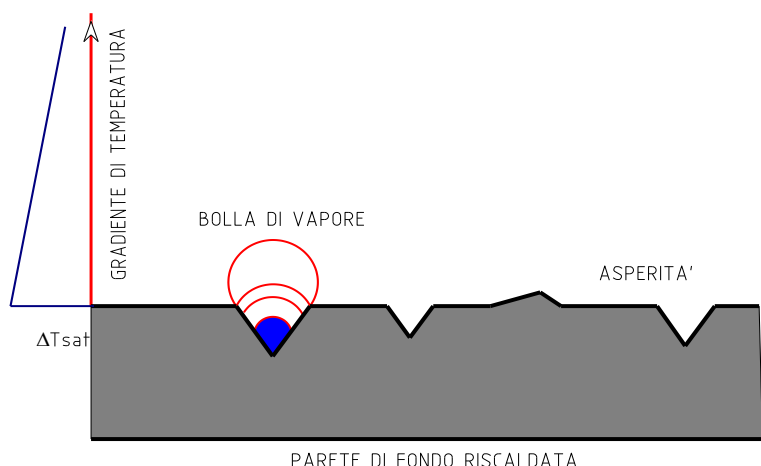


Figura 90: Nascita di una bolla di vapore

Se consideriamo una cavità si intuisce che nella cuspide di fondo si ha una concentrazione anomala di potenza termica (a parità di superficie frontale le pareti inclinate trasmettono più calore) e quindi è possibile avere l'*innesco* per l'inizio della ebollizione.

Il vapore che si viene formando occupa un grande volume e forma una bollicina che va sempre più crescendo di diametro fino ad uscire fuori dai limiti della stessa cavità e affiorare nel liquido sovrastante. Il liquido può essere ancora in condizioni di sottoraffreddamento, cioè ancora non sufficientemente riscaldato e quindi in condizioni tali da mantenere le condizioni termodinamiche di esistenza in vita della bolla.

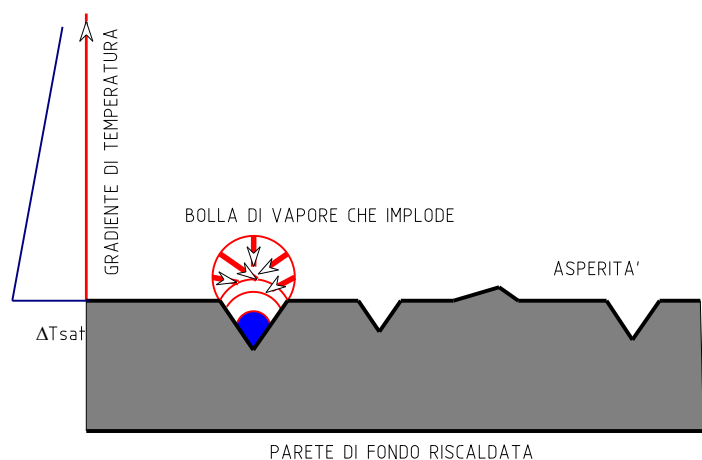


Figura 91: Implosione della bolla

Pertanto la bolla si raffredda rapidamente perché cede calore al fluido sovrastante e, quando la pressione interna diviene inferiore a quella esercitata dal liquido esterno si ha l'implosione con conseguente scoppio, vedi Figura 91 e Figura 92.

Questo semplice meccanismo si rivela efficacissimo ai fini dello scambio termico poiché il vapore all'interno della bolla cede al liquido il suo calore latente di vaporizzazione (che è elevato!). Inoltre lo scoppio produce l'effetto benefico di movimentare il liquido ossia di migliorare la convezione termica. E' come se si avessero tanti piccoli meccanismi di movimentazione del liquido e quindi la convezione si comporta come se fosse forzata.

Quanto sopra detto si chiama **ebollizione enucleata** e tale il nome proprio dalla formazione dei nuclei di ebollizione che poi implodono. La temperatura corrispondente all'insorgere di questo fenomeno è detta **onset on nucleate boiling (ONB)** e rappresenta un punto significativo della curva di *Nukijama*.

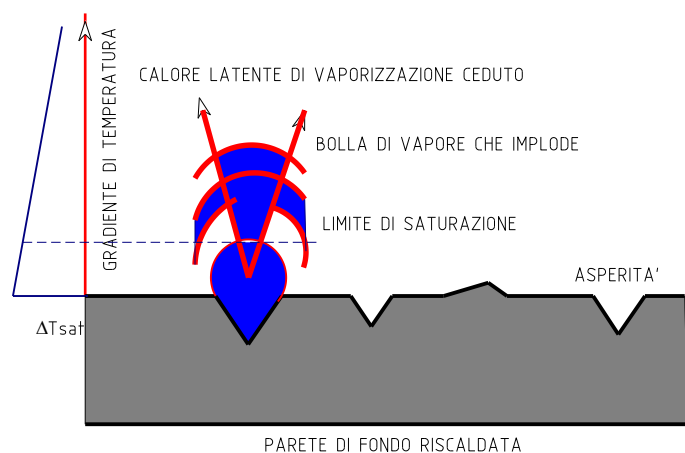


Figura 92: Scoppio della bolla

Per effetto dei meccanismi efficacissimi di scambio termico ora il flusso termico si esprime con la relazione:

$$q = h\Delta T_{sat}^{3\div 5}$$

Si osservi che ora il flusso termico dipende dalla 3÷5 potenza del ΔT_{sat} e quindi si ha una capacità di estrazione termica notevolissima. E' proprio questa la zona di maggiore interesse per le applicazioni.: l'ebollizione nucleata.

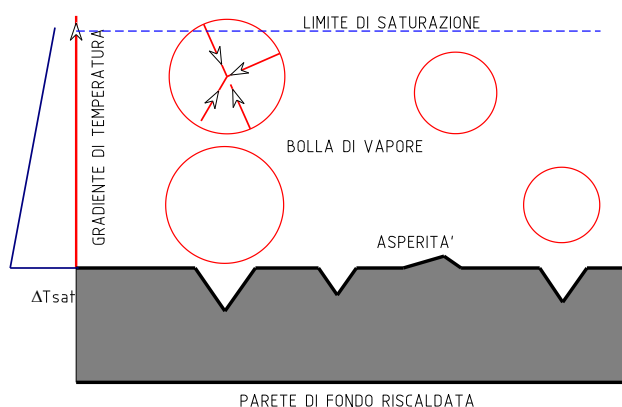


Figura 93: Distacco delle bolle

Man mano che il liquido si riscalda le bolle possono crescere ulteriormente e finalmente possono staccarsi dalla parete di fondo, come indicato in Figura 93. Le bolle ora perfettamente formate sono in grado di iniziare la loro ascesa verso la superficie superiore del liquido ma, allontanandosi dalla parete, incontrano strati di liquido più freddi e quindi si raffreddano cedendo calore attraverso la superficie di separazione.

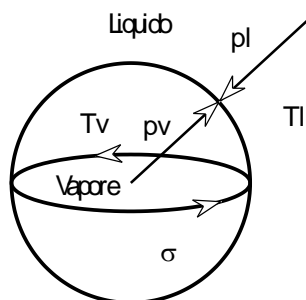


Figura 94: Equilibrio termodinamico della bolla

Quando la pressione interna della bolla non riesce più a bilanciare la pressione del liquido si ha, ancora, l'implosione della bolla e quindi nuovamente il meccanismo di scambio termico visto in precedenza con la cessione del calore latente e la movimentazione del liquido.

Con riferimento alla Figura 94 si può scrivere, per l'equilibrio:

$$p_v \pi \frac{d^2}{4} = p_l \pi \frac{d^2}{4} + \pi d \sigma$$

ove si sono indicate con:

- p_v la pressione del vapore interna alla bolla alla temperatura T_v ;
- p_l la pressione esercitata dal liquido alla pressione T_l ;
- d il diametro della bolla;
- σ la tensione superficiale della bolla,

Da questa relazione si ha:

$$p_v - p_l = \frac{4\sigma}{d}$$

Si può subito osservare che più piccolo è il diametro della bolla tanto maggiore deve essere la differenza di pressione fra l'interno (vapore) e l'esterno (liquido).

Inoltre se si vuole che il liquido e il vapore della bolla sia in equilibrio termodinamico deve essere $T_v = T_l$ e poiché il vapore è in condizioni di saturazione alla pressione $p_v > p_l$ deve anche aversi che il liquido, essendo ad una temperatura superiore a quella di equilibrio alla pressione $p_l < p_v$, è **surriscaldato**.

Allora il surriscaldamento $T_v - T_s$ in condizioni di equilibrio termico e meccanico può essere determinato facendo ricorso all'equazione di *Clapeyron – Clausius* (che possiamo ricavare dalle equazioni di *Maxwell* viste in *Termodinamica*):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_v = \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_T$$

che, nel caso in esame diviene:

$$\frac{dp}{dT} \cong \frac{r}{v T_s} = \frac{r p_v}{R_v T_s^2}$$

ove si è tenuto conto che deve essere $p_v v = R_v T_s$. Possiamo ancora scrivere, in prima approssimazione:

$$\frac{dp}{dT} \approx \frac{p_v - p_l}{T_v - T_s}$$

e quindi, anche in considerazione di quanto sopra visto per $p_v - p_l$ si ha:

$$T_v - T_s = t_v - t_s = \frac{4 R_v T_s^2 \sigma}{r p_v d}$$

Ora l'ebollizione nucleata non è più sul nascere ma in pieno sviluppo e siamo nel tratto di curva AB della Figura 89.

Gli scambi termici sono efficaci e il liquido subisce un vigoroso riscaldamento.

Quando il ΔT_{sat} raggiunge il punto B allora si cominciano ad avere le prime bolle che raggiungono la superficie del liquido e quindi tutta la massa del liquido è interessata dal fenomeno della enucleazione.

Dal punto B in poi, al crescere di ΔT_{sat} si formano sempre più bolle di vapore che raggiungono la superficie del liquido, fino a formare vere e proprie colonne di vapore che occupano uno spazio non trascurabile³⁰.

Il liquido in moto convettivo dall'alto verso il basso, per continuità di massa, trova sempre meno spazio per passare e quindi aumenta la sua velocità di spostamento e ciò favorisce lo scambio termico.

Se non si fosse in equilibrio termico allora per $T_v < T_l$ si avrebbe:

$$T_l - T_s > \frac{4R_v T_s^2 \sigma}{r p_l d}$$

Il calore si scambia per conduzione all'interfaccia liquido – vapore e parte del liquido evapora e la bolla cresce. Se invece $T_v > T_l$ ovvero per :

$$T_l - T_s < \frac{4R_v T_s^2 \sigma}{r p_l d}$$

lo scambio termico si inverte e la bolla diminuisce di volume.

Ritorniamo alla curva di Nukijama osservando che quando ΔT_{sat} raggiunge il punto C di Figura 89 allora tutta la massa del liquido si è portata nelle condizioni di saturazione e può partecipare massivamente all'ebollizione.

Il punto C è particolarmente importante nello studio che si sta facendo: esso prende il nome di **punto critico** e il flusso termico corrispondente è detto **flusso di burn out** (cioè di **bruciatura**). A destra del punto critico non è facile andare se si controlla il flusso termico, come sin qui si è fatto. La curva di *Nukijama* è monocroma se si controlla il ΔT_{sat} mentre è policroma se si controlla il flusso termico q .

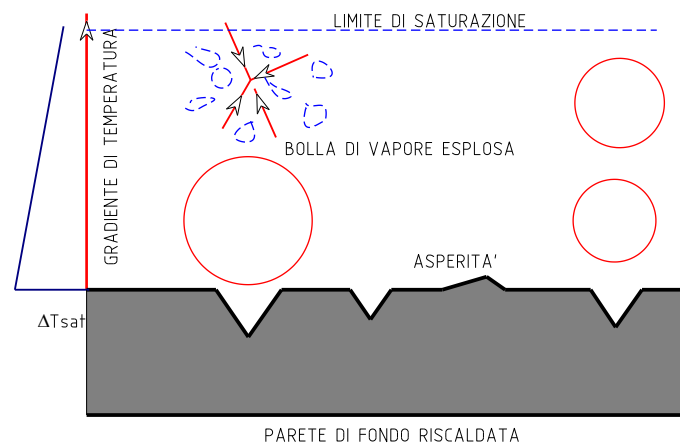


Figura 95: Implosione della bolla distaccata

Dal punto critico C con un leggero incremento della temperatura di parete si passa al punto D a cui corrisponde (si veda in ascisse) un valore elevatissimo e tale da portare a fusione la maggior parte dei materiali oggi utilizzati.

Pertanto le condizioni operative debbono essere lontane il più possibile da C per evitare la bruciatura della parete di fondo a cui seguono scoppi ed incidenti vari.

Se anziché controllare il flusso termico si potesse controllare ΔT_{sat} ad esempio mediante scambi termici con corpi in cambiamento di fase (la cui temperatura, quindi, è costante durante il cambio di fase e nota per data pressione) allora si può andare a destra di C, con grande cautela.

³⁰ Si ricordi che il vapore ha un volume specifico molto grande rispetto al liquido, almeno per pressioni lontane da quella critica.

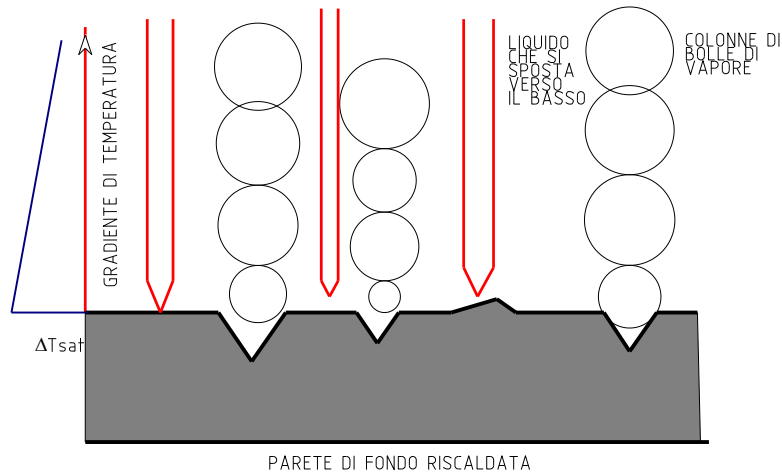


Figura 96: Formazione di colonne di bolle

Adesso la produzione di vapore è massiva e le colonne di vapore sono talmente numerose da toccarsi fra loro, specialmente in corrispondenza della parete di fondo. Si ha, pertanto, la situazione di Figura 97 ove si ha la formazione di uno strato di vapore continuo nel fondo.

Il liquido, per effetto delle velocità raggiunte a causa del restringimento delle sezioni di passaggio, riesce a squarciare questo velo di vapore e quindi a bagnare ancora, seppure parzialmente la parete di fondo.

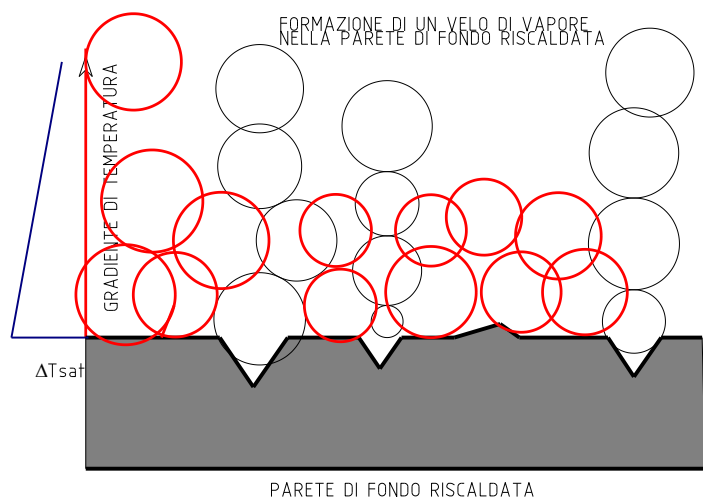


Figura 97: Formazione di uno strato di vapore sulla parete di fondo

L'alternarsi dello strato di vapore e dello strato di liquido giustifica la necessità di abbassare il flusso termico, come mostrato in Figura 89.

Si osservi, infatti, che la trasmissione attraverso il liquido è sempre più efficiente rispetto a quella con vapore e quindi la trasmittanza termica con liquido è maggiore di quella con vapore. Pertanto si ha:

$$K_{\text{liquido}} S \Delta T_{\text{sat}} > K_{\text{vapore}} S \Delta T_{\text{sat}}$$

e quindi a parità di S e di flusso termico imposta si ha un ΔT_{sat} maggiore nel caso di presenza del vapore.

Dal punto C ci si sposta, diminuendo il flusso termico, fino al punto L detto **punto di Leidenfrost** o di **calefazione** in corrispondenza del quale lo strato di vapore prende definitivamente il sopravvento rispetto al liquido che, pertanto, non riesce più a squarciare il velo di vapore.

In pratica il liquido galleggia su uno strato di vapore stabile sulla parete di fondo.

Questa situazione è facilmente riproducibile: se si gettano goccioline di acqua su una piastra di ferro infuocata si può osservare una sorta di galleggiamento delle goccioline sulla stessa piastra, fino a quando tutto il liquido diventa vapore.

Si ha in L una situazione di scambio termico con K_{vapore} e quindi con ΔT_{sat} elevati, come si vede dalla curva di Nukijama.

Ora però la situazione è stabile e quindi il flusso può nuovamente crescere al crescere di ΔT_{sat} . In Figura 98 si ha una sequenza fotografica della nascita di una bolla e del suo collasso in fase iniziale (ebollizione nucleata).

Si può osservare come l'implosione della bolla provochi un micro moto convettivo locale che incrementa fortemente lo scambio liquido – vapore.

E' questa una delle motivazioni forti della grande efficacia di scambio termico in questa tipologia di ebollizione.

In Figura 99 si ha una analoga sequenza di immagini dell'implosione di una bolla non più in fase nucleata ma del tutto sviluppata.

8.2 CORRELAZIONI DI SCAMBIO TERMICO PER L'EBOLLIZIONE

Le correlazioni di scambio termico si basano su esperienze di laboratorio in varie situazioni pratiche (cioè accoppiamento di liquidi e metalli vari). Si definisce un numero di Reynolds di bolla dato dalla relazione:

$$\text{Re}_b = \frac{\dot{m}_v D_b}{\mu_l}$$

ove con \dot{m}_v si è indicata la portata di vapore per unità di superficie, D_b il diametro della bolla al momento del distacco, μ_l la viscosità del liquido.

La correlazione di scambio sperimentale (*Zuber*) è la seguente:

$$q = \mu_l r \sqrt{\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma}} \left(\frac{c_p \Delta T_{\text{sat}}}{r \text{Pr}_l^s C_{sf}} \right)^3$$

ove r è il calore latente di vaporizzazione, ρ_l e ρ_v sono le densità del liquido e del vapore, Pr_l è il numero di Prandtl del solo liquido saturo, s e C_{sf} opportuni coefficienti dati dalle varie combinazioni di liquidi e materiali e σ è la tensione superficiale dell'interfaccia liquido - vapore.

Il flusso termico massimo, cioè il *flusso critico*, può essere calcolato con la relazione:

$$q_{\text{critico}} = 0.18 \rho_v r \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v) \sigma}{\rho_v^2} \right]^{1/4} \left(\frac{\rho_l}{\rho_l - \rho_v} \right).$$

8.3 EBOLLIZIONE CON LIQUIDI IN MOVIMENTO

Consideriamo adesso il caso che l'ebollizione avvenga con liquido in movimento all'interno di un condotto, come raffigurato in Figura 101.

Il flusso termico è ceduto lungo la superficie laterale del condotto (si immagini un tubo bollitore all'interno di una caldaia).

Il liquido entra nel condotto in condizioni di sottosaturazione.

Man mano che procede verso l'alto il liquido si riscalda fino a quando, con le stesse modalità viste in precedenza per l'ebollizione statica, si formano le prime bolle di vapore (*ONB*) sottoraffreddate e poi, ancora procedendo verso l'alto, si formano delle vere e proprie bollicine che si liberano nella matrice liquida.

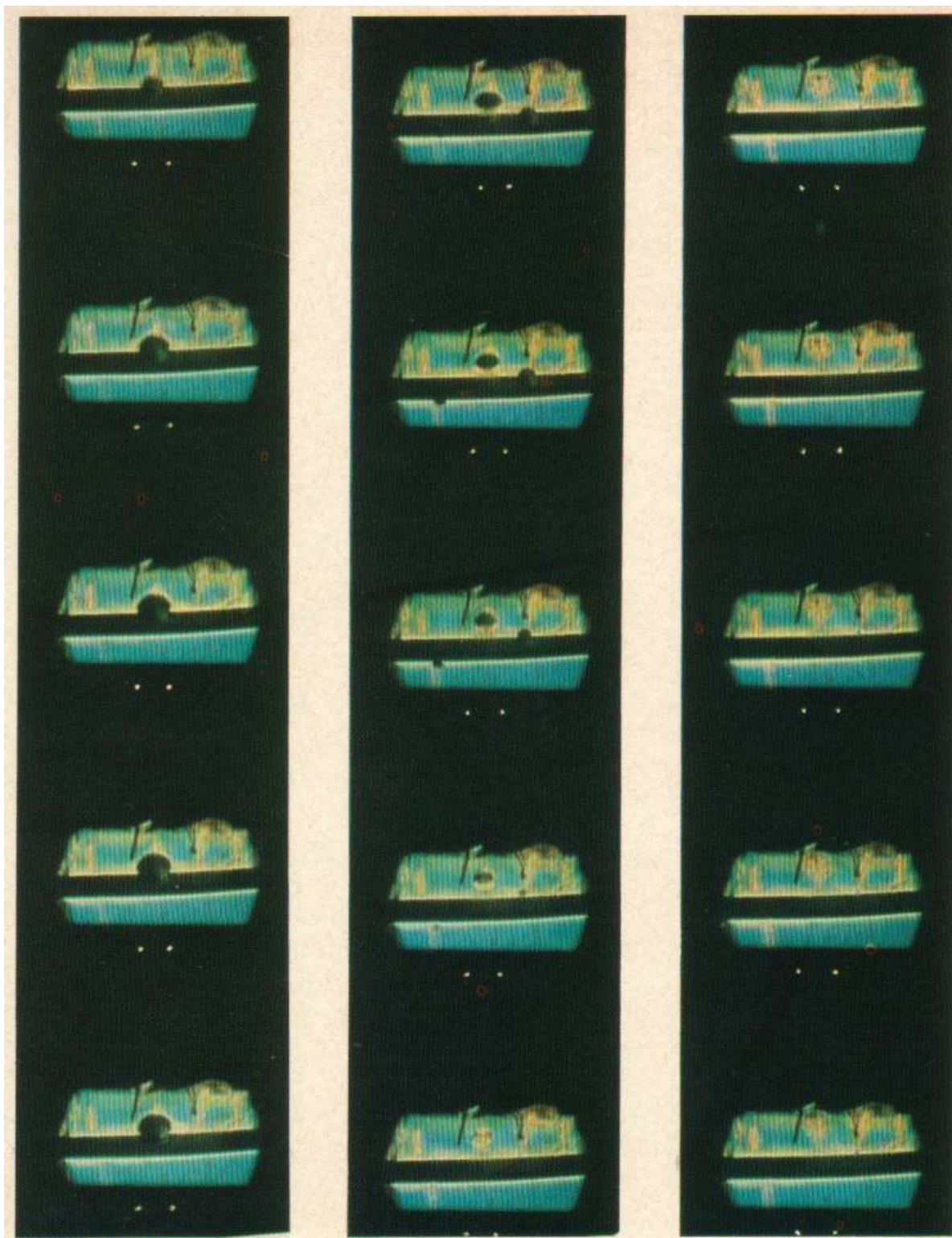


Figura 98: Sequenza di ebollizione nucleata statica attorno ad un filo caldo

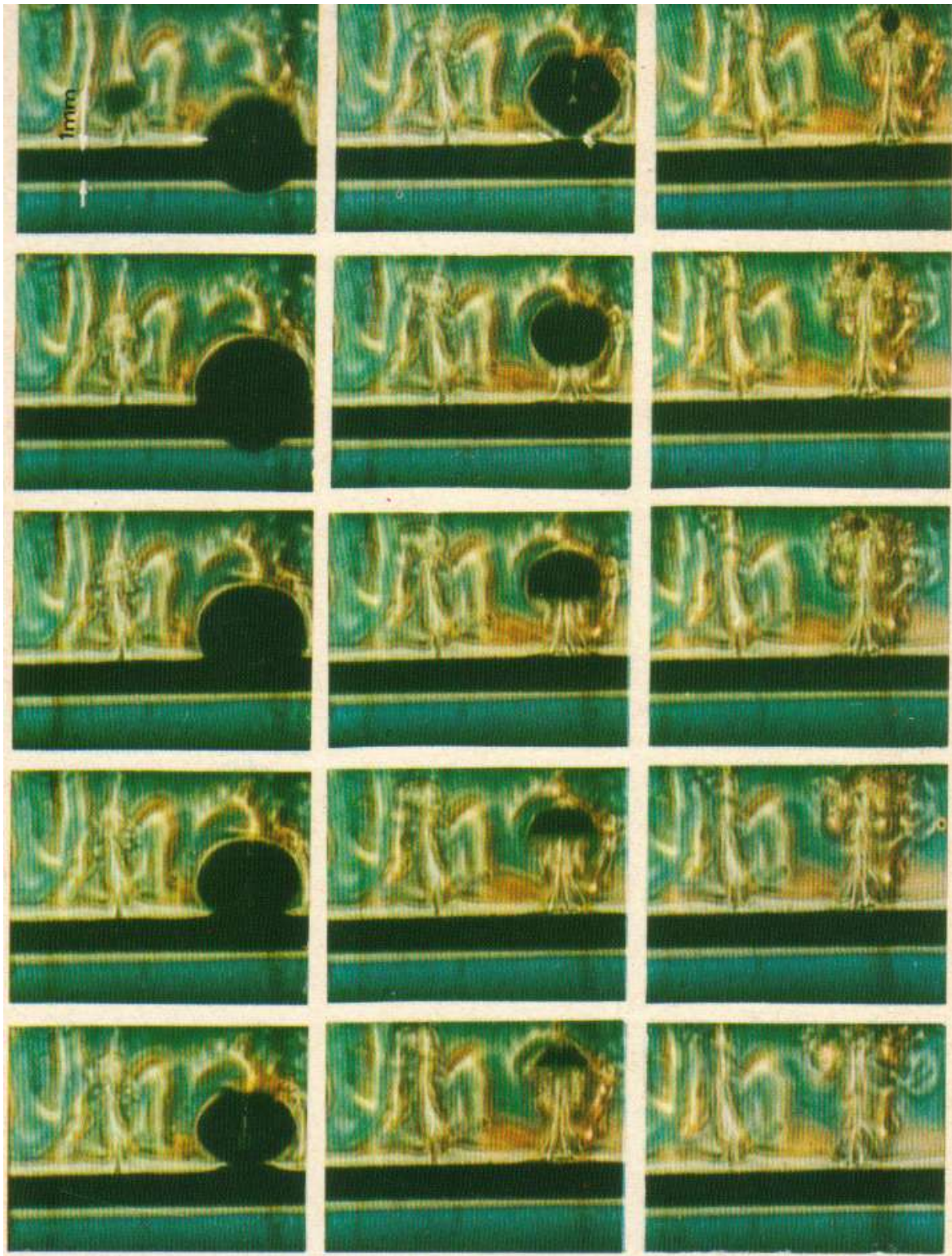


Figura 99: Sequenza delle fasi di implosione di una bolla completa

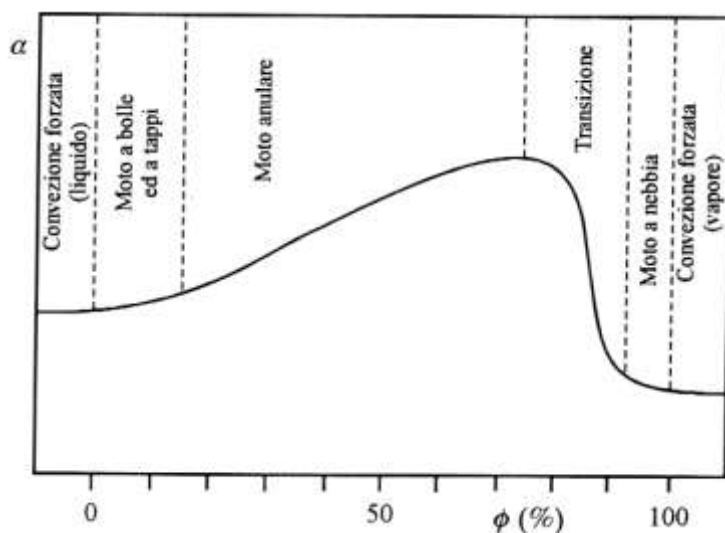


Figura 100: Curva di Nukijama per ebollizione dinamica (α è il coefficiente di convezione)

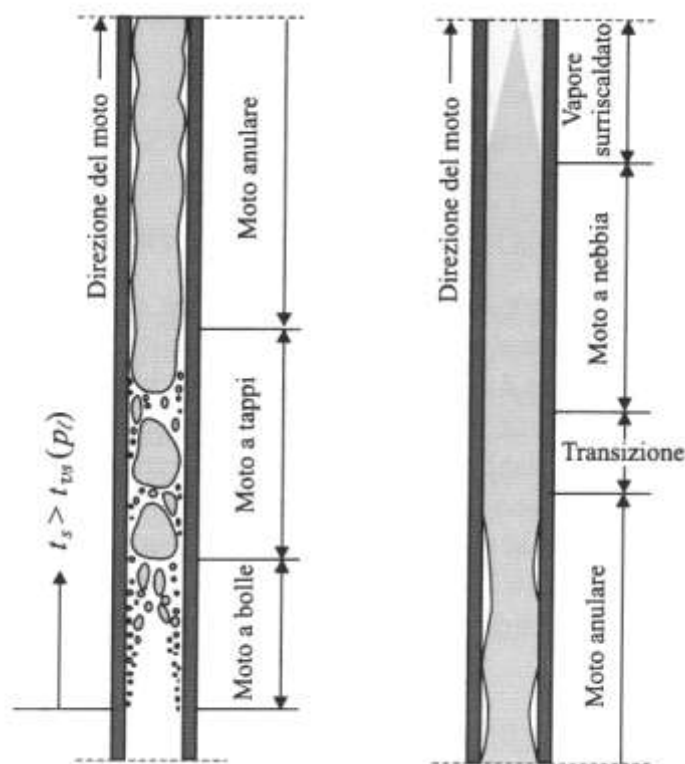


Figura 101: Ebollizione dinamica

Si ha, quindi, il **moto a bolle** di Figura 101. All'aumentare del flusso termico ricevuto si hanno sempre più bollicine che finiscono con il toccarsi formando bolle di dimensioni maggiori, dei veri e propri tappi di vapore e si ha il **moto a tappi**.

Procedendo ancora verso l'alto il vapore che si forma diviene massivo e tale da formare uno strato anulare interno al condotto, con pareti ancora bagnate dal liquido, **moto anulare**. Ad un certo punto il liquido alle pareti viene sostituito dal vapore e si ha un punto di crisi termica analogo al punto di *burn out* visto in precedenza.

Adesso si dice **punto di dry out** e cioè *punto di asciugatura*. Anche in questo caso se il vapore bagna le pareti il ΔT_{sat} cresce molto ed improvvisamente. In questo caso si hanno valori del salto di ΔT_{sat} inferiori a quelli in ebollizione statica e i tubi normalmente usati possono resistere benissimo.

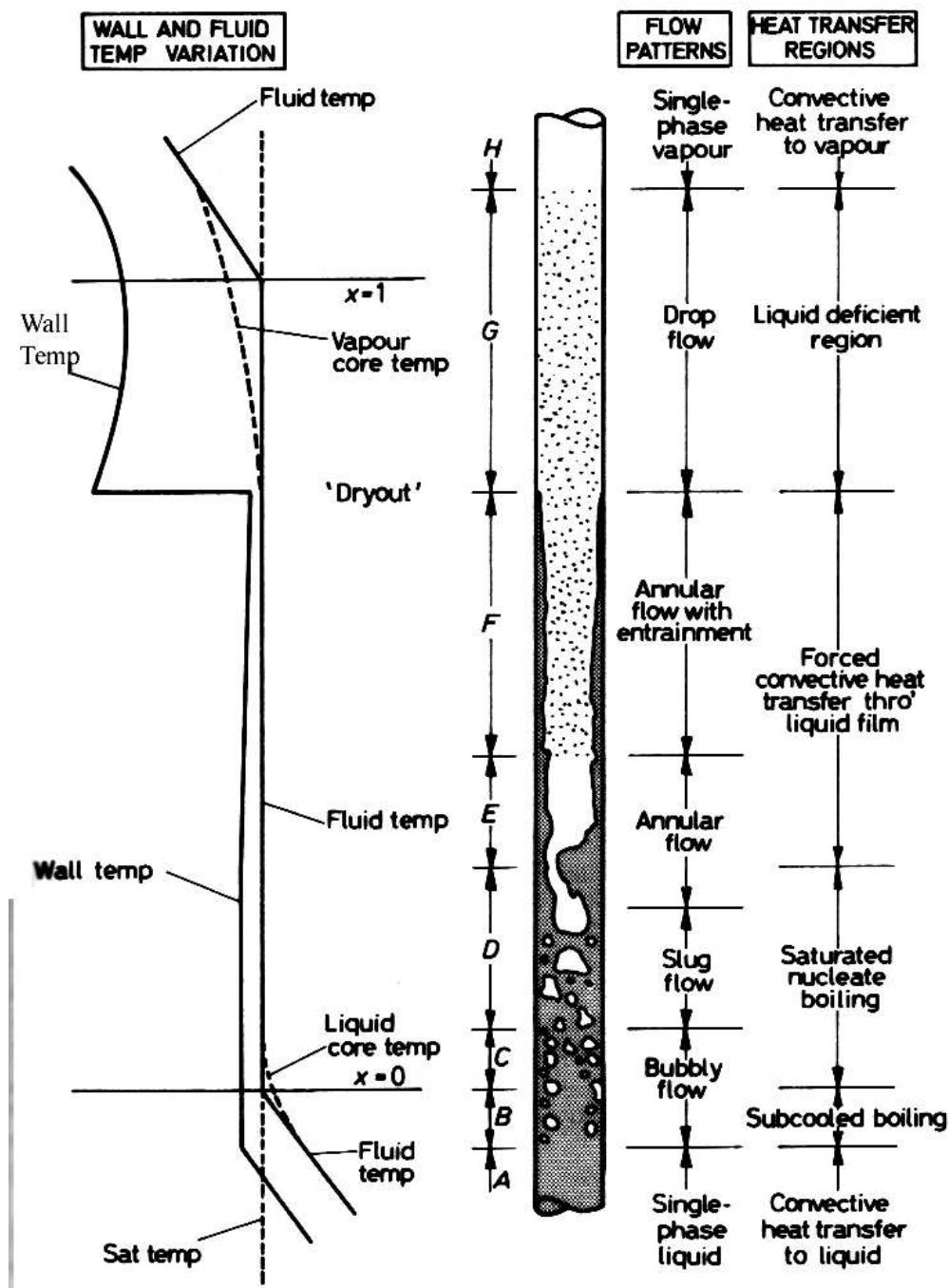


Figura 102: Distribuzione di temperatura lungo un tubo bollitore

Oltre il *punto di dry out* si ha un moto nel quale goccioline residue di liquido galleggiano in una matrice di vapore. Si ha il **moto a nebbia** utilizzato in alcune applicazioni impiantistiche.

L'andamento del tipo di moto unitamente alla distribuzione della temperatura lungo il tubo bollitore sono riportati in Figura 102. E' opportuno osservare che il tipo di moto sopra indicato non avviene sempre allo stesso moto in qualunque situazione sperimentale.

Ad esempio, per tubi orizzontali si hanno configurazioni di moto diverse con moto *stratificato* anziché anulare. Inoltre si possono avere anche unioni di masse liquide per formare una specie di tappi (*moto a slug*) che non ha corrispondenza nel moto verticale.

Per conoscere il tipo di flusso che si viene ad instaurare in un condotto non si hanno metodi certi per cui si utilizzano mappe sperimentali non sempre affidabili data la grande variabilità dei parametri.

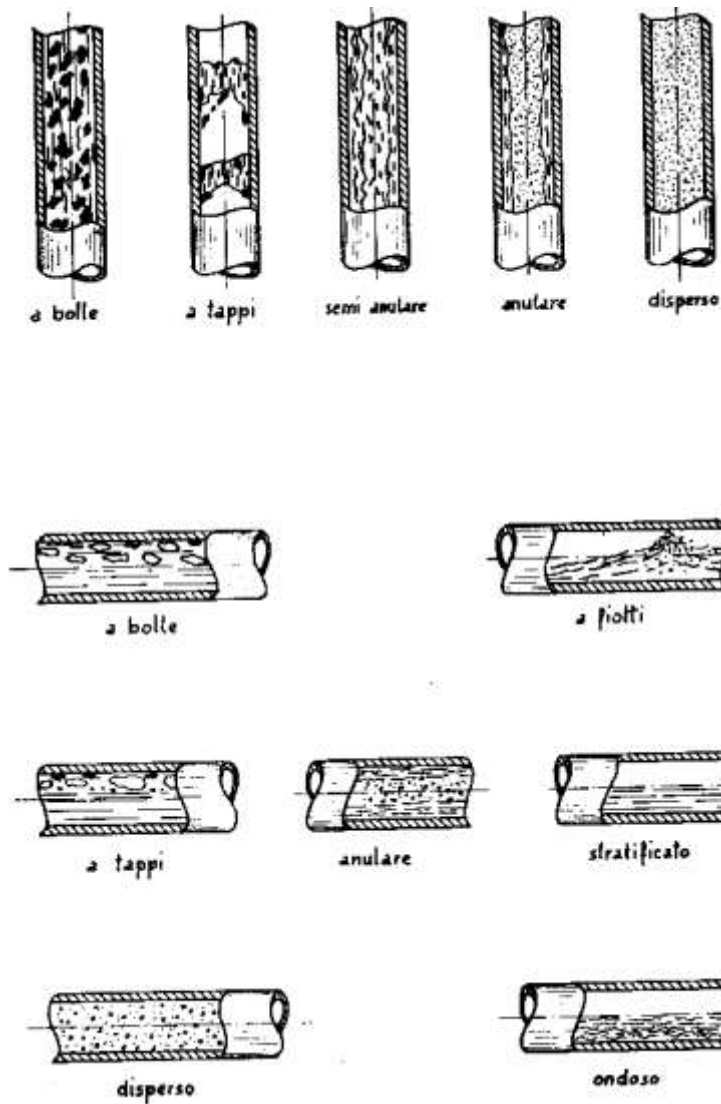


Figura 103: Tipo di moto in un tubo bollitore orizzontale

In Figura 104 si ha un tipico diagramma detto *a zone* per individuare, con approssimazione non sempre accettabile, il tipo di moto che si può instaurare in un tubo bollitore orizzontale.

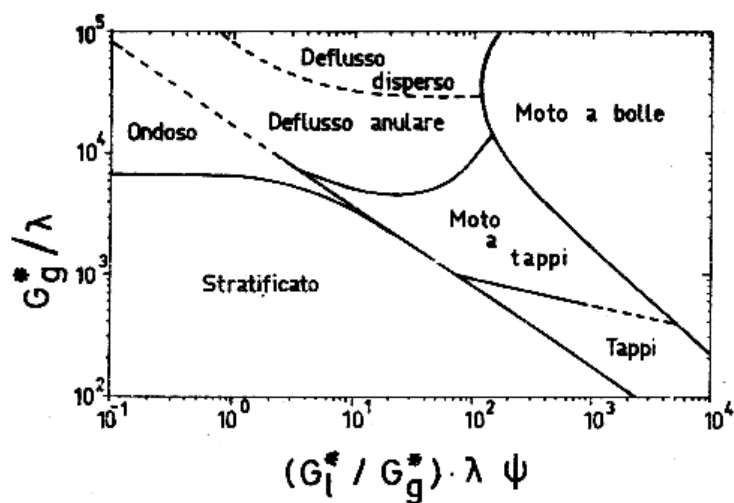


Figura 104: Diagramma a zone per il tipo di moto

Nel caso di ebollizione dinamica si hanno vari metodi per calcolare il coefficiente di convezione termica che portano a forme analitiche del tipo:

$$q = af(p)\Delta T_{sat}^b$$

con a e b costanti sperimentali opportune.

Chen consiglia di usare un coefficiente di convezione termica dato dalla somma di una componente dovuta alla convezione microscopica ed una convezione macroscopica.

Quest'ultima si può determinare mediante la relazione di Dittus – Boelter modificata:

$$h_{eb,mac} = 0.023 Re_b^{0.8} Pr_l^{0.4} \frac{\lambda_l}{D_H}$$

ove Re_b è il numero di Reynolds corrispondente al deflusso bifase dato dalla relazione:

$$Re_b = Re_l \cdot F$$

con F fattore correttivo empirico funzione del parametro di Martinelli, X_{tt} , definito come radice quadrata del rapporto fra la caduta di pressione nella fase liquida e la caduta di pressione nella fase aeriforme ed è dato a sua volta dalla relazione:

$$X_{tt} = \sqrt{\frac{\Delta p_l}{\Delta p_a}} = \left(\frac{1-x}{x} \right)^{0.9} \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} \right)^{0.5} \left(\frac{\mu_l}{\mu_v} \right)^{0.1}$$

con x titolo del vapore.

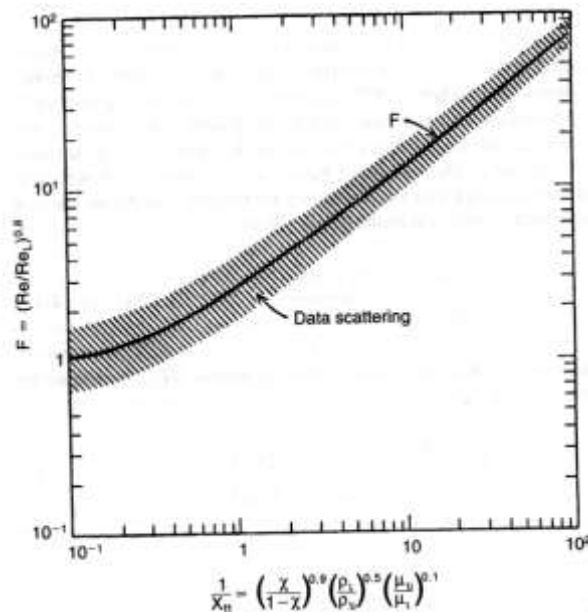


Figura 105: fattore di correzione F

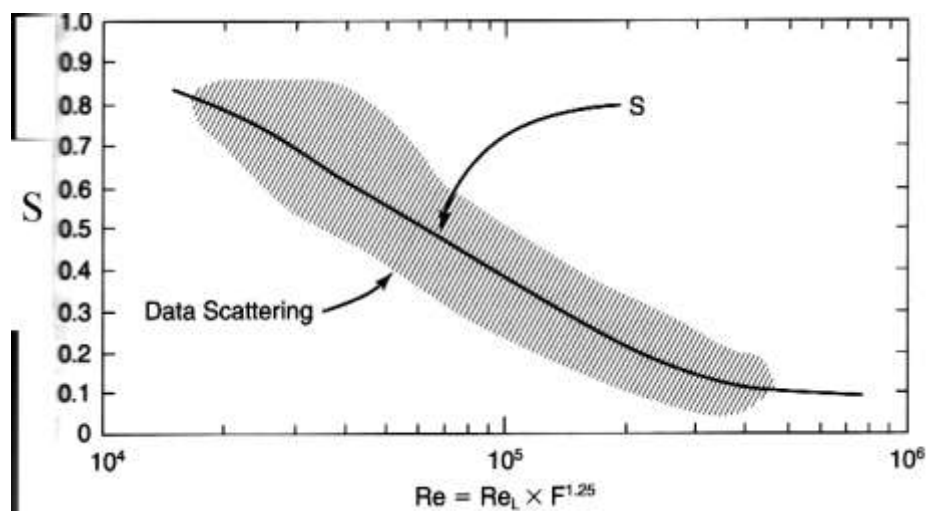
Il coefficiente di convezione microscopica è fornito dalla relazione:

$$h_{eb,mic} = 0.000122 \frac{\lambda_l^{0.79} c_{p_l}^{0.45} \rho_l^{0.49}}{\sigma^{0.5} \mu_l^{0.29} r^{0.24} \rho_v^{0.24}} \Delta T_{sat}^{0.24} \Delta p^{0.75} S$$

con S fattore correttivo funzione di Re_b . Il flusso termico critico è dato da:

$$q_{critico} = \frac{1400 \left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^{0.5}}{d^{0.2} \left(\frac{l}{d} \right)^{0.15}}$$

valida per acqua e con pressioni fino a 7 bar.

Figura 106: Fattore di correzione S

8.4 LA CONDENSAZIONE

Il processo inverso dell'ebollizione è la *condensazione* che può avvenire sia *a gocce* che per *film*. Il primo tipo (a gocce) è molto efficiente e rappresenta l'analogo dell'ebollizione nucleata.

Sfortunatamente perché questa avvenga occorre avere superfici di condensazione *non bagnabili* in modo che le goccioline di condensato restino isolate. Ciò si raggiunge spalmando le superfici con speciali additivi chimici o ricoprendole di lamine d'oro e di materiale plastico.

L'uso continuo porta comunque ad un decadimento delle proprietà superficiali e quindi alla necessità di rinnovamento delle superfici stesse. Con la condensazione a gocce si può arrivare a coefficienti di convezione fino ad $1 \text{ MW/m}^2\text{K}$. Più facile da avere e controllare è la *condensazione a film* nella quale si ha un processo di condensazione massivo (analogo dell'ebollizione di massa) con formazione di un film di condensato che scorre lungo la parete fredda, come indicato in Figura 107.

Il problema della condensazione è stato studiato da Nusselt ad inizio del novecento e la sua teoria, pur se semplificata, rimane ancora oggi valida. Nusselt suppone che il condensato si muova in regime stazionario con moto laminare lungo la parete e che il profilo del film di condensato sia liscio, cioè non si formino onde o corrugazioni.

Le equazioni della quantità di moto si riducono alla sola equazione in y e cioè:

$$\rho_l \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{dP}{dy} + \mu_l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho_l g$$

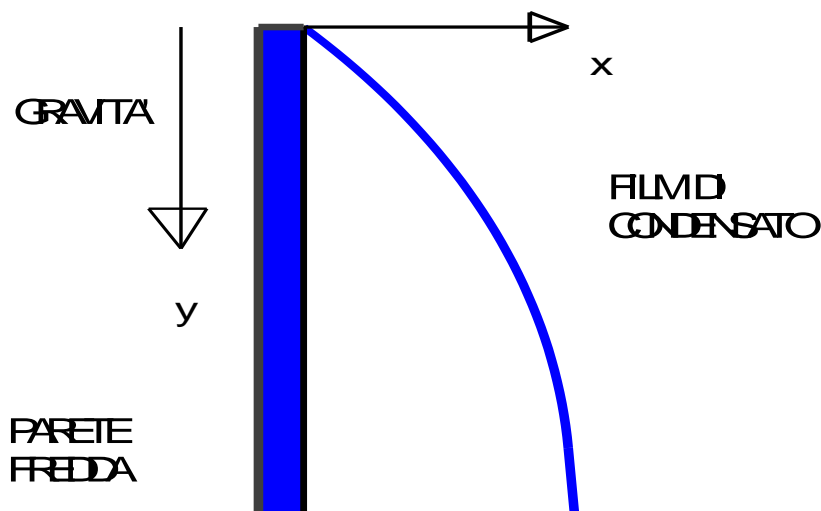


Figura 107: Formazione del film di condensato

L'ultimo termine rappresenta l'azione della gravità sull'elemento di volume di condensato. Il film di liquido si suppone sottile e in tale ipotesi il gradiente di pressione nel liquido risulta eguale (per la seconda equazione della conservazione della quantità di moto) a quello nel vapore, cioè si ha:

$$\frac{dP}{dy} = \rho_v g$$

La prima equazione della quantità di moto può essere riscritta, per effetto della precedente osservazione, in altro modo:

$$\underbrace{\rho_l \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\text{Inerzia}} = \underbrace{\mu_l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\text{Attrito}} + \underbrace{g(\rho_l - \rho_v)}_{\text{Alleggerimento}}$$

In questa relazione sono evidenziate le forze in gioco e il loro bilanciamento. Assumiamo, ancora, che le forze di inerzia siano trascurabili (per lo strato sottile) rispetto alle forze di attrito e quindi si può scrivere ancora:

$$\underbrace{\mu_l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\text{Attrito}} + \underbrace{g(\rho_l - \rho_v)}_{\text{Alleggerimento}} = 0$$

Questa equazione del secondo ordine va integrata due volte in x con le condizioni al contorno:

- $v=0$ per $x=0$, cioè scorrimento nullo alla parete;
- $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ per $x=\delta$, cioè taglio nullo all'interfaccia liquido-vapore, avendo indicato con δ lo spessore corrente del film liquido ad ordinata y ;

Si ottiene allora la seguente distribuzione di velocità:

$$v(x, y) = \frac{g}{\mu_l} (\rho_l - \rho_v) \delta^2 \left[\frac{x}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

In questa relazione non è ancora noto lo spessore δ del film di condensato. Nota la velocità del condensato si può calcolare la sua portata che vale:

$$\dot{m}_l = \int_0^\delta \rho_l u dx = \frac{g \rho_l}{3 \mu_l} (\rho_l - \rho_v) \delta^3$$

La portata di liquido condensato è qui misurata in $[kg/(ms)]$ ed è espressa per unità di lunghezza nella direzione normale al piano di Figura 107. Il vapore che va condensando cede il suo calore latente di condensazione e il calore sensibile di desurriscaldamento, supponendo che la temperatura di parete sia inferiore alla temperatura di saturazione del vapore alla pressione in cui esso si trova.

$$\bar{h} = \int_0^\delta \rho_l v \left[h_f - c_{p,l} (T_{sat} - T) \right] dx$$

ove si è considerata l'entalpia del fluido saturo h_f e non quella del liquido sottoraffreddato (perché a contatto con la parete fredda, $T_p < T_{sat}$). Nusselt suppose (e quest'ipotesi è ancora oggi valida) che la temperatura locale T sia distribuita linearmente lungo lo spessore del film di condensato e cioè si abbia:

$$\frac{T_{sat} - T}{T_{sat} - T_p} \approx 1 - \frac{x}{\delta}$$

per cui integrando la precedente relazione dell'entalpia totale di condensazione si ottiene:

$$\bar{h} = \underbrace{\left[h_f - \frac{3}{8} c_{p,l} (T_{sat} - T_p) \right]}_{h'_{lv}} \dot{m}_l$$

La quantità in parentesi quadra è l'entalpia totale del liquido condensato. L'entalpia ricevuta dal liquido viene, a regime, trasmessa verso la parete per conduzione termica e quindi deve essere:

$$q''_p = \lambda_l \frac{T_{sat} - T_p}{\delta}$$

ove λ_l è il coefficiente di conducibilità termica del liquido condensato. A regime si deve avere che il flusso di condensazione per una lunghezza dx deve eguagliare quello di conduzione e quindi:

$$\left[h_f - \frac{3}{8} c_{p,l} (T_{sat} - T_p) \right] d\dot{m}_l = \lambda_l \frac{T_{sat} - T_p}{\delta} dx$$

Combinando questa relazione con quella della portata di condensato si ottiene:

$$\frac{\lambda_l v_l (T_{sat} - T_p)}{h'_{lv} g (\rho_l - \rho_v)} dy = \delta^3 d\delta$$

Integrando e ricordando che per $y=0$ è $\delta=0$ si ha:

$$\delta(y) = \left[x \frac{4\lambda_l v_l (T_{sat} - T_p)}{h'_{lv} g (\rho_l - \rho_v)} \right]^{1/4}$$

Pertanto lo spessore del condensato cresce con x .

Il coefficiente di convezione termica può adesso essere calcolato dalla relazione:

$$h_y = \frac{q''_p}{T_{sat} - T_p} = \frac{\lambda_l}{\delta} = \left[\frac{\lambda_l^3 h'_{lv} g (\rho_l - \rho_v)}{4 y v_l (T_{sat} - T_p)} \right]^{1/4}$$

Integrando su tutta la lunghezza della parete si ottiene il coefficiente di convezione media:

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_y dy = \frac{h_{y=L}}{1 + (-1/4)} = \frac{4}{3} h_{y=L}$$

ossia:

$$\bar{h}_L = 0.943 \left[\frac{h'_{lv} g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3}{\mu_l L (T_{sat} - T_p)} \right]^{0.25}$$

Per calcolare il coefficiente di scambio termico convettivo si utilizza la teoria di Nusselt che porta alla seguente correlazione per il calcolo del valore medio sulla lunghezza L

$$\bar{h}_L = 0.943 \left[\frac{h'_{lv} g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3}{\mu_l L (T_{sat} - T_p)} \right]^{0.25}$$

In forma adimensionale la precedente si può scrivere:

$$Nu_L = 0.943 \left[\frac{h'_{lv} g \rho_l (\rho_l - \rho_v) L^3}{\mu_l \lambda_l (T_{sat} - T_p)} \right]^{0.25}$$

Oggi si hanno correlazioni più precise e sofisticate di quella di Nusselt e in particolare l'entalpia di condensazione viene data dalla relazione:

$$h'_{lv} = h_{lv} + 0.68 c_{p,l} (T_{sat} - T_p)$$

che tiene conto anche di eventuali moto ondosi del liquido e di condizioni di turbolenza che possono manifestarsi a partire da una certa sezione.

Per banchi di tubi si utilizza la correlazione di *Chen*:

$$\bar{h}_L = 0.728 \left[1 + 0.2 \frac{c_p (T_s - T_p)}{r} (n-1) \right] \left[\frac{\rho_l (\rho_v - \rho_l) g h_{lv} \lambda^3}{n d \mu_l (T_s - T_p)} \right]^{0.25}$$

ove n è il numero di tubi di diametro d .

8.5 I TUBI DI CALORE (*HEAT PIPE*)

Una interessante applicazione di quanto sopra visto per l'ebollizione e la condensazione si ha nei *tubi di calore* (*Heat Pipe*) schematizzati in Figura 108. Si tratta di un tubo le cui dimensioni possono essere di pochi millimetri e di metri, a seconda dei casi, all'interno del quale è posto un vapore saturo nelle condizioni di temperatura e pressione di esercizio.

Nella zona inferiore si ha la testata calda nella quale viene ceduto calore al fluido che, per conseguenza, vaporizza.

Per effetto di microcavità create all'interno del tubo si hanno movimenti di vapore verso l'alto (ma il fenomeno è indipendente dalla gravità per effetto della micro capillarità creata nel tubo). In alto si ha una testa fredda nella quale si asporta calore provocando il raffreddamento e quindi la condensazione del vapore. Questo cede il suo calore latente di condensazione e pertanto il trasporto di calore dal basso verso l'alto è molto efficace.

Il liquido condensato scende verso il basso sempre per capillarità, aderendo alle pareti laterali del tubo. In questo modo si riprende il ciclo di ebollizione (endotermica) in basso e condensazione (esotermica) in alto. Il tubo di calore, quindi, è un sistema efficace di trasporto di calore dalla zona a contatto con la testata calda verso la zona a contatto con la testata fredda.

La capillarità interna al tubo di calore consente il funzionamento in qualsiasi condizioni, anche in assenza di gravità. Pertanto questa tecnica viene utilizzata, ad esempio, in applicazioni spaziali, in geotermia, in energia solare, in elettronica per il raffreddamento di microprocessori.

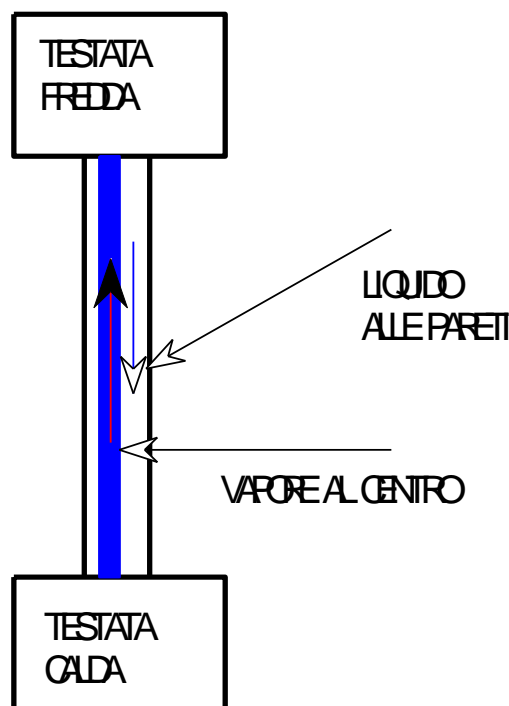


Figura 108: Schematizzazione del tubo di calore

Una applicazione recente in elettronica è costituita da una testata calda che viene posta sulla superficie di un microprocessore interno ad un computer portatile³¹ ed una testa fredda collegata alla parte esterna del coperchio (dietro lo schermo) che funge, così, da radiatore.

Il calore generato dal microprocessore viene portato dai micro tubi di calore sulla superficie esterna del coperchio e da questo disperso per convezione ed irraggiamento nell'ambiente.

Questo sistema è stato ben ingegnerizzato ed ha un costo stimato, su scala industriale, di 25 \$ e quindi tale da non aggravare il costo complessivo del computer. Con l'aumentare della potenza termica prodotta dai microprocessori questo sistema sarà sempre più conveniente.

In energia solare si utilizzano i tubi di calore con freon come fluido di lavoro. Lo schema funzionale è illustrato nella Figura 109.

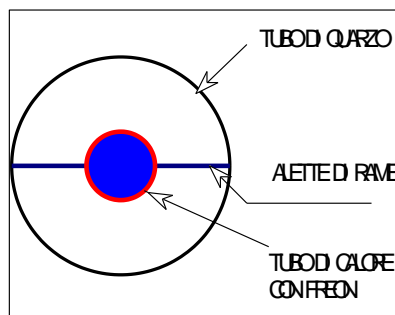


Figura 109: Sezione di un collettore solare a tubo di calore

Si tratta di tubi al quarzo, quindi trasparenti, all'interno dei quali si pone un tubo di calore con due alette laterali in rame. Le alette, investite dalla radiazione solare e per l'effetto serra che si genera all'interno del tubo di quarzo, convertono la radiazione solare in calore che viene trasmesso verso la zona centrale ove è presente il tubo di calore.

Rispetto alla configurazione di Figura 108 manca la testata calda sostituita dalle superfici alettate lungo tutto la lunghezza del tubo di calore. E' però presente la testata fredda che viene inserita all'interno di un grosso tubo all'interno del quale passa l'acqua di refrigerazione che, pertanto, viene riscaldata e quindi trasporta l'energia utile all'esterno.

Il tubo di calore ha dei limiti di funzionamento dovuti al fatto che la sezione di passaggio del liquido può essere interrotta nel caso in cui la generazione di vapore (di elevato volume specifico) sia superiore al limite consentito dalla sezione stessa.

Si definisce, quindi, un *flusso critico di flusso* come il flusso massimo consentito nella testata calda senza interruzione della circolazione del flusso interno.

³¹ Il computer portatili presentano condizioni operative più critiche rispetto a desktop perché la componentistica è racchiusa in spazi limitati e miniaturizzati e perché l'utilizzo di sistemi di raffreddamento attivi consumano energia che riduce la durata delle batterie di alimentazione. Le ultime generazioni di computer usano un contenitore in lega di magnesio che è leggera ma è anche buona conduttrice di calore. Pertanto il calore prodotto dal microprocessore viene disperso da tutta la superficie di appoggio del computer e in parte dal coperchio per convezione termica naturale.

9 L'IRRAGGIAMENTO

È l'ultima forma di trasmissione del calore che prendiamo in esame. Come già accennato in precedenza in questo caso l'energia viaggia sotto forme di onde elettromagnetiche e può propagarsi anche nel vuoto. Pertanto *l'irraggiamento non richiede presenza di materia* come invece richiedono la conduzione e la convezione termica.

Le onde elettromagnetiche, emesse da tutti i corpi a temperatura superiore allo zero assoluto, divengono energia interna (e quindi *calore*) quando sono assorbite da un altro corpo. Nello spazio la materia non è presente e si ha il *freddo siderale* così come in alta montagna la rarefazione della materia provoca l'abbassamento di temperatura rispetto al fondo valle.

L'energia elettromagnetica assorbita da un corpo viene trasformata in energia interna e quindi in agitazione molecolare.

Si ricorderà che l'energia interna è proporzionale, tramite il calore specifico a volume costante, alla temperatura assoluta del corpo stesso e quindi si intuisce come mai l'incremento dell'energia interna porti ad incremento della temperatura del corpo.

Si sottolinea l'importanza dell'*irraggiamento*: è tramite questa forma di trasmissione dell'energia che il sole ci *riscalda*. Lo studio dell'irraggiamento presenta aspetti matematici complessi. Qui si cercherà di semplificare al massimo tale trattazione ricordando solamente le leggi fondamentali.

Una radiazione elettromagnetica è caratterizzata da tre parametri fondamentali: la lunghezza d'onda, la frequenza, la velocità di propagazione nel mezzo. Vale la legge generale delle onde:

$$\lambda \nu = \frac{c_0}{n}$$

ove:

- λ è la lunghezza d'onda di solito espressa in μm ;
- ν è la frequenza di oscillazione (*cicli al secondo*) espressa in Hz (*Hertz*);
- n è l'indice di rifrazione del mezzo, per l'aria e per il vuoto è pari ad 1;
- c_0 è la velocità della luce nel vuoto, $2,993 \cdot 10^8$ m/s.

Ogni radiazione è caratterizzata da una lunghezza d'onda e quindi da una frequenza, come indicato in Figura 110.

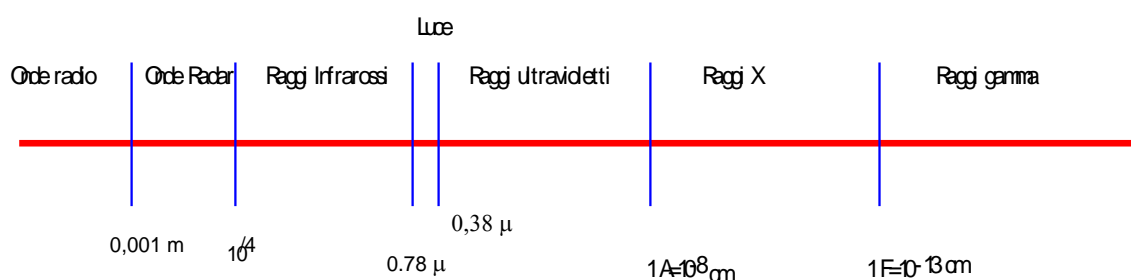


Figura 110: Tipologia delle onde elettromagnetiche al variare della lunghezza d'onda

Poiché il meccanismo fondamentale di trasformazione da energia elettromagnetica a termica passa per l'assorbimento dei corpi occorre subito osservare che, in generale, una radiazione incidente con uno strato di materia, vedi Figura 111, viene in parte riflessa (con fattore ρ), in parte trasmessa (con fattore τ) e in parte assorbita (con fattore α).

Ciascuno di questi fattori (α , τ , ρ) dipendono dalla lunghezza d'onda, cioè dalla tipologia di radiazione elettromagnetica. Ad esempio i corpi assorbono bene le radiazioni infrarosse ed ultraviolette ma assorbono poco i raggi X e γ ed è per questo motivo che queste ultime si utilizzano per le x-grafie e γ -grafie dei materiali.

Quindi si può riscaldare in poco tempo un pollo in un forno a microonde (cioè con raggi infrarossi) piuttosto che con raggi γ che lo attraversano senza interagire, praticamente, con la materia. Fra i fattori suddetti vali la relazione:

$$t_{\lambda} + \rho_{\lambda} + \alpha_{\lambda} = 1$$

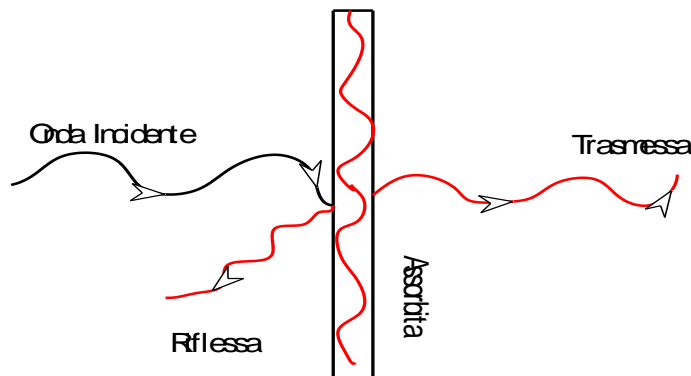


Figura 111: Interazione delle onde elettromagnetiche con la materia

Le onde elettromagnetiche che interessano il *campo termico* sono le cosiddette *onde infrarosse* e le *onde ultraviolette* aventi un intervallo di lunghezza d'onda comprese fra $10^{-4} m$ a $10^{-2} \mu m$. Si ricorda che le onde elettromagnetiche comprese fra $0,38$ e $0,78 \mu m$ sono di fondamentale interesse per l'uomo in quanto per l'effetto³² che provocano sull'uomo sono chiamate **luce visibile**.

La radiazione solare ha una variabilità della lunghezza d'onda che va dalle radiazioni *ultraviolette* a quelle *infrarosse lontane* e comprende la luce visibile per circa il 48% della radiazione totale emessa. La composizione dello spettro solare (cioè della distribuzione delle radiazioni in funzione della lunghezza d'onda) varia con l'altitudine e con la massa atmosferica (nubi, aria pulita,...), come si dirà nel prosieguo.

9.1 UNITÀ DI MISURA PER L'IRRAGGIAMENTO

Considerato il diverso meccanismo della trasmissione del calore per irraggiamento rispetto a quelle per conduzione e per convezione termica, occorre introdurre alcune opportune unità di misura relative alle grandezze di scambio usuali nell'irraggiamento.

Le radiazioni elettromagnetiche hanno proprietà direzionali (si pensi al comportamento di uno specchio rispetto ad una superficie opaca uniformemente riflettente) e pertanto le grandezze radiative debbono prendere in considerazione sia la natura (cioè la lunghezza d'onda λ) che la direzionalità (cioè l'angolo solido di emissione).

9.1.1 EMISSIONE MONOCROMATICA

Definiamo *Emissione monocromatica* la potenza radiativa emessa da una superficie nell'intervallo fra λ e $d\lambda$, cioè:

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{dq}{dS d\lambda}$$

Essa è espressa in $[W/m^2\mu m]$. Si vedrà nel seguito che un corpo non emette uniformemente al variare della frequenza e pertanto mediante questa grandezza possiamo sapere quanta potenza radiativa viene emessa ad ogni lunghezza d'onda. Si suole definire questa grandezza anche come *emissione monocromatica* poiché ad ogni λ corrisponde un colore (cioè una tipologia di radiazione).

³² Si chiarisce qui il concetto che non sono le onde elettromagnetiche ad essere chiamate luce ma la sensazione da esse prodotta nel nostro cervello. La visione avviene, infatti, tramite l'interpretazione dei segnali sensoriali che pervengono, tramite il nervo ottico, al cervello.

9.1.2 EMISSIONE GLOBALE

Se integriamo la emissione monocromatica in tutto l'intervallo di lunghezze d'onda (cioè da 0 ad ∞) si ha l'*emissione globale* di una superficie:

$$E = \int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda$$

Le unità di misura sono, quindi, $[W/m^2]$.

9.1.3 INTENSITÀ DI EMISSIONE MONOCROMATICA

Se consideriamo una superficie dS e con riferimento alla sua normale n si vuole individuare la potenza emessa nella direzione ω entro un angolo solido³³ $d\omega$, vedi Figura 112. Si definisce allora *intensità di emissione monocromatica* il rapporto:

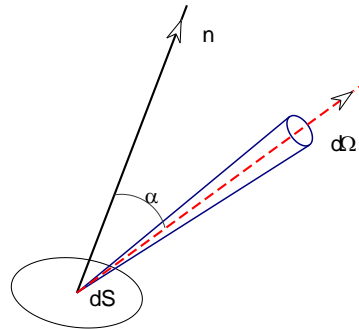


Figura 112: Intensità di emissione monocromatica

$$di_{\lambda,\Omega} = \frac{dq}{dS \cos \alpha \cdot d\lambda \cdot d\Omega}$$

Le unità di misura sono $[W/m^2 \mu m sr]$

9.1.4 INTENSITÀ DI EMISSIONE GLOBALE

Se integriamo l'*intensità di emissione monocromatica* per tutte le lunghezze d'onda allora si ha:

$$I_{\Omega} = \int_0^{\infty} i_{\lambda} d\lambda$$

che è l'*intensità totale nella direzione Ω* . E si misura in $[W/m^2 sr]$.

9.2 EMISSIONE EMISFERICA

Si consideri una superficie emittente nel semispazio³⁴, come indicato in Figura 113. Allora si ha che l'angolo solido vale:

$$d\omega = \frac{2\pi r \cdot \sin \alpha \cdot r d\alpha}{r^2}$$

e l'emissione nel semispazio vale:

$$E = 2\pi I_{\alpha} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$$

³³ Si definisce *angolo solido* il rapporto fra la calotta sferica e il quadrato del raggio. Nel caso generale si può definire *angolo solido* il rapporto fra la superficie proiettata nella direzione di emissione e il quadrato della distanza. L'angolo solido varia da 0 a 4π . Il semispazio è pari a 2π . L'unità dell'angolo solido è lo *steradiano* indicato con *sr*.

³⁴ Le radiazioni elettromagnetiche emesse da un corpo provengono da uno strato superficiale di pochi Angstrom poiché le emissioni degli strati più profondi sono assorbite dalla stessa materia del corpo. Pertanto data una superficie si deve conservare solo l'emissione in un semispazio, come nel caso qui considerato.

Cioè si ha:

$$E = \pi I_a$$

Se si considerano grandezze monocromatiche si ha una relazione del tutto analoga:

$$e_\lambda = \pi i_{\lambda,\alpha}$$

Queste relazioni risultano molto importanti per il prosieguo e per l'*Illuminotecnica*.

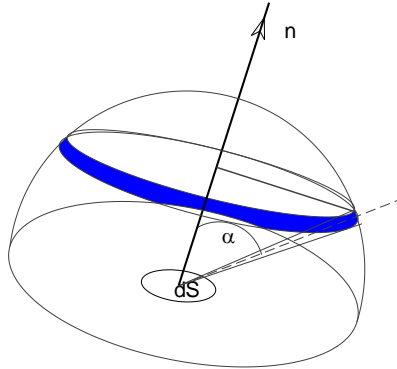


Figura 113: Emissione emisferica

9.3 IL CORPO NERO

L'interazione delle onde elettromagnetiche con la materia è caratterizzata dai tre fattori ρ , α , τ ciascuno funzione della lunghezza d'onda. Risulta allora estremamente complesso caratterizzare il comportamento di un corpo (sia che sia emettitore che assorbitore) e pertanto occorre fare una idealizzazione che consenta di scrivere relazioni cercate: supporremo l'esistenza di un corpo ideale capace di *assorbire tutte le radiazioni* e quindi le sue interazioni con le radiazioni sono estremamente semplici. Tale corpo è detto **corpo nero** ed è bene sottolineare che la parola **nero** si riferisce non solamente al colore visivo nero ma anche a tutte le lunghezze d'onda esistenti.

Possiamo dire, con un gioco di parole, che il **corpo nero** è più nero del nero visibile. Ad esempio la neve appare di colore bianco ma è un ottimo corpo nero per le radiazioni ultraviolette. Il **corpo nero** emette una radiazione che è data dalla relazione di *Planck* seguente:

$$\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}$$

ove il simbolismo è il seguente:

- λ è la lunghezza d'onda, μm ;
- T è la temperatura assoluta del corpo nero, K ;
- $\varepsilon(\lambda, T)$ è la *radianza monocromatica* cioè l'energia emessa per unità di tempo, nell'intervallo di lunghezza d'onda $d\lambda$ attorno alla frequenza λ e per unità di superficie; $[W/(\mu m K)]$.
- C_1 e C_2 sono due costanti pari a

$$C_1 = 3.742 \cdot 10^8$$

$$C_2 = 1.439 \cdot 10^4$$

Una rappresentazione grafica della legge di *Planck* per temperature variabili da 1000 a 6000 K (dal basso verso l'alto) è data nella Figura 114 seguente ove si sono segnati anche gli intervalli di visibilità dell'occhio umano medio (0,38 e 0,78 μm). La curva più alta è relativa a 6000 K che è la temperatura apparente del disco solare: tale curva è in buona approssimazione la curva di emissione del sole così come si può rilevare immediatamente fuori dell'atmosfera.

Al disotto dell'atmosfera si hanno assorbimenti dei gas (CO_2 , O_2 , NO_2 , O_3 , H_2O ,...) che modificano sensibilmente tale spettro. L'esame di queste curve (con temperature crescenti verso l'alto) ci mostra che i massimi di ciascuna curva si sposta verso lunghezze d'onda decrescenti secondo la relazione:

$$\lambda_{max} T = 2897.6$$

che esprime una legge di variazione iperbolica di λ_{max} (cioè della lunghezza d'onda per la quale si ha la massima emissione) con la temperatura assoluta T di emissione del corpo nero.

Tale curva è riportata in fig. 6 come linea tratteggiata che tocca i punti massimi delle curve di emissione del corpo nero. Per la temperatura di 6000 K si ha, ad esempio, una $\lambda_{max}=0,498 \mu m$. Si è detto che l'occhio umano vede la luce nell'intervallo fra 0,38 e 0,78 μm e pertanto il valore di λ_{max} sopra indicato corrisponde alla zona di massima visibilità dell'occhio umano medio.

Un corpo alla temperatura di 300 K ha $\lambda_{max}=9,56 \mu m$ e cioè emette nel campo delle radiazioni infrarosse. Così avviene per il corpo umano il cui campo di emissione radiativo ricade proprio nell'infrarosso (si parla di *infratermia* per la riprese fotografiche ai raggi infrarossi per uso medico). Un metallo al punto di fusione, ad esempio il ferro, alla temperatura di 2000 K ha $\lambda_{max}=1,49 \mu m$ e quindi nel campo dell'infrarosso vicino: il ferro incandescente, infatti ha un colore rossiccio tipico del metallo caldo e al crescere della temperatura di riscaldamento tende al giallo-rosso fino a divenire bianco alla fusione.

La lava appare rossiccia alla temperatura di uscita dal cratere ma quando si raffredda non è più visibile: una fotografia all'infrarosso renderebbe visibile il magma. Le curve $E(\lambda, T)$ forniscono l'indicazione dell'energia emessa al variare della lunghezza λ delle radiazioni. Se si desidera conoscere l'energia totale emessa in tutto lo spettro (cioè per λ variabile da 0 ad ∞) si ha la relazione di *Stefan - Boltzmann*:

$$E = \sigma_o T^4 \quad [138]$$

con:

- $\sigma_o = 5,64 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$ detta costante di *Stefan - Boltzmann*;
- T la temperatura assoluta del corpo nero, K;
- E energia globale radiante specifica, W/m^2 .

La [138] è di grande importanza³⁵ perché consente di calcolare la quantità di energia irradiata da un corpo nero una volta nota la sua temperatura assoluta. Si badi bene che un corpo nero irradia *sempre* purché a temperatura superiore allo zero assoluto (cioè sempre, visto lo zero assoluto non è raggiungibile mai, secondo il terzo principio della *Termodinamica*).

Pertanto se due corpi neri si *scambiano* (nel senso che si dirà nel successivo paragrafo) energia radiativa allora si ha che il corpo caldo irradia il corpo freddo e quello caldo irradia quello caldo. L'interscambio (cioè la differenza di energia fra quella irradiata e quella ricevuta) è positiva per il corpo caldo e ciò a conferma del secondo principio della termodinamica che vuole il flusso termico positivo se scambiato da un corpo caldo verso un corpo freddo.

9.4 EMISSIVITÀ SPECIFICA

Il *corpo nero* è una idealizzazione necessaria per potere effettuare gli studi teorici sui meccanismi della radiazione termica. I corpi reali sono ben più complessi in quanto hanno un comportamento non facilmente ottenibile in forma analitica. Figura 115 si hanno alcuni spettri caratteristici di emissione radiativa.

³⁵ Può essere interessante osservare che la $E = \sigma_o T^4$ è stata derivata da Boltzmann verso la metà del secolo scorso e cioè molto prima che Planck pubblicasse la sua legge di emissione del corpo nero. In effetti Boltzmann ricavò la sua relazione solo con considerazioni termodinamiche senza ancora conoscere nulla sulla teoria quantistica di Planck.

Si osservi come l'emissione monocromatica può variare con continuità (anche se in modo non analiticamente definibile) o in modo discreto (come avviene, ad esempio, nelle lampade a scarica nei gas) e come, ultimo diagramma in basso, l'emissione del corpo nero abbia le caratteristiche sopra descritte.

Procedendo per passi successivi si può definire *corpo grigio* un corpo che emetta, per data temperatura, come un *corpo nero* ma con intensità che sta a quello dello stesso *corpo nero* in rapporto costante. Si può definire **emissività** il rapporto fra l'emissione del *corpo grigio* e quella del *corpo nero* secondo la seguente relazione:

$$\varepsilon = \frac{E}{E_n} = \frac{E}{\sigma_o T^4} \quad [139]$$

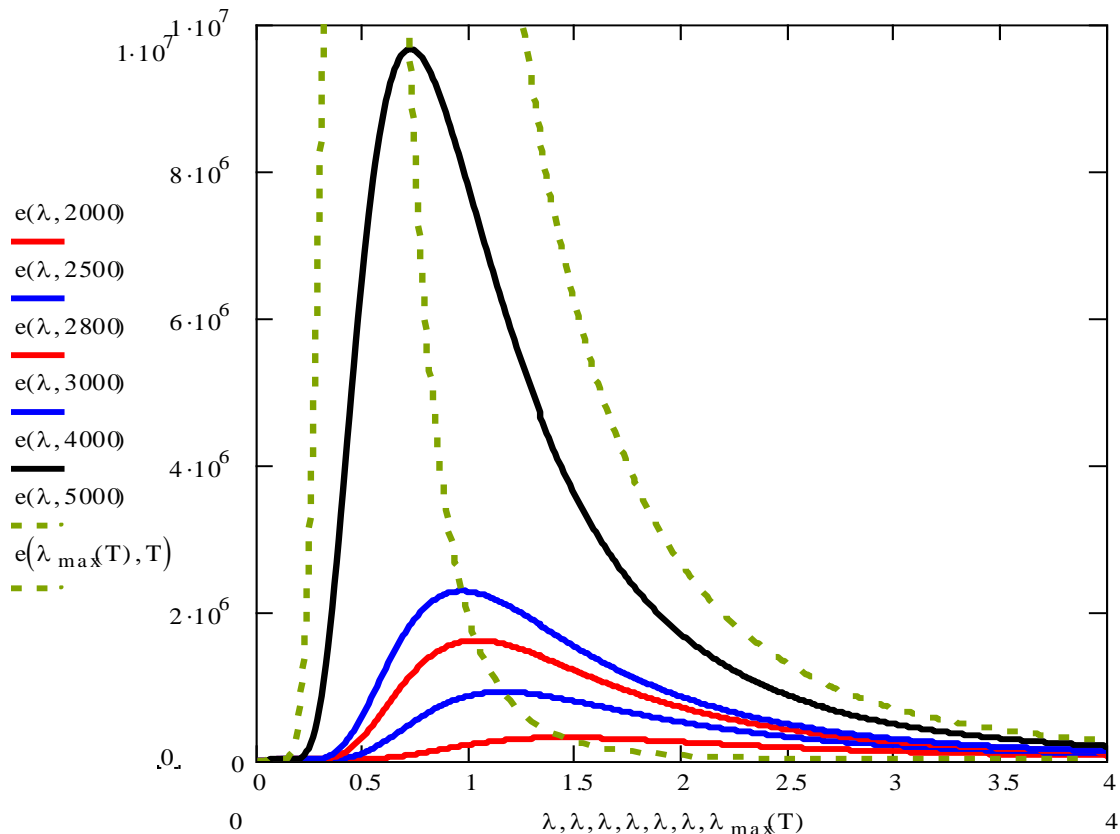


Figura 114: Curve di emissione di Planck per corpo nero a varie temperature.

ove con E si indica l'emissione del *corpo grigio* e con E_n quella del *corpo nero*. Dalla [139] si deduce che per avere l'emissione globale di un *corpo grigio* basta conoscere la sua *emissività* e moltiplicarla per l'emissione totale del corpo nero (relazione di *Stefan - Boltzmann* [138]).

Pertanto si ha, in generale, la seguente relazione:

$$E = \varepsilon \sigma_o T^4 \quad [140]$$

Poiché l'emissività è sempre minore di uno il corpo grigio emette sempre meno del corpo nero alla stessa temperatura. Ad esempio nella Figura 116 si ha un esempio di emissione di corpi neri, grigi e reali (detti anche *selettivi*) nella quale si può osservare la grande variabilità dell'emissione monocromatica nei corpi reali e la difficoltà di descrivere questa grandezza con relazioni matematiche esplicite.

Dall'osservazione della Figura 116 si deduce che un corpo grigio emette sempre in proporzione costante (pari alla sua *emissività*) rispetto al corpo nero a pari temperatura e quindi per esso ε non dipende dalla lunghezza d'onda ma solo dalla temperatura, inoltre un corpo reale emette sempre meno del corpo nero a pari temperatura anche se in certi intervalli di frequenza possono emettere più di un corpo grigio *equivalente*.

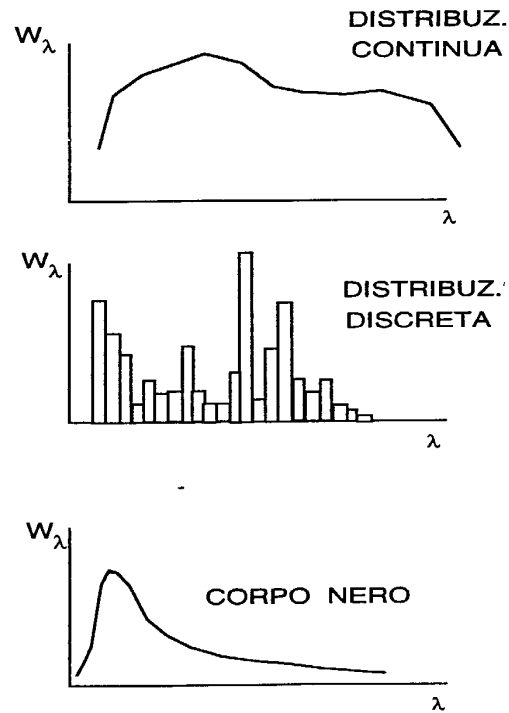


Figura 115: Tipologie di Emissioni radiative

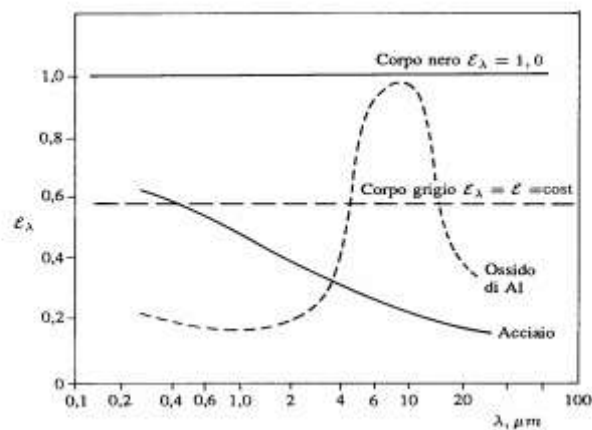


Figura 116: Andamento di ϵ per corpi neri, grigi e reali.

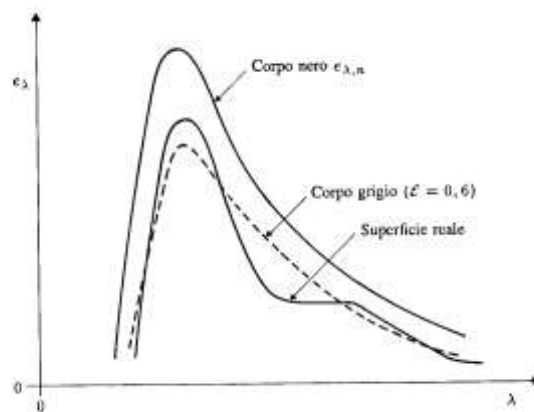


Figura 117: Andamento dell'emissione monocromatica per corpi neri, grigi e reali.

Questo fenomeno, detto *selettività* dell'emissione dei corpi reali, risulta molto utile in numerose applicazioni quali, ad esempio, la costruzione dei filamenti di tungsteno delle lampade ad incandescenza³⁶ o nella scelta di sostanze che mettano selettivamente in intervalli di frequenza diversi (ε bassa per lunghezze d'onda grandi, $> 7 \mu m$, e ε grandi per lunghezze d'onda piccole, $< 3 \mu m$) utilizzate per la costruzione di collettori solari selettivi ad elevata efficienza di raccolta.

La relazione [140] può ulteriormente essere generalizzata per lo scambio di due superfici grigie, ciascuna a temperatura T_1 e T_2 , tenendo conto anche del *fattore di forma* e ottenendo la reazione generale dello scambio termico radiativo fra due corpi grigi:

$$E = S F_{12} (T_1^4 - T_2^4) \quad [141]$$

Il calcolo di F_{12} , detto *fattore di forma o di vista*, sarà approfondito nei prossimi paragrafi.

9.4.1 LEGGE DI KIRCHHOFF

Per corpi *in equilibrio termodinamico* si ha:

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = \frac{\varepsilon_{\lambda n}}{a_{\lambda n}} = 1$$

e pertanto risulta:

$$e_\lambda = a_\lambda$$

Analoga relazione vale per le emissività e i fattori di assorbimento totali, e cioè si ha:

$$\varepsilon = \alpha$$

Questa relazione può facilmente dimostrarsi supponendo di avere un corpo grigio all'interno di una cavità nera in equilibrio termico con essa.

Allora l'energia ricevuta deve essere pari a quella irradiata e quindi deve aversi:

$$a_\lambda G_\lambda = \varepsilon_\lambda E_{n_\lambda}$$

ove G_λ è l'irradiazione (*cioè l'energia ricevuta*) alla frequenza λ .

Poiché l'energia ricevuta dal corpo grigio proviene dal corpo nero per il quale è $G_\lambda = E_{n_\lambda}$ semplificando i due membri si ottiene la legge di Kirchhoff.

9.5 I CORPI NON GRIGI

I corpi che non appartengono ai corpi neri e neppure ai corpi grigi sono detti *corpi selettivi* e sono, in pratica, i *corpi reali*.

Essi emettono sempre meno del corpo nero (che oltre ad assorbire tutto emette anche più di qualunque altro corpo esistente) ma può avere uno spettro di emissione che non è più in rapporto costante con quello del corpo nero (come avviene per il corpo grigio) ma variabile con la lunghezza d'onda.

I corpi selettivi possono emettere più in certe zone dello spettro e meno in altre rispetto al corpo grigio (e quindi sempre meno del corpo nero) donde il loro nome *selettivi*.

Lo scambio radiativo dei corpi selettivi è molto complesso poiché oltre alla complicazione della geometria (e quindi nel calcolo dei fattori di forma) essi impongono il calcolo delle potenze scambiate anche al variare delle lunghezze d'onda.

Inoltre i corpi selettivi non hanno emissione termica specifica esprimibile in forma analitica ma quasi sempre in forma tabellare o grafica derivate dalle sperimentazioni pratiche

³⁶ Il tungsteno emette nell'intervallo del visibile, $0,38 \div 0,78 \mu m$, più dei corpi grigi a parità di temperatura. Questa proprietà è sfruttata per migliorare l'emissione luminosa delle lampade in quanto con il filamento di tungsteno emettono assai meglio che con filamento di altro materiale.

9.6 CONCETTO DI FATTORE DI FORMA

Lo scambio radiativo fra due o più corpi neri è problema di non facile soluzione tranne in casi e geometrie semplici per altro abbastanza comuni nella realtà. Pur tuttavia è opportuno approfondire in questa sede lo studio del *Fattore di Forma* in considerazione delle applicazioni che di questo sarà fatta nel prosieguo, ad esempio per lo studio degli scambi radiativi fra corpo umano e pareti di un ambiente per le condizioni di benessere. In Figura 118 è indicato il caso di due corpi neri che si *vedono* secondo due angoli solidi Ω e Ω' ed aventi una distanza R fra due punti P e P' giacenti su di essi. In generale la trattazione per il calcolo del *Fattore di Forma* richiede ulteriori approfondimenti sullo scambio radiativo. Dette T_1 e T_2 le temperature delle due superfici, si ha il seguente sviluppo. L'intensità emisferica della superficie A_1 vale:

$$I_1 = \frac{dq_{1 \rightarrow 2}}{dA_1 \cos \phi_1 d\Omega_1} \quad \Rightarrow \quad dq_{1 \rightarrow 2} = I_1 dA_1 \cos \phi_1 d\Omega_1 \quad [142]$$

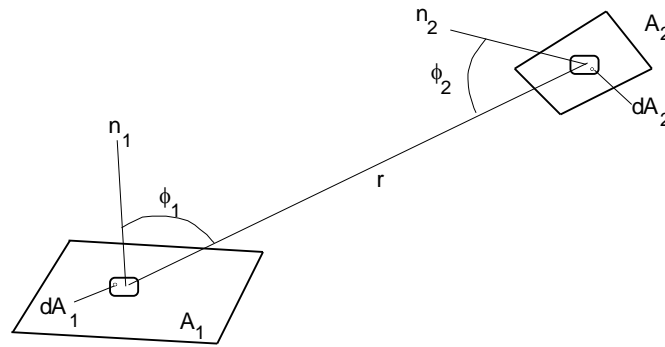


Figura 118: Scambio radiativo fra corpi neri (*Fattore di Forma*)

Se la superficie A_1 è un *Corpo Nero* (CN) allora si può dimostrare che l'intensità di emissione emisferica è legata alla emissione globale, come visto in precedenza, dalla relazione seguente:

$$I_1 = \frac{E_{n1}}{\pi} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \quad d\Omega_1 = \frac{dA_2 \cos \phi_2}{r^2}$$

Questa relazione vale anche per le grandezze monocromatiche per cui è:

$$i_\lambda = \frac{e_\lambda}{\pi}$$

allora il flusso che dal corpo nero 1 va verso il corpo nero 2 è dato dalla relazione:

$$dq_{1 \rightarrow 2} = E_{n1} \frac{dA_1 dA_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2}$$

Si definisca ora il *Fattore di Forma* come la frazione dell'energia complessivamente emessa dal corpo nero 1 che giunge al corpo nero 2:

$$F_{12} = \frac{dq_{1 \rightarrow 2}}{E_{n1}} = \frac{1}{A_1} \iint_{A_1 A_2} \frac{dA_1 dA_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} \quad [143]$$

Allora si può scrivere per il flusso che da 1 va verso 2:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = F_{12} A_1 E_{n1}$$

Analogamente si può ragionare per la superficie 2 per cui il flusso che da 2 va verso 1 è dato da:

$$dq_{2 \rightarrow 1} = E_{n2} \frac{dA_2 dA_1 \cos \phi_2 \cos \phi_1}{\pi r^2}$$

$$F_{21} = \frac{dq_{2 \rightarrow 1}}{E_{n2}} = \frac{1}{A_2} \iint_{A_2 A_1} \frac{dA_2 dA_1 \cos \phi_2 \cos \phi_1}{\pi r^2} \quad [144]$$

Si osservi come il *Fattore di Forma* F_{12} dipende solo da grandezze geometriche e non da grandezze radiative. In pratica esso dipende solo da come le due superfici si vedono mutuamente.

Il flusso radiativo che dalla superficie 2 viene irradiato verso la superficie 1 è:

$$Q_{2 \rightarrow 1} = F_{21} A_2 E_{n2}$$

Se le due superfici sono alla stessa temperatura allora vale la relazione:

$$Q_{2 \rightarrow 1} = Q_{1 \rightarrow 2} \quad \text{e quindi} \quad F_{12} A_1 E_{n1} = F_{21} A_2 E_{n2}$$

essendo $E_{n1} = E_{n2}$ si ha:

$$F_{12} A_1 = F_{21} A_2 \quad [145]$$

Pertanto è sufficiente conoscere uno solo dei fattori di forma (o di vista) per conoscere, note le superfici emittenti, l'altro. Del resto data la formulazione analitica di F_{12} deriva anche:

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \iint_{A_1 A_2} \frac{dA_1 dA_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2}$$

$$F_{21} = \frac{1}{A_2} \iint_{A_2 A_1} \frac{dA_2 dA_1 \cos \phi_2 \cos \phi_1}{\pi r^2}$$

Ma poiché:

$$\iint_{A_1 A_2} \frac{dA_1 dA_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} = \iint_{A_2 A_1} \frac{dA_2 dA_1 \cos \phi_2 \cos \phi_1}{\pi r^2}$$

risulta anche:

$$F_{12} A_1 = F_{21} A_2 \quad [146]$$

Questa relazione è detta *relazione di reciprocità* o anche *teorema di reciprocità*.

Dunque il flusso netto scambiato si può scrivere come:

$$\begin{aligned} Q &= Q_{1 \rightarrow 2} - Q_{2 \rightarrow 1} = A_1 F_{12} \sigma T_1^4 - A_2 F_{21} \sigma T_2^4 = \\ &= \sigma A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4) = -\sigma A_2 F_{21} (T_1^4 - T_2^4) \end{aligned}$$

9.6.1 ADDITIVITÀ DEI FATTORI DI FORMA

Se la superficie $A_{(j)}$ risulta dalla somma di A_k ($k=1,2,..n$) superfici parziali, allora sussiste la seguente proprietà di additività dei *Fattori di Forma*:

$$F_{i(j)} = \sum_{k=1}^n F_{ik}$$

Moltiplicando ambo i membri per A_j , si ha:

$$A_i F_{i(j)} = A_i \sum_{k=1}^n F_{ik} = \sum_{k=1}^n A_i F_{ik} = \sum_{k=1}^n A_k F_{ki}$$

l'ultimo passaggio è lecito per il teorema di reciprocità.

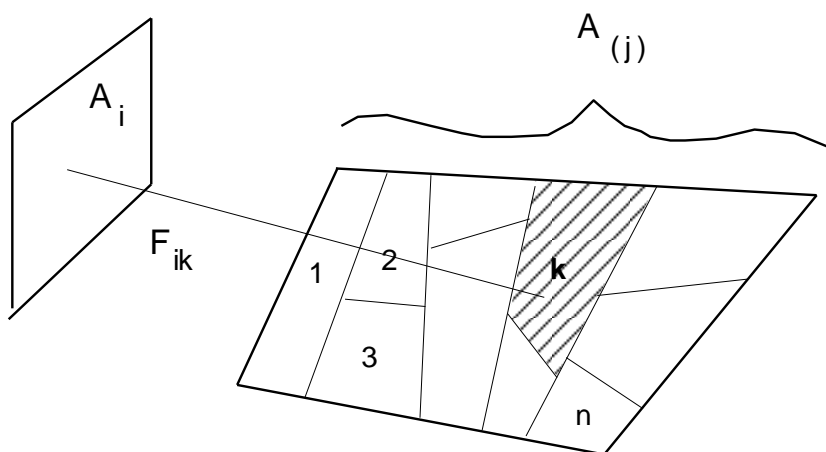


Figura 119: Additività dei Fattori di Forma

Ne segue che il generico Fattore di Forma è dato dalla relazione:

$$F_{i(j)} = \frac{\sum_{k=1}^n A_k F_{ki}}{A_i} \quad [147]$$

oppure, sempre per il teorema di reciprocità, dalla relazione:

$$F_{(j)i} = \frac{\sum_{k=1}^n A_k F_{ki}}{A_{(j)}} \quad [148]$$

Esempio di calcolo dei fattori di forma

Data la situazione di Figura 119 calcolare F_{13} fra la superficie 1 e la superficie 3.

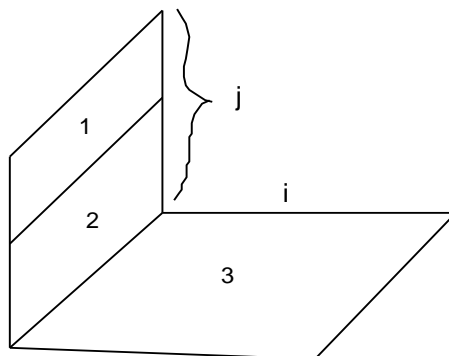


Figura 120: Scambio radiativo fra superfici piane (pareti d'angolo)

Si applichi la relazione di additività dei fattori di forma:

$$A_i F_{ij} = \sum_{k=1}^n A_k F_{ki}$$

con $i=3$; $j=(1+2)$; $k=1 \div 3$. Si ha subito:

$$A_3 F_{3(1+2)} = A_1 F_{13} + A_2 F_{23} \quad \Rightarrow \quad F_{13} = \frac{1}{A_1} [A_3 F_{3(1+2)} - A_2 F_{23}]$$

I termini del tipo $F_{3(1+2)}$ e F_{23} sono ricavabili dai diagrammi solitamente disponibili, come riportati in Figura 120. Applicando il *teorema di reciprocità* si ha:

$$F_{31} = \frac{A_1}{A_2} F_{13}$$

Con F_{13} dato dalla formula precedente. Oppure mediante le regole dell'additività si ha:

$$F_{31} = \frac{A_1}{A_2} F_{13} = \frac{A_1}{A_3} \frac{1}{A_1} [A_3 F_{3(1+2)} - A_3 F_{32}] = F_{3(1+2)} - F_{32}$$

In alternativa si può ancora scrivere, sempre per la regola di additività, la relazione:

$$F_{i(j)} = \sum_{k=1}^n F_{ik}$$

ancora con:

$$i=3 \ ; \ j = (1+2) \ ; \ k=1, \div 3$$

e pertanto si ha subito :

$$F_{3(1+2)} = F_{31} + F_{32} \quad \Rightarrow \quad F_{31} = F_{3(1+2)} - F_{32}$$

Quanto sin qui detto trova applicazione in Architettura anche nella verifica di illuminazione diurna, come illustrato dalla seguente Figura 121.

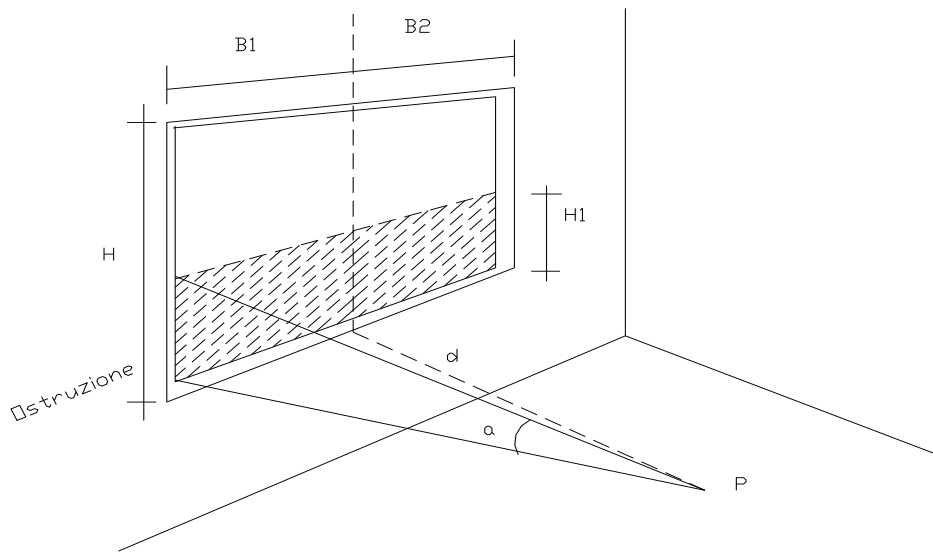


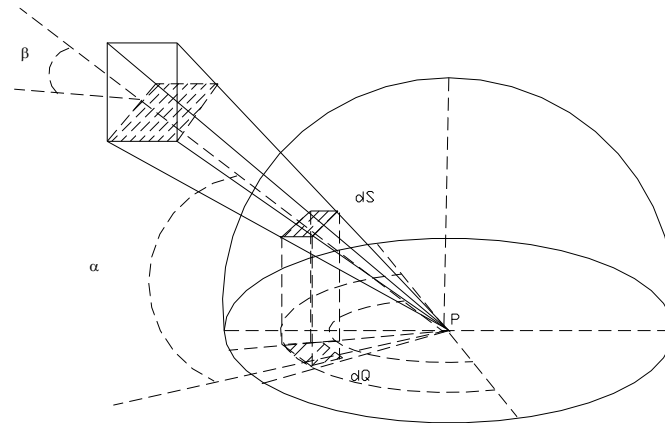
Figura 121: Verifica dell'illuminamento diurno in un punto interno di una sala

In questo caso si può vedere l'effetto dovuto alla parte di finestra libera e a quella di una ostruzione. L'additività dei fattori di forma dianzi descritta consente di calcolare il fattore di forma dovuto alla sola parte di finestra libera.

9.7 PRINCIPIO DELLA SFERA UNITARIA

Un metodo molto applicato deriva dall'applicazione del principio della sfera unitaria derivato dal *teorema di Lagrange*. Si osservi la Figura 122.

Il *principio della sfera unitaria* dice che l'irraggiamento (vedi paragrafo seguente per la definizione) prodotto da una superficie in un punto P giacente sul piano orizzontale è equivalente a quello prodotto da un elemento dS giacente sulla sfera di raggio unitario avente centro in P e che vede con lo stesso angolo solido la superficie irraggiante.



METODO DELLA SFERA UNITARIA

Figura 122: Applicazione del teorema di Lagrange

Tale irraggiamento è proporzionale anche alla proiezione sul piano orizzontale della superficie dS intercetta sulla sfera. La dimostrazione è immediata come qui di seguito indicato. L'irraggiamento G è dato da:

$$E = \frac{I \cdot A \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha}{R^2}$$

A parità di angolo solido si ha:

$$I \cdot A \cdot \cos \alpha = I \cdot A'$$

ove A' è la proiezione dell'area A sulla semisfera di raggio unitario. Ne segue che l'irraggiamento G vale:

$$G = \frac{I \cdot A' \cdot \cos \alpha}{R^2}$$

Si osserva che $A' \cos \alpha$ è la proiezione di A' sul piano orizzontale interno alla semisfera. Detta A'' questa proiezione si ha:

$$G = \frac{I \cdot A''}{R^2} = I \cdot A''$$

essendo $R=1$.

9.8 METODO DELLA RADIOSITÀ

Se le superfici radiative non sono nere il calcolo degli scambi diviene più complesso perché occorre tenere conto non solo dell'energia emessa dalle superfici ($\varepsilon \sigma_0 T^4$) per effetto della temperatura alla quale si trovano ma anche dell'energia riflessa. Si definisce, infatti, **radiosità** la somma:

$$J_i = \rho_i G_i + \varepsilon_i E_{ni} \quad [149]$$

ove si ha il seguente simbolismo:

- J radiosità, $[W/m^2]$
- ρ fattore di riflessione della parete,
- ε emissività termica della parete,
- E_{ni} emissione globale del corpo nero alla medesima temperatura della parete, $[W/m^2]$.

Ricordando che dalla: $\rho + \alpha + \tau = 1$ per un corpo opaco ($\tau=0$) e grigio ($\alpha=\varepsilon$), si ha $\rho = 1 - \alpha = 1 - \varepsilon$, allora risulta:

$$J_i = (1 - \varepsilon_i) G_i + \varepsilon_i E_{ni} \quad [150]$$

Il bilancio energetico sul Volume di Controllo vale :

$$Q_i = A_i (J_i - G_i) \quad [151]$$

Allora eliminando G_i dalla 1) e 2) , risulta :

$$Q_i = \frac{A_i \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (E_{ni} - J_i) \quad [152]$$

Questa relazione si può ancora scrivere nella forma equivalente:

$$Q_i = \frac{E_{ni} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}} \quad [153]$$

che esprime il flusso termico Q_i come rapporto fra le differenze delle emissioni e la *resistenza radiativa superficiale del mezzo* data dalla relazione:

$$R_{rs} = \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i} \quad [154]$$

D'altra parte l'energia ricevuta da A_i è pari a quella emessa da tutte le N superfici che vedono A_i :

$$G_i A_i = \sum_{k=1}^N J_k A_k F_{ki} = \sum_{k=1}^N J_k A_i F_{ik} = A_i \sum_{k=1}^N J_k F_{ik} \quad [155]$$

per cui eliminando A_i e combinando con le precedenti equazioni si ottiene :

$$\begin{aligned} Q_i &= A_i (J_i - \sum_{k=1}^N J_k F_{ik}) = A_i (J_i \underbrace{\left[\sum_{k=1}^N F_{ik} \right]}_{=1} - \sum_{k=1}^N J_k F_{ik}) = \\ &= A_i \left(\sum_{k=1}^N F_{ik} J_i - \sum_{k=1}^N F_{ik} J_k \right) = A_i \sum_{k=1}^N F_{ik} (J_i - J_k) = \sum_{k=1}^N \frac{J_i - J_k}{\frac{1}{A_i F_{ik}}} \end{aligned}$$

I termini a denominatore dell'ultimo membro sono detti *resistenze radiative volumetriche*: Si può trovare lo stesso risultato con un ragionamento diretto. Considerando due superfici grigie che scambiano calore allora l'interscambio radiativo è dato dalla relazione (supponendo la temperatura della superficie 1 maggiore di quella della superficie 2):

$$Q_{12} = J_1 A_1 F_{12} - J_2 A_2 F_{21}$$

Per la regola di reciprocità dei fattori di forma si può scrivere anche:

$$Q_{12} = A_1 F_{12} (J_1 - J_2) = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}}$$

ove, nell'ultima eguaglianza, si è esplicitata la resistenza radiativa volumetrica $\frac{1}{A_1 F_{12}} = \frac{1}{A_2 F_{21}}$.

Ritornando alla cavità composta da N superfici radiative³⁷ allora il sistema di equazioni risolutive è dunque il seguente:

³⁷ Il numero minimo di superfici radiative è pari a 2 supponendo che una di esse almeno sia concava (come in un forno a legna). In questo caso, come in tutti i casi nei quali si hanno superfici concave, allora occorre tenere conto anche dell'aliquota di energia irradiata su se stessa e quindi occorre valutare il fattore di vista F_{jj} .

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_i = \frac{E_{ni} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}} \\ Q_i = \sum_{k=1}^N \frac{J_i - J_k}{\frac{1}{A_i F_{ik}}} \end{array} \right. \quad [156]$$

Le incognite sono:

$$Q_i \text{ e } J_i \quad (i=1,2,\dots,N)$$

si hanno dunque $2N$ equazioni in $2N$ incognite

$$R_{rv} = \frac{1}{F_{ij} A_j} = \frac{1}{F_{ji} A_j} \quad [157]$$

La Figura 125 schematizza il calcolo di una rete elettrica (solamente ohmica) equivalente ad uno scambio radiativo.

9.9 CASO DELLE DUE SORGENTI CONCAVE

Si considerino due superfici non nere generiche tali da formare una cavità chiusa (superfici convesse-concave) come indicato in Figura 126.

Le equazioni di bilancio sono in generale le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_i = \frac{E_{ni} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}} \\ Q_i = \sum_{k=1}^N \frac{J_i - J_k}{\frac{1}{A_i F_{ik}}} \end{array} \right. \quad [158]$$

In questo caso si hanno, particolarizzando, le seguenti equazioni:

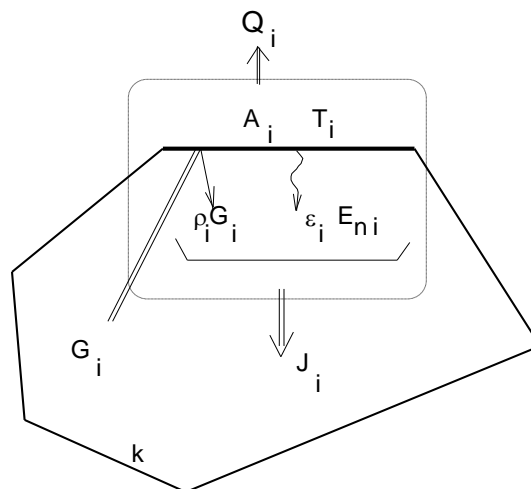


Figura 123: Metodo della radiosità

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \frac{E_{n1} - J_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} \\ Q_1 = \frac{J_1 - J_1}{\frac{1}{A_1 F_{11}}} + \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} \\ Q_2 = \frac{J_2 - J_1}{\frac{1}{A_2 F_{21}}} + \frac{J_2 - J_2}{\frac{1}{A_2 F_{22}}} = \frac{J_2 - J_1}{\frac{1}{A_2 F_{21}}} \\ Q_2 = \frac{E_{n2} - J_2}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} \end{array} \right. \quad [159]$$

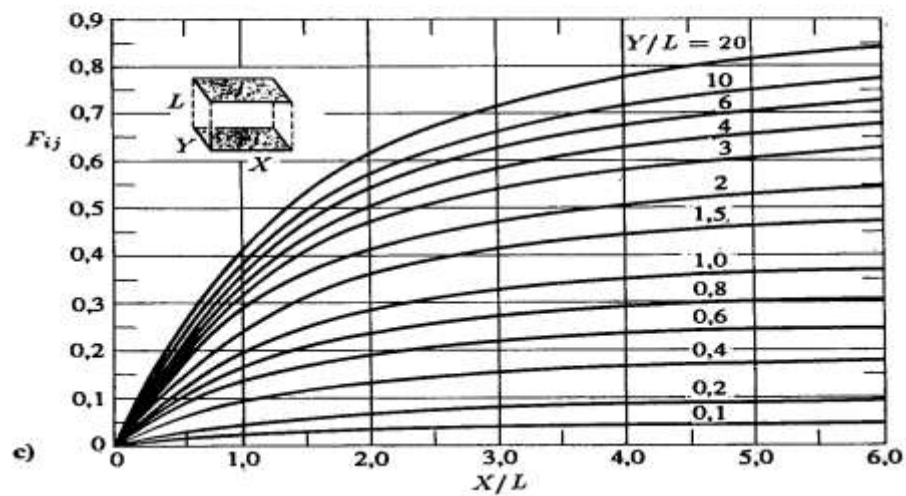
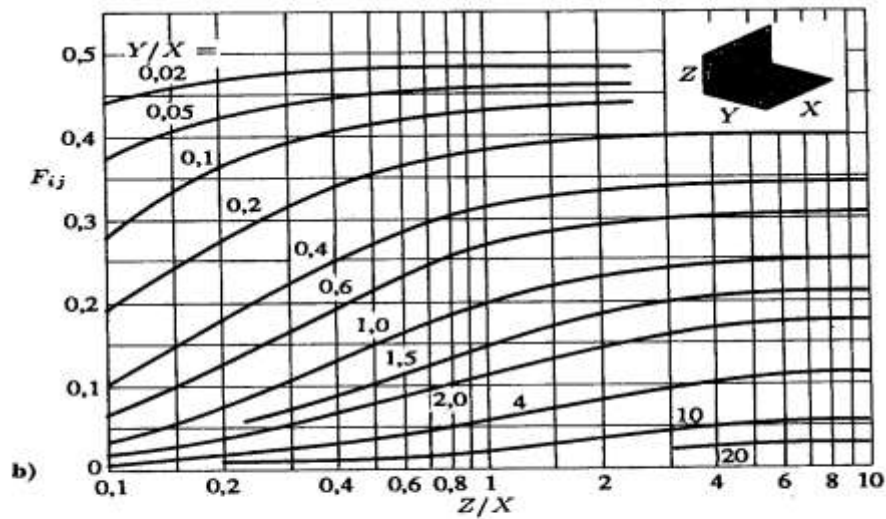


Figura 124: Fattori di forma per casi elementari

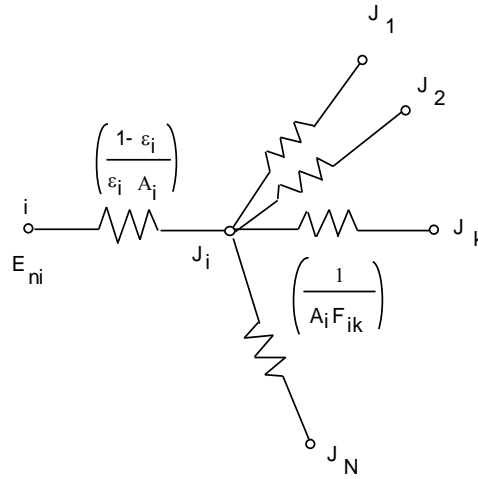


Figura 125: Rete equivalente allo scambio radiativo

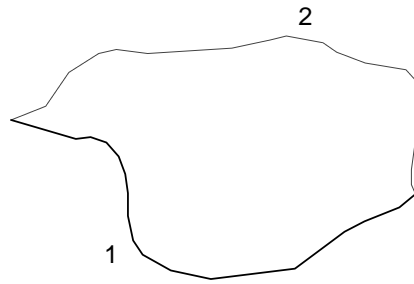


Figura 126: Schema di scambio radiativo fra due superfici formanti una cavità

Poiché per la legge di reciprocità e per la conservazione dell'energia:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad \text{e} \quad Q_1 = -Q_2 = Q$$

le due equazioni intermedie si riducono ad una sola ed il precedente sistema diventa :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{E_{n1} - J_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1}} \\ Q = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} \\ Q = \frac{J_2 - E_{n2}}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} \right) = E_{n1} - J_1 \\ Q \left(\frac{1}{A_1 F_{12}} \right) = J_1 - J_2 \\ Q \left(\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} \right) = J_2 - E_{n2} \end{array} \right.$$

e sommando membro a membro si ottiene la relazione:

$$Q = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}} \quad [160]$$

Infine , ricordando che:

$$E_{n1} = \sigma T_1^4 \quad \text{e} \quad E_{n2} = \sigma T_2^4$$

si ha:

$$Q = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}} \quad [161]$$

Questa relazione, detta di *Christiansen*, consente di determinare il fattore di forma:

$$F_{12} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}} \quad [162]$$

Utilizzando l'analogia elettrica si può riportare lo schema radiativo fra le due superfici formanti cavità nella seguente rete equivalente.

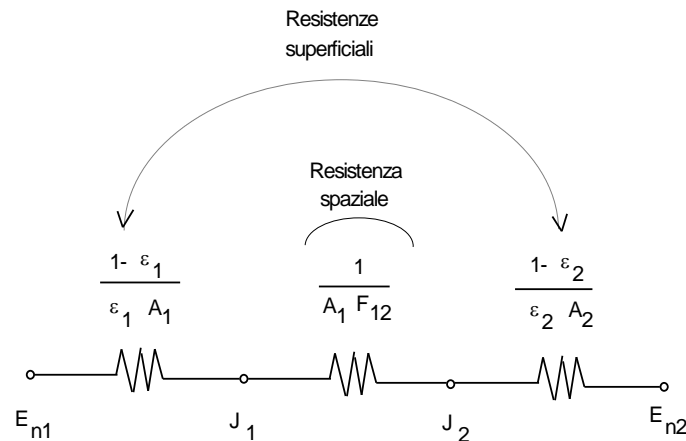


Figura 127: Rete elettrica equivalente

Che può essere risolta con le classiche regole della Fisica.

9.9.1 SUPERFICI *FINITE* PIANE E PARALLELE

Nel caso di superfici piane e parallele (quindi con cavità che si chiude all'infinito) si ha la situazione di figura seguente e il fattore di forma diviene:

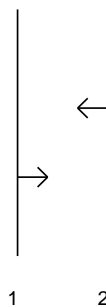


Figura 128: Scambio radiativo fra superfici finite piane e parallele.

$$Q = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}} \quad [163]$$

In realtà per superfici *finite* si dovrebbero considerare gli effetti di bordo: il flusso termico emesso dai bordi non colpisce esattamente la superficie opposta e quindi si ha una dispersione di linee di flusso.

Pertanto il fattore di forma come sopra calcolato è in eccesso rispetto a quello reale.

Pur tuttavia è consigliabile egualmente utilizzare questa relazione ed evitare le complessità derivanti dal considerare le superfici finite.

9.9.2 SUPERFICI *INFINITE* PIANE E PARALLELE

Ponendo le aree delle superfici:

$$A_1 = A_2 = A \quad ; \quad F_{12} = 1$$

si ha, per lo scambio radiativo, la relazione:

$$Q = \frac{\sigma A (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad [164]$$

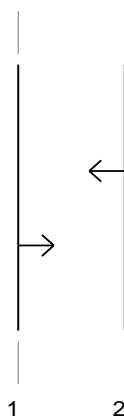


Figura 129: Scambio radiativo fra superfici infinite piane e parallele.

Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ risulta:

$$Q = \frac{\sigma A (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

9.9.3 SFERE O CILINDRI CONCENTRICI

Consideriamo due superfici cilindriche o sferiche concentriche, come indicato nella seguente figura. Ponendo, per evidenti ragioni, il fattore di forma:

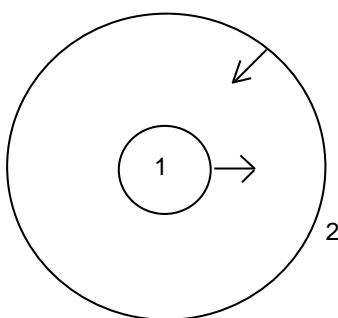


Figura 130: Scambio radiativo fra sfere e cilindri concentrici

$$F_{12} = 1$$

risulta, facendo uso del teorema di reciprocità, che il flusso scambiato vale:

$$Q = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad [165]$$

9.9.4 PARETE CHE IRRADIA VERSO IL CIELO

Consideriamo il caso della figura seguente: una parete irradia verso la volta celeste. Risultano essere, per evidenti ragioni geometriche:

$$\begin{cases} A_c \gg A_p \\ F_{pc} = 1 \end{cases}$$

Pertanto il flusso irradiato dalla parete vale:

$$Q = A_p \varepsilon_p \sigma (T_p^4 - T_c^4) \quad [166]$$

ove T_c è la temperatura della volta celeste che deve essere calcolata opportunamente in considerazione degli assorbimenti differenziati dei vari componenti gassosi dell'atmosfera.

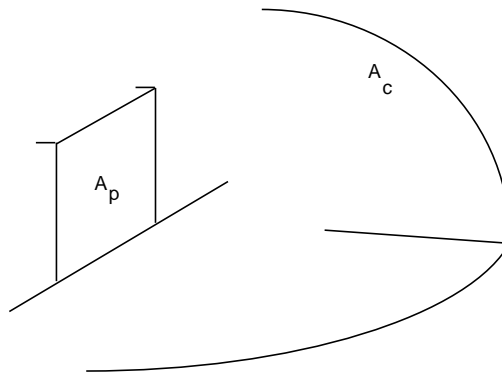


Figura 131: Scambio radiativo fra parete e volta celeste.

9.9.5 SCHERMI RADIATIVI

Un concetto molto utile nelle applicazioni pratiche è quello di *schermo radiativo*. Date due superfici radianti si interponga fra di esse una terza superficie, come indicato in figura seguente.

Se le superfici sono di lunghezza infinita (o se c'è piccolo effetto di bordo nel caso di superfici finite, come già osservato) si può porre per i fattori di forma: $F_{13} = F_{23} = 1$ e quindi, dopo qualche passaggio, il flusso termico scambiato fra le superfici 1 e 2 diviene:

$$Q_{12} = \frac{\sigma A (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1 - \varepsilon_{31}}{\varepsilon_{31}} + \frac{1 - \varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32}}} \quad [167]$$

e se: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon$ allora la precedente relazione si semplifica nella seguente:

$$Q_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma A (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \right) = \frac{1}{2} (Q_{12})_{\text{senza schermo}} \quad [168]$$

Pertanto una parete intermedia di eguali caratteristiche emissive (cioè di eguale emissività rispetto alle pareti esterne) comporta una riduzione a metà del flusso termico scambiato.

Estrapolando per N schermi intermedi si ha, sempre nell'ipotesi di eguali emissività:

$$Q_{12} = \frac{1}{(N+1)} \left(\frac{\sigma A (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \right) = \frac{1}{(N+1)} (Q_{12})_{\text{senza schermo}} \quad [169]$$

Quindi il flusso termico fra le due superfici esterne si riduce di un fattore $N+1$.

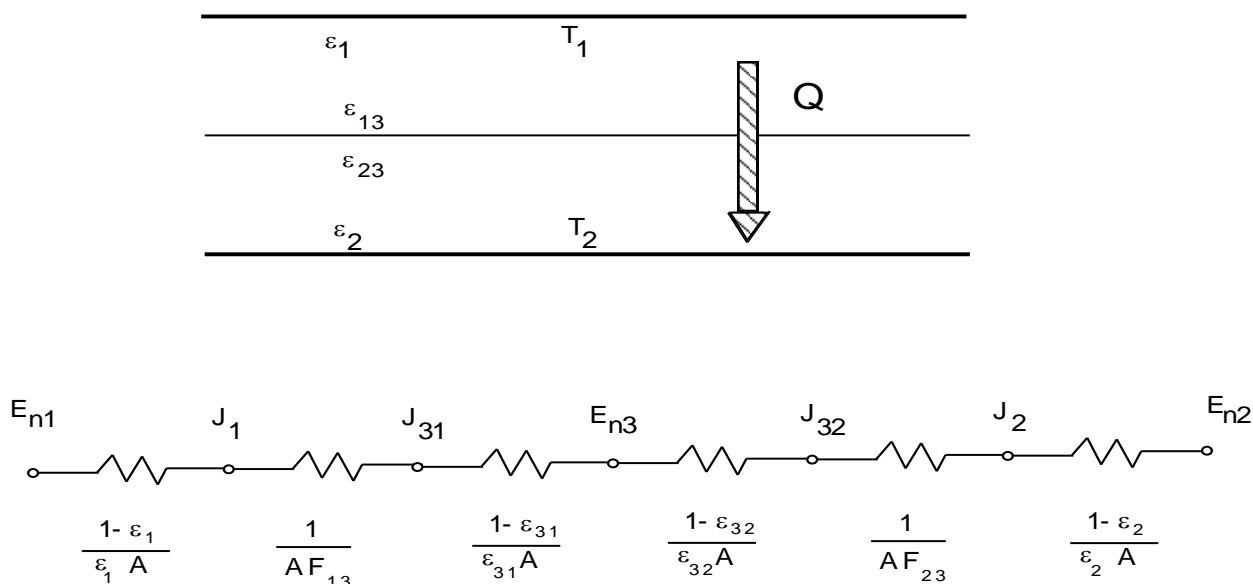


Figura 132: Schermo radiativo interposto fra due superfici radianti.

Questo risultato trova notevoli applicazioni per la schermatura di sorgenti radiative, ad esempio di superfici fortemente irradiate dal sole³⁸ che porterebbero ad avere una disuniformità interna della temperatura media radiante e quindi un forte senso di disagio termico.

In genere una parete avente più intercapedini interne riduce fortemente il flusso termico radiativo rispetto ad una parete normale.

9.10 FORMALISMO MATRICIALE NELLA RADIAZIONE TERMICA

Vediamo qui una generalizzazione del metodo di calcolo dello scambio radiativo fra superfici non nere formanti una cavità. Nel caso di geometrie complesse occorre sempre utilizzare regole generali che possono facilmente essere applicate.

Il metodo che si espone porta a scrivere un sistema di equazioni di scambio radiativo che può essere facilmente risolto mediante CAD matematici oggi alla portata di tutti o con programmi appositamente predisposti.

9.10.1 CASO ESEMPIO: CAVITÀ FORMATA DA TRE SUPERFICI

Si consideri inizialmente una cavità radiativa formata da tre superfici, come indicato nella seguente figura.

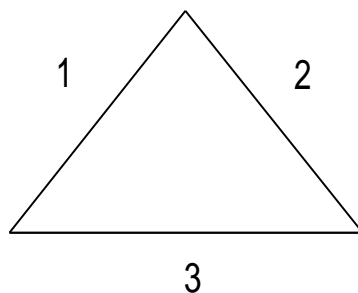


Figura 133: Scambio radiativo in una cavità chiusa

Le equazioni di bilancio sono, supponendo note le superfici, i fattori di forma e le emissività:

³⁸ Si pensi ad una parete che funzioni da *muro Trombe-Michell* che si porta a temperature di alcune decine di gradi al di sopra della media delle temperature delle altre pareti di un ambiente solarizzato (vedi applicazioni bioclimatiche).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_{n1} - J_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} = \frac{J_1 - J_2}{A_1 F_{12}} + \frac{J_2 - J_3}{A_1 F_{13}} \\ \frac{E_{n2} - J_2}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{J_2 - J_1}{A_2 F_{21}} + \frac{J_2 - J_3}{A_2 F_{23}} \\ \frac{E_{n3} - J_3}{\frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3}} = \frac{J_3 - J_1}{A_3 F_{31}} + \frac{J_3 - J_2}{A_3 F_{32}} \end{array} \right.$$

ovvero anche:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{n1} \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} = \left(\frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} + F_{12} + F_{13} \right) J_1 + (-F_{12}) J_2 + (-F_{13}) J_3 \\ E_{n2} \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} = (-F_{21}) J_1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} + F_{21} + F_{23} \right) J_2 + (-F_{23}) J_3 \\ E_{n3} \frac{\varepsilon_3}{1 - \varepsilon_3} = (-F_{31}) J_1 + (-F_{32}) J_2 + \left(\frac{\varepsilon_3}{1 - \varepsilon_3} + F_{31} + F_{32} \right) J_3 \end{array} \right. \quad [170]$$

Definiti ora le matrici e i vettori seguenti :

$$[C] = \begin{bmatrix} E_{n1} \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \\ E_{n2} \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} \\ E_{n3} \frac{\varepsilon_3}{1 - \varepsilon_3} \end{bmatrix} \quad [J] = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} + F_{12} + F_{13} \right) & -F_{12} & -F_{13} \\ -F_{21} & \left(\frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} + F_{21} + F_{23} \right) & -F_{23} \\ -F_{31} & -F_{32} & \left(\frac{\varepsilon_3}{1 - \varepsilon_3} + F_{31} + F_{32} \right) \end{bmatrix}$$

il sistema di equazioni risulta così sintetizzabile:

$$[C] = [A][J] \quad \Rightarrow \quad [J] = [A]^{-1} [C] \quad [171]$$

e quindi risolubile con le normali regole dell'Analisi Matematica. Il metodo si estende facilmente al caso di N superfici radiative e quindi al caso generale di *cavità radiativa*.

9.11 EFFETTO SERRA NEGLI EDIFICI

L'effetto serra negli edifici è generato dalla trasparenza non simmetrica dei vetri delle finestre.

In Figura 134 si hanno le curve di trasparenza per alcuni tipi di vetri.

Il vetro comune presenta una finestra fra 0,3 e 3 μm e pertanto lascia passare quasi la totalità della radiazione solare che ha il suo massimo a 0,55 μm . La radiazione solare che penetra all'interno degli ambienti viene da questi assorbita e contribuisce ad innalzare la temperatura di equilibrio.

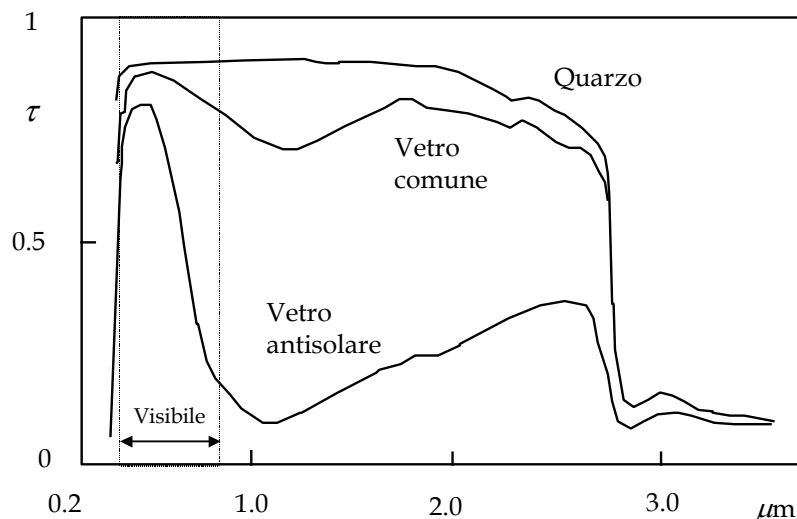


Figura 134: fattore di trasparenza dei vetri

Le pareti e gli oggetti interni emettono a loro volta una radiazione termica nel campo dell'infrarosso lontano: supponendo una temperatura media di 27 °C si ha, per la legge di Wien, una lunghezza d'onda di massima emissione di:

$$\lambda_{\max} = \frac{2898}{300} \cong 10 \mu\text{m}$$

Ne segue che il vetro non lascia passare la radiazione infrarossa proveniente dall'interno e quindi si ha una sorta di intrappolamento di energia all'interno degli ambienti. Ricordando la relazione:

$$\text{Potenza_Entrante} - \text{Potenza_Uscente} + \text{Potenza_Sorgenti} = \text{Accumulo_Potenza}$$

Ne segue che se l'ambiente non disperde la potenza entrante aumenta l'accumulo e quindi cresce la temperatura interna.

E' proprio quello che succede in estate: la radiazione solare surriscalda gli ambienti, specialmente quelli eccessivamente vetrati, e quindi si ha la necessità di avere un impianto che fa l'esatto opposto: estrae il calore accumulato dagli ambienti per raffrescarli.

Le pareti vetrate per effetto della loro natura producono non solamente **effetti visivi** gradevoli ma anche (e forse soprattutto) **effetti notevoli sul comportamento termico generale di un edificio**.

Questi componenti dovrebbero essere considerati **sempre con attenzione** da parte dei progettisti perché un loro uso smodato provoca veri e propri *disastri* energetici.

L'uso di grandi pareti finestrate (*finestre e nastro*) porta ad avere forti dispersioni termiche in inverno ed altrettanto forti rientrate di calore in estate, come sopra detto.

Inoltre l'inserimento di grandi superfici finestrate può avere conseguenze negative anche sulla verifica dei disperdimenti termici dell'edificio ai sensi della Legge 10/91.

Le superfici vetrate, inoltre, modificano sensibilmente la *temperatura media radiante* dell'ambiente e pertanto hanno influenza negativa sulle condizioni di benessere ambientale interna agli edifici.

9.12 EFFETTO SERRA NELL'ATMOSFERA TERRESTRE

Un comportamento analogo a quanto avviene negli edifici si ha nell'atmosfera terrestre per effetto dell'assorbimento della CO_2 presente nell'aria.

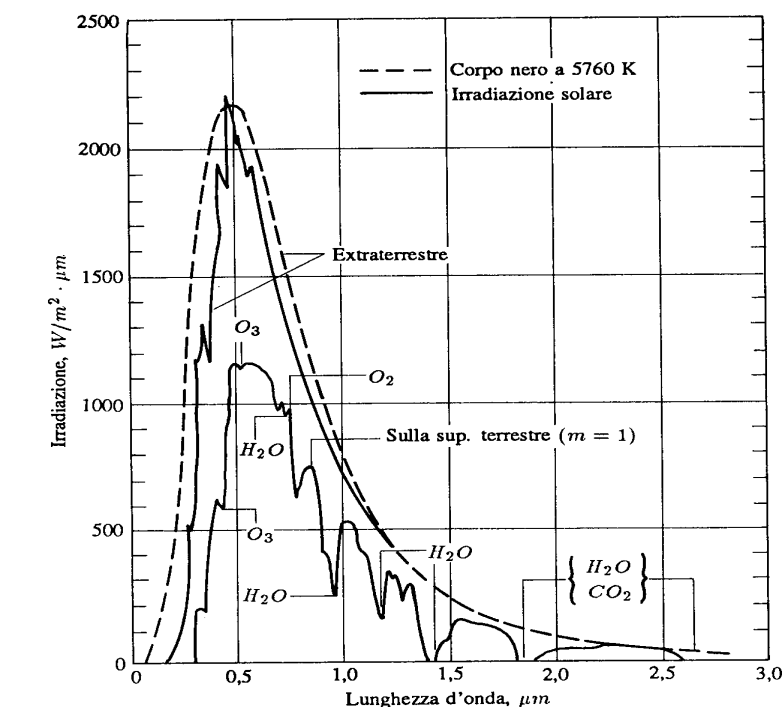


Figura 135: Radiazione solare fuori dell'atmosfera e al suolo

In Figura 135 si ha lo spettro della radiazione solare a livello del mare e si può osservare come oltre i $2,7 \mu m$ si abbia un assorbimento totale dovuto al vapore acqueo e alla CO_2 .

La radiazione terrestre verso lo spazio ha una lunghezza d'onda data da:

$$\lambda_{\max} = \frac{2898}{290} \cong 9.6 \mu m$$

e quindi si ha un blocco, del tutto simile a quello operato dal vetro.

Poiché la quantità di CO_2 presente nell'atmosfera cresce con il consumo di combustibili, per effetto delle trasformazioni chimiche di ossidazione del carbonio, allora si ha un *effetto serra* crescente che porta ad un incremento della temperatura di equilibrio della terra.

Negli ultimi decenni si è avuto un incremento di circa 1°C della temperatura media terrestre con conseguenze visibili sul clima.

10 SCAMBIATORI DI CALORE

Lo scambiatore di calore è un dispositivo capace di trasferire energia termica da un corpo ad un altro. In genere lo scambio energetico è effettuato mediante due fluidi di lavoro ma questa è solo una disposizione impiantistica non vincolante per lo scambio termico. Probabilmente lo scambiatore è il dispositivo più utilizzato nell'impiantistica (sia civile che industriale), nell'industria e nelle applicazioni tutte. Qualunque sia la natura dell'impianto (elettrico, elettronico, meccanico, edilizio,...) si hanno sempre scambi termici da realizzare. Un computer, ad esempio, ha notevoli problemi di smaltimento del calore generato dal riscaldamento dei suoi componenti elettronici (vedi, ad esempio, il processore centrale) che impediscono, spesso, l'ingegnerizzazione in sistemi di ridotte dimensioni.

Un getto di calcestruzzo genera calore per effetto delle reazioni di presa del cemento e se non si prevede opportunamente come smaltirlo si va incontro a seri problemi specialmente quando le dimensioni del manufatto sono non trascurabili.

Il corpo umano è, in un certo senso, uno scambiatore di calore e la nostra vita è regolata da precisi meccanismi di scambio termico con l'ambiente e di termoregolazione corporea. In una casa moderna si hanno innumerevoli esempi di applicazione degli scambiatori di calore: nei frigoriferi domestici, negli impianti di climatizzazione, Data la natura del corso si vuole qui dare un cenno alla problematica degli scambiatori di calore anche in vista di una loro utilizzazione nel corso di Impianti Termotecnici.

10.1 SCAMBIATORI DI CALORE A CORRENTI PARALLELE

Si studieranno, anche a scopo euristico, gli scambiatori a corrente parallele, cioè gli scambiatori che hanno direzione di flusso parallele (tubi concentrici), vedi Figura 136, sia in modo equiverse (nella stessa direzione) che controverso (in direzioni opposte), Figura 137.

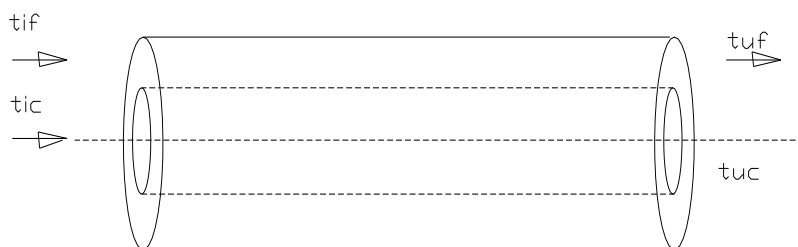


Figura 136: Scambiatore di calore a correnti parallele equiverse

Indichiamo con t_{ic} la temperatura di ingresso del fluido caldo (che supponiamo fluire nel del condotto interno) e t_{uc} la temperatura di uscita del fluido caldo. Analogamente siano t_{if} e t_{uf} le temperature di ingresso e di uscita del fluido freddo (che fluisce nel condotto esterno).

Indichiamo con m' la portata del fluido caldo e con m'' quella del fluido freddo. Un semplice bilancio energetico globale fra i due fluidi, supponendo che all'esterno del condotto freddo ci sia un isolamento termico che impedisce perdite di calore, porta a scrivere l'equazione:

$$Q = m' c' (t_{ic} - t_{uc}) = \pm m'' c'' (t_{uf} - t_{if})$$

ove vale il segno + per correnti equiverse e il segno - per correnti controverse.

Da questa equazione è possibile calcolare una incognita note le altre grandezze.

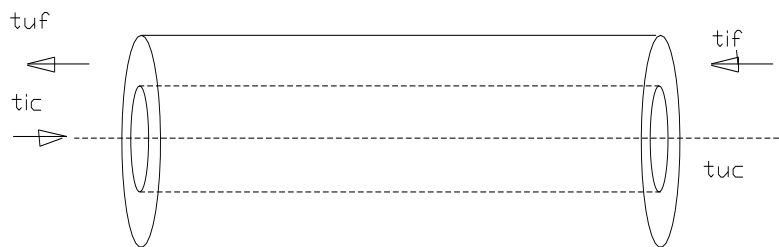


Figura 137: Scambiatore di calore a correnti parallele controverse

Con riferimento alla Figura 138, per un elemento differenziale di superficie dS , dette t_c e t_f le temperature correnti dei due fluidi di lavoro, si ha ancora il bilancio differenziale:

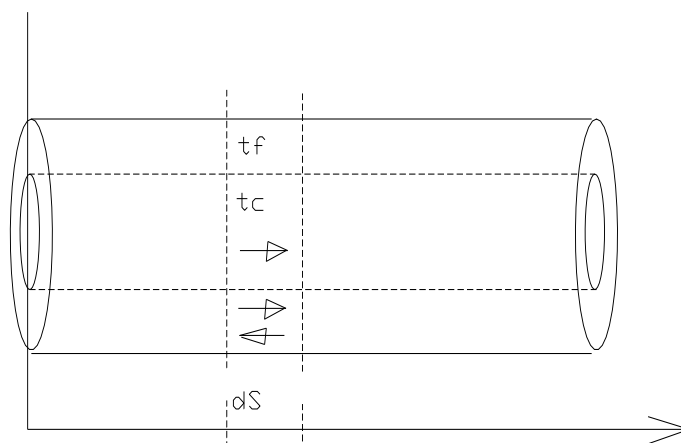


Figura 138: Modalità di scambio in una sezione intermedia

$$dq = -c' m' dt_c = \pm c'' m'' dt_f$$

che può ancora scriversi nella forma:

$$dq = -\frac{dt_c}{\frac{1}{c' m'}} = \pm \frac{dt_f}{\frac{1}{c'' m''}}$$

Combinando il secondo e terzo membro si ottiene anche:

$$dq = -\frac{d(t_c - t_f)}{\frac{1}{c' m'} \pm \frac{1}{c'' m''}} = -\frac{d\theta}{M}$$

ove si sono posti:

$$\theta = t_c - t_f$$

$$M = \frac{1}{c'm'} \pm \frac{1}{c''m''}$$

e la modalità di trasmissione del calore fra i due fluidi porta a scrivere:

$$dq = KdS(t_c - t_f) = KdS\theta$$

Eguagliando le due espressioni di dq si ottiene l'equazione differenziale:

$$-\frac{d\theta}{M} = KdS\theta$$

Supponendo costanti i coefficienti (cioè le proprietà termofisiche e la trasmittanza termica K) si ha un'equazione differenziale a variabili separabili che risolta, tenuto conto delle condizioni iniziali $\theta_i = t_{ic} - t_{if}$ e $\theta_u = t_{uc} - t_{uf}$, porta alla soluzione:

$$\theta = \theta_i e^{-KMS}$$

ove S è la superficie totale di scambio termico.

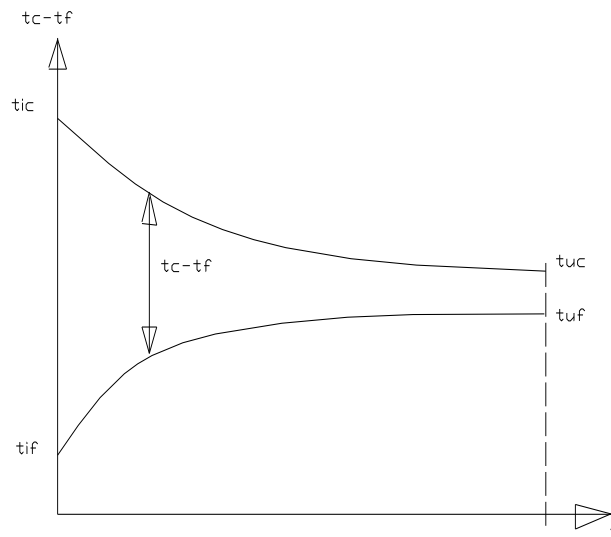


Figura 139: Distribuzione della differenza di temperatura per correnti equiverse

Questa equazione ci dice che la distribuzione della differenza di temperatura all'interno dello scambiatore è esponenziale ed ha andamenti che dipendono dal verso di flusso. In Figura 139 si ha la distribuzione per flussi equiversi.

Si osservi che la differenza di temperatura è massima nella sezione di ingresso ed è minima nella sezione di uscita di entrambi i fluidi. Ciò penalizza il funzionamento dello scambiatore poiché a grandi differenze di temperature si hanno anche grandi irreversibilità del sistema.

Quando si esamina il caso di scambio in controcorrente allora si ha:

$$M = \frac{1}{c'm'} - \frac{1}{c''m''}$$

Ciò significa che M può assumere valori positivi ($c'm' < c''m''$), negativi ($c'm' > c''m''$) e nulli ($c'm' = c''m''$).

I tre casi sono riportati in Figura 140 ($M > 0$), Figura 141 ($M < 0$) e in Figura 142 ($M = 0$).

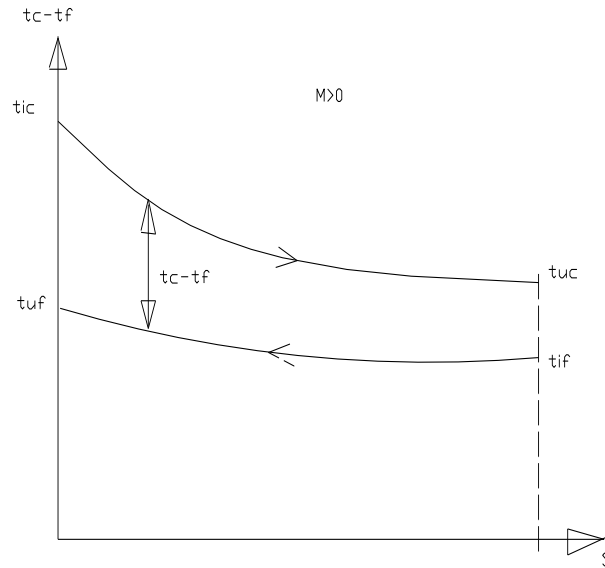


Figura 140: Distribuzione della differenza di temperatura per controcorrente con $M > 0$

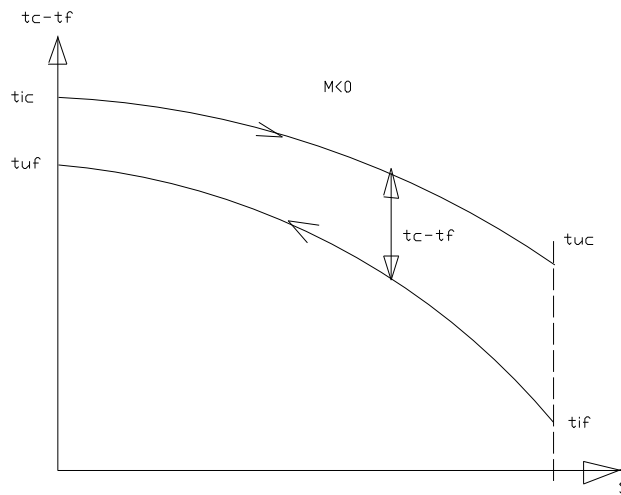


Figura 141: Distribuzione della differenza di temperatura per controcorrente con $M < 0$

Si osserva che quando si ha $M=0$ le curve degenerano in due rette con $\theta = \text{costante}$.

I prodotti $c'm'$ e $c''m''$ sono detti *capacità termiche di flusso* del fluido caldo e del fluido freddo, rispettivamente.

Si osserva immediatamente che, nel caso di scambio in controcorrente, le differenze di temperatura fra i due fluidi si mantengono mediamente inferiori al caso di scambio in equicorrente.

Pertanto le irreversibilità prodotte dagli scambiatori in controcorrente sono minori di quelli in equicorrente, ovvero si hanno modalità di scambio migliori.

Ricordando l'equazione globale di scambio termico e le posizioni sin qui fatte si può ancora scrivere:

$$Q = m'c'(t_{ic} - t_{uc}) = \pm m''c''(t_{uf} - t_{if}) = -\frac{\theta_i - \theta_u}{M}$$

Se ricaviamo M dall'equazione di distribuzione di temperatura si ha anche:

$$Q = KS \frac{\theta_i - \theta_u}{\ln \frac{\theta_i}{\theta_u}}$$

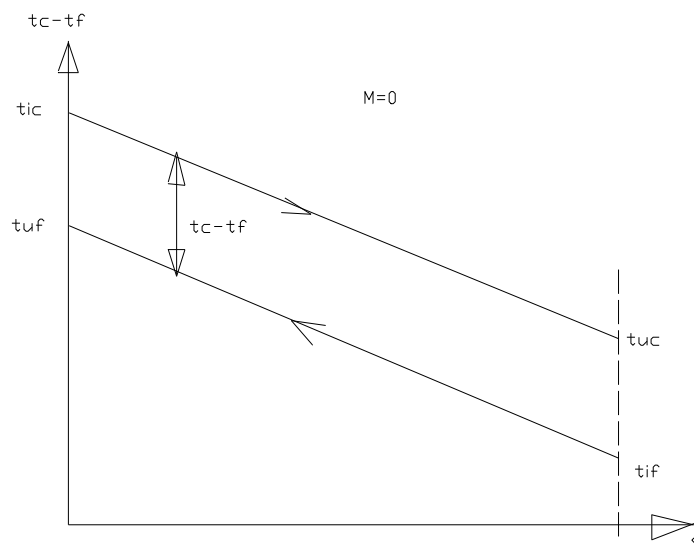


Figura 142: Distribuzione della differenza di temperatura per controcorrente con $M=0$

Si suole porre:

$$\Delta T_{ml} = \frac{\theta_i - \theta_u}{\ln \frac{\theta_i}{\theta_u}}$$

e quindi il calore scambiato si può scrivere nella forma:

$$Q = KS \Delta T_{ml}$$

10.2 EFFICIENZA DEGLI SCAMBIATORI

Possiamo definire *efficienza* di uno scambiatore di calore il seguente rapporto:

$$\eta = \frac{\text{Calore Effettivamente Scambiato}}{\text{Calore Massimo Scambiabile}}$$

Il calore massimo che può essere scambiato si ha quando la superficie di scambio termico tende ad infinito. L'esame dei diagrammi sulle distribuzioni di temperature mostra che, al tendere di $S \rightarrow \infty$ una delle temperature dei due fluidi tende ad eguagliare quella corrispondente dell'altro fluido.

Ad esempio per l'equicorrente, Figura 139, al tendere ad infinito di S le due temperature di uscita dei fluidi tendono ad eguagliarsi: $t_{uc} = t_{uf}$. Pertanto l'efficienza di scambio per correnti equiverse diviene:

$$\varepsilon = \frac{c' m' (t_{ic} - t_{uc})}{c' m' (t_{ic} - t_{uf})}$$

Nel caso di correnti controverse si hanno tre casi (a seconda del segno di M).

$M > 0$ cioè $c' m' < c'' m''$

Allora il fluido caldo ha minore capacità termica di flusso del fluido freddo. Al tendere all'infinito della superficie la temperatura di uscita del fluido caldo tende a quella di ingresso del fluido freddo.

L'efficienza diviene:

$$\varepsilon = \frac{c' m' (t_{ic} - t_{uc})}{c' m' (t_{ic} - t_{if})}$$

M < 0 cioè c'm' > c''m''

Il fluido freddo ha minore capacità termica di flusso del fluido caldo. Al tendere all'infinito della superficie la temperatura di uscita del fluido freddo tende a quella di ingresso del fluido caldo.

L'efficienza diviene:

$$\varepsilon = \frac{c''m''(t_{uf} - t_{if})}{c''m''(t_{ic} - t_{if})}$$

M = 0 cioè c'm' = c''m''

In questo caso si ha un caso limite: i due fluidi hanno eguali capacità termiche di flusso e l'efficienza si calcola indifferentemente con una delle due relazioni sopra viste.

10.2.1 FORMA UNIFICATA DELL'EFFICIENZA DI SCAMBIO TERMICO

Dalle due ultime relazioni si osserva che, indicando con C_{\min} la minore delle due capacità termiche di flusso, l'efficienza di scambio termico è data dal rapporto:

$$\varepsilon = \frac{|\Delta t|_{C_{\min}}}{t_{ic} - t_{if}}$$

cioè a numeratore si ha la differenza di temperatura, in valore assoluto, del fluido di minore capacità termica e a denominatore si ha sempre la differenza fra le temperature di ingresso del fluido caldo e del fluido freddo. Il significato dell'efficienza di scambio termico appare evidente da quanto sopra detto: al crescere dell'efficienza crescono anche le dimensioni dello scambiatore e con esse il costo. Pertanto nella pratica si utilizzano scambiatori di calore che ottimizzano l'efficienza e il costo.

Ad esempio un valore tipico è $\eta = 0.80$. Valori più elevati comportano incrementi di costi notevoli mentre valori inferiori portano ad avere scambiatori più economici.

Oltre al valore economico sopra evidenziato l'efficienza ha un significato termodinamico importante. Se l'efficienza è bassa si hanno anche forti differenze di temperature fra i due fluidi e quindi anche forti irreversibilità di scambio.

Per contro, un valore elevato dell'efficienza comporta minori differenze di temperature e quindi una minore produzione di irreversibilità termica. Se si avesse (al limite) $\eta = 1$ si avrebbero differenze di temperature nulle (forma indeterminata per η) e quindi si raggiungerebbe la condizione ideale di scambio termico isoterma.

10.3 PROGETTO DI UNO SCAMBIATORE DI CALORE

Il progetto di uno scambiatore di calore può essere fatto in due modi principali dei quali si darà un rapido cenno nel prosieguo. L'Allievo tenga presente che Egli dovrà utilizzare gli scambiatori nel corso di Impianti e pertanto la fase di progetto è demandata agli specialisti del settore.

10.3.1 METODO DELLE DIFFERENZE MEDIE LOGARITMICHE

E' questo il metodo più antico. Si utilizza la relazione già indicata in precedenza:

$$Q = KS \frac{\theta_i - \theta_u}{\ln \frac{\theta_i}{\theta_u}}$$

Pertanto, se si conoscono le differenze di temperature fra i due fluidi e il flusso termico scambiato $Q = m'c'(t_{ic} - t_{uc}) = \pm m''c''(t_{uf} - t_{if})$ allora si può ricavare la superficie di scambio S .

Le cose sono, nella realtà, più complesse perché il calcolo di K richiede la conoscenza di alcuni parametri geometrici (diametri dei tubi, come si evince dal §1.2.2).

Pertanto il progetto procede per tentativi assegnando i diametri e calcolando la lunghezza dei condotti ($S=\pi dL$).

Se è nota la superficie di scambio, S , le precedenti relazioni consentono di calcolare una delle quattro temperature.

Si osservi che si sono esaminati solamente i casi di fluidi in condizioni di scambio termico normale e si sono trascurati i casi di scambio termico con cambiamento di fase (vaporizzazione o condensazione) di uno o entrambi i fluidi.

Si rimanda l'Allievo ai Manuali specializzati per le applicazioni più particolari.

10.4 SCAMBIATORI CON GEOMETRIA COMPLESSA

Nella pratica l'utilizzo degli scambiatori a correnti parallele sin qui studiati è reso difficile da una serie di motivi tecnici.

Quasi sempre si utilizzano geometrie più complesse che consentono di sfruttare meglio gli spazi, come indicato in Figura 143 per correnti incrociate (vedi percorso tratteggiato).

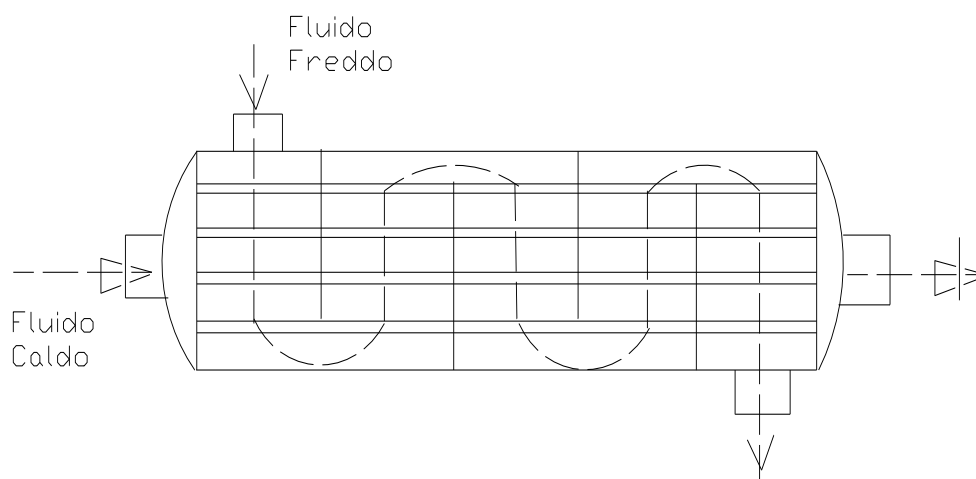


Figura 143: Scambiatore a corrente incrociate del tipo shell and tube

Lo studio analitico di queste geometrie risulta complesso ed è al di fuori degli scopi del presente capitolo.

Si dirà, tuttavia, che per la progettazione si procede in modo semplificato utilizzando la relazione:

$$Q = KS\Delta T_{ml}F$$

ove F è un fattore che dipende dalla geometria dello scambiatore e dalle temperature dei fluidi di lavoro.

Opportune relazioni pratiche o diagrammi sono fornite dai costruttori in manuali specializzati.

Si osserva, però, che la geometria più efficiente è quella a corrente parallele in controcorrente.

Le altre geometrie commerciali pongono vantaggi pratici (migliore ingegnerizzazione dei sistemi) ma non termodinamici.



Figura 144: Fascio tubiero estratto da uno scambiatore di calore

10.5 METODO NTU: UNITÀ DI TRASFERIMENTO TERMICO

Da qualche decennio ha preso campo una nuova metodologia di progetto e verifica degli scambiatori di calore basata sul metodo detto *NTU* (*Number Transfer Unit*) ovvero *Unità di Trasferimento Termico*. Si definisce, infatti, *NTU* il rapporto:

$$NTU = \frac{KS}{(cm)_{\min}}$$

con il simbolismo già visto in precedenza. Esso ha un significato fisico ben preciso: possiamo scrivere, infatti:

$$NTU = \frac{(KS) \cdot 1}{(cm)_{\min} \cdot 1}$$

e quindi l'*NTU* è il rapporto fra il calore scambiato con salto termico $\Delta T=1$ (mediante scambio termico $KS\Delta T$) e trasportato dal fluido, $(cm)_{\min}\Delta T$.

A seconda delle geometrie utilizzate si pone l'efficienza η in funzione di *NTU*, di un parametro geometrico e del rapporto fra le capacità termiche di flusso $c'm'/c''m''$.

Oltre che relazioni analitiche si hanno anche grafici, vedi Figura 145 e in Figura 146, che consentono di effettuare facilmente i calcoli.

Di solito in fase di progetto, fissata la geometria e il rapporto fra le capacità termiche di flusso, scelta l'efficienza (ad esempio $\eta=0.8$) si determina dai grafici *NTU* e dalla sua definizione si calcola *S*.

Il metodo *NTU* consente di effettuare facilmente anche le verifiche termiche: dato lo scambiatore di superficie *S* e note le capacità termiche di flusso si calcola *NTU* e quindi si ha l'efficienza η . Dalla definizione dell'efficienza si calcola la temperatura incognita desiderata.

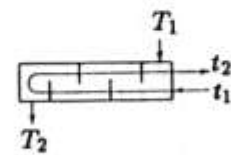
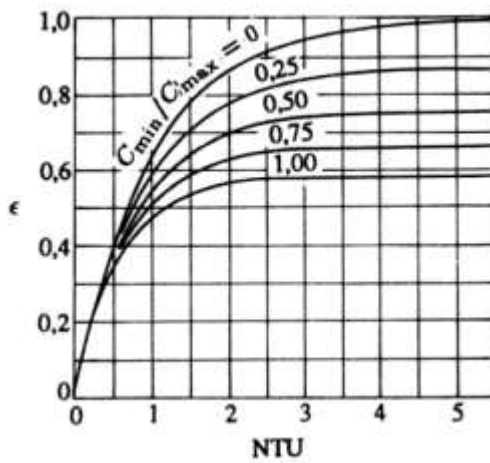
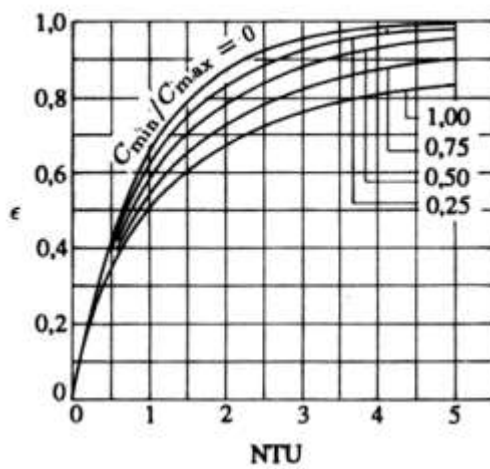
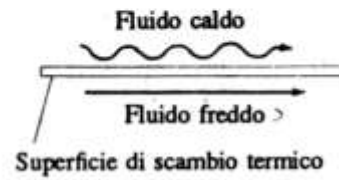
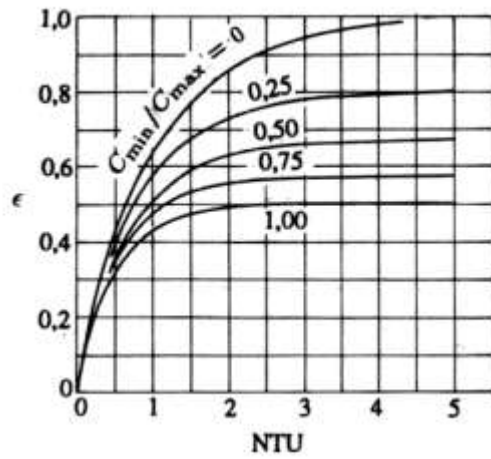


Figura 145: Curve (ϵ, NTU) per assegnata geometria

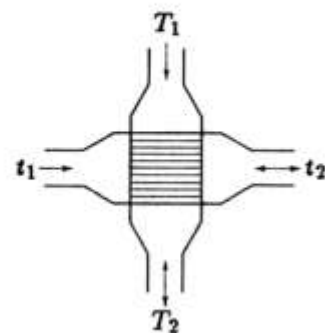
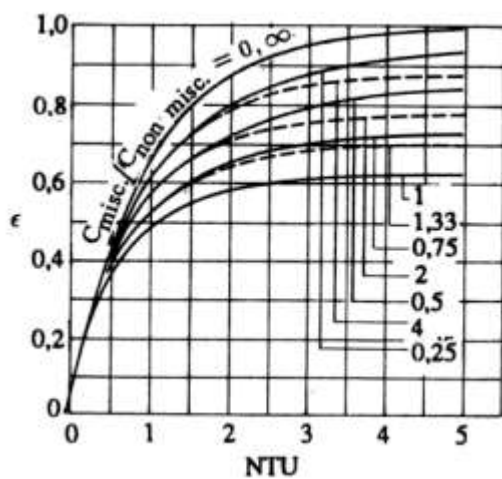
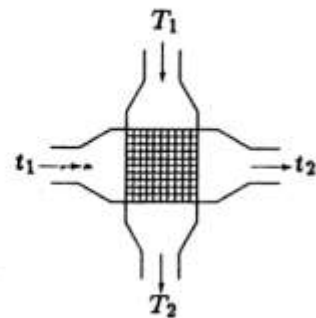
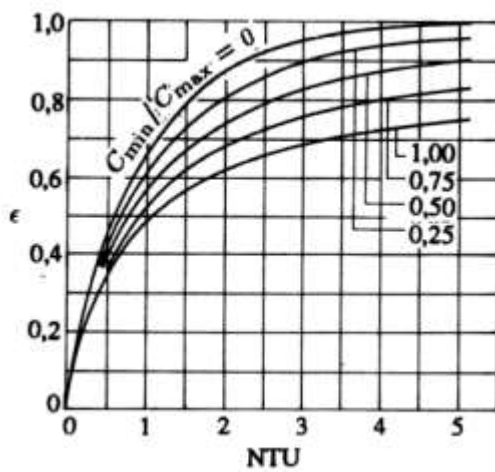
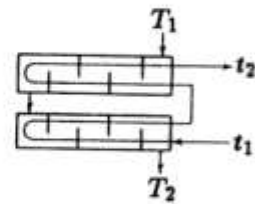
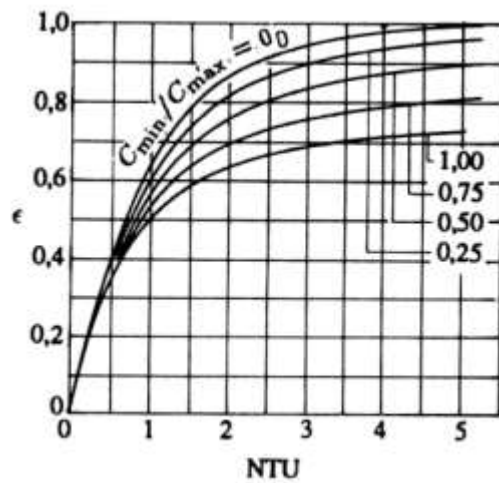


Figura 146: Curve ϵ - NTU per alcuni tipi di scambiatori di calore

BIBLIOGRAFIA

1. G. CAMMARATA: “Fisica Tecnica Ambientale”, Dispense A.A. 2001/2002, Facoltà di Architettura, Siracusa.
2. G. CAMMARATA: “Impianti Termotecnici” Vol. 1 ÷ 4, Dispense A.A. 2004/2005, Facoltà di Ingegneria di Catania.
3. G. CAMMARATA: “Impianti Tecnici Edili” Vol. 1 e 2, Dispense A.A. 2004/2005, Facoltà di Architettura, Siracusa.
4. G. CAMMARATA: “Climatologia dell’ambiente costruito”, Vol. I e II, Dispense A.A. 1999/2000, Facoltà di Architettura, Siracusa.
5. G. CAMMARATA: “Flat Plate collectors”, Liguori Editore, Napoli, 1981
6. Y. A. CENGEL: “Termodinamica e Trasmissione del Calore”, Mc. Graw Hill, 1998
7. A. SELLERIO: “Fisica Tecnica”, Vol. I e II, Ed. Pezzino, Palermo
8. A. CAVALLINI, M. SOVRANO: “Gasdinamica”, Patron Editore, Padova
9. A. BONACINA - A. CAVALLINI – L. MATTAROLO: “Trasmissione del Calore”. CLEUP. Padova
10. GUGLIELMINI - PISONI : “Elementi di Trasmissione del Calore “. Ed. VESCHI
11. MASTRULLO – MAZZEI - NASO - VANOLI: Fondamenti di trasmissione del calore. Ed. Liguori Napoli. Vol. 1 per la teoria e Vol. 2 per le esercitazioni.
12. L. C. THOMAS: Fundamentals of heat transfer . Ed. Prentice Hall Inc.
13. M. JACOB: "Heat Transfer", Vol. 1, N.Y., 1949.
14. A. SACCHI – G. CAGLIERIS : Climatizzazione, UTET 1977
15. A. BADAGLIACCA: Fondamenti di trasmissione del calore, Aracne, 1997
16. J.A. DUFFIE – W.A. BECKMAN : Solar Engineering of thermal processes, J. Wiley, 1991
17. ASHRAE: "Fundamentals", cap. 26. 1981 e seguenti: 1985, 1989, 1993
18. AICARR: “Mini Guida CARR”, Vol 1, Milano 1998

INDICE GENERALE

<u>1</u>	<u>INTRODUZIONE ALLA TRASMISSIONE DEL CALORE</u>	<u>1</u>
Conduzione Termica		1
Convezione Termica		1
Irraggiamento Termico		1
1.1 CONDUZIONE IN UNA PARETE PIANA		2
1.1.1 LA CONDUCIBILITÀ TERMICA		2
1.2 EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE		4
Condizione del 1° tipo (di Dirichlet:)		5
Condizione del 2° tipo (di Neumann)		5
Condizione del terzo tipo		5
Condizione del quarto tipo:		6
1.2.1 PARETE PIANA		6
1.2.2 CONDUZIONE DEL CALORE IN UNO STRATO CILINDRICO		7
1.2.3 RAGGIO CRITICO		8
1.2.4 CONCETTO DI RESISTENZA TERMICA PER CONDUZIONE		9
1.2.5 CONDUZIONE TERMICA NEI MATERIALI IN SERIE E IN PARALLELO		10
1.2.6 PARETE PIANA CON SORGENTE DI CALORE INTERNA		11
1.2.7 CONDUZIONE STAZIONARI BIDIMENSIONALE		12
1.2.8 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE		14
1.2.9 TRANSITORIO DI RISCALDAMENTO E RAFFREDDAMENTO DI UN CORPO A RESISTENZA TERMICA TRASCURABILE.		14
1.2.10 REGIME VARIABILE IN UNA LASTRA PIANA INDEFINITA		16
1.2.11 TRANSITORIO TERMICO IN UN MEZZO SEMINFINITO		18
Temperatura alla superficie imposta		18
Flusso alla superficie imposto		19
1.2.12 REGIME PERIODICO STABILIZZATO		20
<u>2</u>	<u>METODI AVANZATI PER LA CONDUZIONE TERMICA</u>	<u>25</u>
2.1 METODO INTEGRALE		25
2.2 METODO DELLA TRASFORMATATA DI LAPLACE		28
2.2.1 DEFINIZIONE DELLA TRASFORMATATA DI LAPLACE		28
2.2.2 APPLICAZIONE AL CASO DELLA PARETE PIANA		32
2.2.3 APPLICAZIONE ALLO STRATO SEMINFINITO		33
2.3 USO DELLE FUNZIONI ORTOGONALI DI STURM - LIOUVILLE		34
<u>3</u>	<u>METODI NUMERICI PER LA CONDUZIONE</u>	<u>38</u>
3.1 METODI ALLE DIFFERENZE FINITE		38
3.2 DIFFERENZE FINITE NELLA CONDUZIONE STAZIONARIA		40
3.3 FORMULAZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO		42
3.4 CONDUZIONE STAZIONARIA CON SORGENTI DI CALORE		43
3.5 CONDUZIONE STAZIONARIA IN GEOMETRIA CILINDRICA		43
3.6 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE MONODIMENSIONALE		45
3.7 CONDUZIONE IN REGIME VARIABILE BIDIMENSIONALE		46
3.8 METODO GRAFICO DI BINDER SMITH		46
3.9 USO DEI CODICI DI CALCOLO		47
Distribuzione di temperatura in un isolatore contenente due tubi di acqua calda		49

4	ALETTE	51
4.1	BARRA INFINITAMENTE LUNGA	52
4.2	SBARRA CON TERMINAZIONE FINALE ADIABATICA	53
4.3	SBARRA DI LUNGHEZZA FINITA (CASO GENERALE)	53
4.4	EFFICIENZA DELLE ALETTE	54
4.5	PARETE ALETTATA	55
4.6	ALETTE ANULARI	55
4.7	PROFILO OTTIMIZZATO DELLE ALETTE	57
4.8	APPLICAZIONI NUMERICHE AL PROBLEMA DELLE ALETTE	58
5	LA CONVEZIONE TERMICA	60
	Convezione termica naturale:	60
	Convezione forzata	60
	Convezione termica confinata	61
	Convezione termica aperta	61
5.1	EQUAZIONE DELLA CONVEZIONE TERMICA	61
5.2	RESISTENZA TERMICA PER CONVEZIONE	63
5.3	TRASMITTANZA TERMICA	63
5.4	LE EQUAZIONI FONDAMENTALI PER LA CONVEZIONE	64
5.4.1	CONSERVAZIONE DELLA MASSA	64
5.4.2	CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA	65
5.4.3	EQUAZIONE DELL'ENTROPIA PER SISTEMI APERTI	67
5.4.4	CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO	67
5.5	EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE	68
5.5.1	IL COEFFICIENTE DI CONVEZIONE TERMICA	70
5.5.2	I PARAMETRI DI SIMILITUDINE	70
5.5.3	ANALISI ADIMENSIONALE PER LA CONVEZIONE FORZATA	72
5.6	CONVEZIONE IN REGIME TURBOLENTO	73
5.6.1	NUOVA TEORIA SULLA TURBOLENZA	75
5.6.2	LA DIFFUSIVITÀ MECCANICA TURBOLENTO	76
5.6.3	LA DIFFUSIVITÀ TERMICA TURBOLENTO	77
5.7	PROFILO UNIVERSALE DI VELOCITÀ	78
5.8	PROFILO UNIVERSALE DI TEMPERATURA	80
5.9	ALTRE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA CHIUSURA	82
5.9.1	ANALISI DEGLI ORDINI DI GRANDEZZA	82
5.10	SOLUZIONE DI BLASIUS DELLE EQUAZIONI PRE STRATO LAMINARE	83
5.11	SOLUZIONE DI BLASIUS DELLO STRATO LIMITE TERMICO	85
5.11.1	ANALOGIA DI COLBURN	86
5.11.2	LA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO	87
5.12	SOLUZIONE PER STRATO LIMITE TURBOLENTO DI UNA LASTRA	87
5.12.1	STRATO LIMITE SU SUPERFICI CILINDRICHE	88
5.13	CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE FORZATA	90
5.14	CONVEZIONE TERMICA LAMINARE NEI CONDOTTI	92
5.14.1	CONDOTTI A SEZIONE NON CIRCOLARE	95
5.15	CONVEZIONE TERMICA NEI CONDOTTI IN REGIME TURBOLENTO	96
5.15.1	CORRELAZIONE DI COLBURN PER MOTO TURBOLENTO	98
5.16	SCAMBIO TERMICO CON I METALLI LIQUIDI	99
5.16.1	ALGORITMO DI CALCOLO PER LA CONVEZIONE FORZATA	100
	Determinazione delle proprietà termofisiche	100
	Determinazione dei numeri di Reynolds e di Prandtl	100
	Utilizzo delle correlazioni di calcolo per la determinazione di Nu	100
	Calcolo del flusso termico	100
	Calcolo degli sforzi di attrito	101

6	CONVEZIONE NATURALE	102
	Equazione di continuità	102
	Equazione della quantità di moto	102
	Equazione dell'energia	104
6.1	ADIMENSIONALIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE PER LA CONVEZIONE NATURALE	104
6.1.1	ANALISI ADIMENSIONALE PER LA CONVEZIONE NATURALE	106
6.1.2	PROFILO DI TEMPERATURA NELLO STRATO LIMITE TERMICO	107
6.1.3	STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO LAMINARE	108
6.1.4	STRATO LIMITE TERMICO IN MOTO TURBOLENTO	109
6.1.5	CONVEZIONE NATURALE CON PARETE PIANA VERTICALE ISOTERMA	109
6.1.6	FLUSSO UNIFORME DALLA PARETE	110
6.1.7	CONVEZIONE NATURALE SU UNA LASTRA PIANA ORIZZONTALE	111
6.2	CONVEZIONE NATURALE PER CILINDRI ORIZZONTALI LUNGH	112
6.3	CONVEZIONE NATURALE IN CAVITÀ CHIUSE	112
6.3.1	CAVITÀ RISCALDATE DAL BASSO	114
6.4	CORRELAZIONI UTILI PER LA CONVEZIONE NATURALE	115
6.5	GETTI E PENNACCHI	116
7	METODI NUMERICI PER LA FLUIDODINAMICA (CFD)	119
7.1	LE PROBLEMATICHE DELLA SIMULAZIONE NUMERICA	119
7.2	LA FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE (CFD)	119
7.3	MODELLO AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER LA VISCOSITÀ TURBOLENTE	125
7.4	MODELLO A DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI (K-ε)	128
7.5	FONDAMENTI DELLA "LARGE EDDY SIMULATION (LES)"	130
7.6	ESEMPIO: SIMULAZIONE DI UNO SWIRLER	133
7.6.1	COSTRUZIONE DELLA GEOMETRIA	134
7.6.2	EQUAZIONI DEL MODELLO, SOTTODOMINI E CONDIZIONI AL CONTORNO	135
7.6.3	LA MESH DEL MODELLO	138
7.6.4	SOLUZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA	140
7.6.5	PLOTTAGGIO DEI RISULTATI E POST-PROCESSAMENTO	140
8	EBOLLIZIONE E CONDENSAZIONE DEI FLUIDI	146
8.1	EBOLLIZIONE STATICA	146
8.2	CORRELAZIONI DI SCAMBIO TERMICO PER L'EBOLLIZIONE	153
8.3	EBOLLIZIONE CON LIQUIDI IN MOVIMENTO	153
8.4	LA CONDENSAZIONE	160
8.5	I TUBI DI CALORE (HEAT PIPE)	163
9	L'IRRAGGIAMENTO	165
9.1	UNITÀ DI MISURA PER L'IRRAGGIAMENTO	166
9.1.1	EMISSIONE MONOCROMATICA	166
9.1.2	EMISSIONE GLOBALE	167
9.1.3	INTENSITÀ DI EMISSIONE MONOCROMATICA	167
9.1.4	INTENSITÀ DI EMISSIONE GLOBALE	167
9.2	EMISSIONE EMISFERICA	167
9.3	IL CORPO NERO	168
9.4	EMISSIONE SPECIFICA	169
9.4.1	LEGGE DI KIRCHHOFF	172

9.5	I CORPI NON GRIGI	172
9.6	CONCETTO DI FATTORE DI FORMA	173
9.6.1	ADDITIVITÀ DEI FATTORI DI FORMA	174
	Esempio di calcolo dei fattori di forma	175
9.7	PRINCIPIO DELLA SFERA UNITARIA	176
9.8	METODO DELLA RADIOSITÀ	177
9.9	CASO DELLE DUE SORGENTI CONCAVE	179
9.9.1	SUPERFICI <i>FINITE</i> PIANE E PARALLELE	182
9.9.2	SUPERFICI <i>INFINITE</i> PIANE E PARALLELE	183
9.9.3	SFERE O CILINDRI CONCENTRICI	183
9.9.4	PARETE CHE IRRADIA VERSO IL CIELO	184
9.9.5	SCHERMI RADIATIVI	184
9.10	FORMALISMO MATRICIALE NELLA RADIAZIONE TERMICA	185
9.10.1	CASO ESEMPIO: CAVITÀ FORMATA DA TRE SUPERFICI	185
9.11	EFFETTO SERRA NEGLI EDIFICI	187
9.12	EFFETTO SERRA NELL'ATMOSFERA TERRESTRE	188
10	SCAMBIATORI DI CALORE	189
10.1	SCAMBIATORI DI CALORE A CORRENTI PARALLELE	189
10.2	EFFICIENZA DEGLI SCAMBIATORI	193
	$M > 0$ cioè $c'm' < c''m''$	193
	$M < 0$ cioè $c'm' > c''m''$	194
	$M = 0$ cioè $c'm' = c''m''$	194
10.2.1	FORMA UNIFICATA DELL'EFFICIENZA DI SCAMBIO TERMICO	194
10.3	PROGETTO DI UNO SCAMBIATORE DI CALORE	194
10.3.1	METODO DELLE DIFFERENZE MEDIE LOGARITMICHE	194
10.4	SCAMBIATORI CON GEOMETRIA COMPLESSA	195
10.5	METODO NTU: UNITÀ DI TRASFERIMENTO TERMICO	196

INDICE DELLE FIGURE

FIGURA 1: POSTULATO DI FOURIER PER LA CONDUZIONE.	3
FIGURA 2: PARETE PIANA INDEFINITA	6
FIGURA 3: TRASMISSIONE PER CONDUZIONE IN UN MANICOTTO CILINDRICO	8
FIGURA 4: CONDOTTO CILINDRICO ISOLATO	8
FIGURA 5: ANDAMENTO DELLE RESISTENZA	9
FIGURA 6: MODALITÀ DI TRASMISSIONE PER CONDUZIONE IN SERIE E IN PARALLELO	10
FIGURA 7: STRATO PIANO MONODIMENSIONALE CON SORGENTE INTERNA	11
FIGURA 8: STRATO PIANO BIDIMENSIONALE	12
FIGURA 9: ANDAMENTO DEL TRANSITORIO DI RISCALDAMENTO E/O DI RAFFREDDAMENTO	15
FIGURA 10: LASTRA PIANA INDEFINITA	16
FIGURA 11: STRATO SEMINFINITO—DISTRIBUZIONE DELLA TEMPERATURA ISTANTANEA	19
FIGURA 12: ANDAMENTO DELLA TEMPERATURA IN UNO STRATO SEMINFINITO CON T IMPOSTA	19
FIGURA 13: VARIAZIONE PERIODICA DI TEMPERATURA IN UNO STRATO SEMINFINITO	21
FIGURA 14: ANDAMENTO DELLE OSCILLAZIONI ALL'INTERNO DELLO STRATO	23
FIGURA 15: STRATO PIANO SEMINFINITO	25
FIGURA 16: GRAFICO DELLA FUNZIONE $J_0(X)$	35
FIGURA 17: GRAFICO DELLA FUNZIONE $J_1(X)$	35
FIGURA 18: GRAFICO DELLA FUNZIONE $J_0(\sqrt{X})$	36
FIGURA 19: GRAFICO DELLA FUNZIONE $Y_0(X)$	36
FIGURA 20: GRAFICO DELLA FUNZIONE $Y_1(X)$	36
FIGURA 21: GRAFICO DELLA FUNZIONE $I_0(X)$ E $I_1(X)$	37
FIGURA 22: GRAFICO DELLA FUNZIONE $K_0(X)$ E $K_1(X)$	37
FIGURA 23: RETICOLO PIANO PER IL METODO ALLE DIFFERENZE FINITE	40
FIGURA 24: CONDIZIONE AL CONTORNO DEL TERZO TIPO – CONVEZIONE ESTERNA	44
FIGURA 25: COSTRUZIONE GRAFICA DI BINDER – SMITH	47
FIGURA 26: FORMAZIONE DELLA GRIGLIA DI CALCOLO PER L'ESEMPIO CONSIDERATO	49
FIGURA 27: CURVE ISOTERME PER L'ESEMPIO ANALIZZATO	49
FIGURA 28: DISTRIBUZIONE SPAZIALE DELLA TEMPERATURA	50
FIGURA 29: DISTRIBUZIONE DEL FLUSSO	50
FIGURA 30: SCHEMATIZZAZIONE DI UNA ALETTA	51
FIGURA 31: EFFICIENZA DI UNA ALETTA RETTANGOLARE	54
FIGURA 32: EFFICIENZA DI UNA ALETTA RETTANGOLARE CON SOLUZIONE ESATTA	55
FIGURA 33: RAPPRESENTAZIONE DI UNA ALETTA CIRCOLARE DI SPESSORE COSTANTE	56
FIGURA 34: DISTRIBUZIONE DELLA TEMPERATURA NELLE ALETTE CILINDRICHE	57
FIGURA 35: EFFICIENZA ALETTE ANULARI	57
FIGURA 36: PROFILO RETTANGOLARE, IPERBOLICO E TRIANGOLARE	58
FIGURA 37: GRIGLIA DI CALCOLO	58
FIGURA 38: DISTRIBUZIONE DELLA TEMPERATURA IN UNA FLANGIA	59
FIGURA 39: DISTRIBUZIONE DEL FLUSSO PER UN TUBO FLANGIATO	59
FIGURA 40: FORMAZIONE DELLO STRATO LIMITE DINAMICO SOPRA UNA LASTRA PIANA	60
FIGURA 41: SCHEMATIZZAZIONE DELLA CONVEZIONE TERMICA FRA PARETE E FLUIDO	62
FIGURA 42: TRASMISSIONE DEL CALORE FRA DUE FLUIDI SEPARATI DA UNA PARETE COMPOSTA.	64
FIGURA 43: SISTEMA APERTO CON FLUSSI LOCALIZZATI	65
FIGURA 44: PROFILI DI VELOCITÀ NELLO STRATO LIMITE SOPRA UNA LASTRA PIANA	69
FIGURA 45: PENNACCHIO ORIGINATO DA UN FOCOLARE IN BASSO	75
FIGURA 46: LUNGHEZZA DI MISCOLAMENTO TERMICA	77
FIGURA 47: SCAMBIO DI QUANTITÀ DI MOTO E DI ENERGIA FRA PARTICELLE IN MOTO TURBOLENTO	79
FIGURA 48: PROFILO UNIVERSALE DI VELOCITÀ	80
FIGURA 49: PROFILI DI VELOCITÀ E DI TEMPERATURA PER MOTO SU LASTRA PIANA RISCALDATA	81
FIGURA 50: PROFILO UNIVERSALE DI TEMPERATURA	81
FIGURA 51: SIMILITUDINE DEI PROFILI DI VELOCITÀ	84
FIGURA 52: DEFLUSSO SOPRA SUPERFICI CILINDRICHE	88
FIGURA 53: FATTORE DI DRAG	88
FIGURA 54: NUMERO LOCALE DI NUSSELT	89
FIGURA 55: F E Z PER PASSO QUADRATO	89
FIGURA 56: F E Z PER PASSO TRIANGOLARE	90

FIGURA 57: STRATO LIMITE DINAMICO IN UN CONDOTTO CIRCOLARE	92
FIGURA 58: CALCOLO DEL DIAMETRO EQUIVALENTE PER UNO SCAMBIATORE DI CALORE	96
FIGURA 59: DIAMETRO EQUIVALENTE PER CONDOTTI RETTANGOLARI	96
FIGURA 60: CONVEZIONE NATURALE CON LASTRA PIANA VERTICALE	103
FIGURA 61: CONVEZIONE NATURALE IN UNA CAVITÀ CHIUSA	113
FIGURA 62: CAVITÀ RISCALDATE DAL BASSO (CELLE DI BÈNARD)	114
FIGURA 63: FORMAZIONE DEL GETTO (ZONA TURBOLENTE)	117
FIGURA 64: FORMAZIONE DI UN PENNACCHIO	118
FIGURA 65: FORMAZIONE DI UN PENNACCHIO IN UNA TORCIA DI RAFFINERIA	118
FIGURA 66: SCHEMA DELLA MODELLIZZAZIONE FLUIDODINAMICA	120
FIGURA 67: APPLICAZIONE DELLE IPOTESI SPAZIALI E TEMPORALI AL MODELLO CFD	122
FIGURA 68: GERARCHIA DEI MODELLI DI SIMULAZIONE	124
FIGURA 69: LE TRE BANDE CARATTERISTICHE DELLO SPETTRO D'ENERGIA DELLA TURBOLENZA: SCALE ENERGETICHE, INERZIALI E DISSIPATIVE	131
FIGURA 70: STRATO LIMITE TURBOLENTO IN LARGE EDDY SIMULATION	132
FIGURA 71: FINESTRA INIZIALE FEMLAB	134
FIGURA 72: MODELLAZIONE GEOMETRICA DELLO SWIRLER	134
FIGURA 73: GEOMETRIA COMPLETA DEL SISTEMA STUDIATO	135
FIGURA 74: FINESTRA DI SELEZIONE DEI SOTTOMODULI DI RISOLUZIONE	136
FIGURA 75: FINESTRA PER IL SETTAGGIO DEI SOTTODOMINI	137
FIGURA 76: FINESTRA PER IL SETTAGGIO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO	138
FIGURA 77: FINESTRA DI SETTAGGIO PER I PARAMETRI DELLA MESH	138
FIGURA 78: MESH DEL MODELLO	139
FIGURA 79: INGRANDIMENTO DELLA MESH NELLA ZONA DELLO SWIRLER	139
FIGURA 80: FINESTRA DI GESTIONE DEL SOLUTORE	140
FIGURA 81: PIANI DI SEZIONE: CAMPO DI VELOCITÀ	141
FIGURA 82: SEZIONE LONGITUDINALE DEL MODELLO	141
FIGURA 83: LINEE DI FLUSSO	142
FIGURA 84: VETTORI VELOCITÀ	142
FIGURA 85A: INGRANDIMENTO DELLA ZONA DI FORMAZIONE DEL VORTICE(POSTERIORE)	143
FIGURA 86: DISTRIBUZIONE RADIALE DELLA COMPONENTE ASSIALE DELLA VELOCITÀ ALL'USCITA DEL BRUCIATORE	144
FIGURA 87: DISTRIBUZIONE RADIALE DELLA COMPONENTE ASSIALE DELLA VELOCITÀ A 20 CM DALLA SEZIONE D'USCITA DEL BRUCIATORE	144
FIGURA 88: DISTRIBUZIONE DELLA PRESSIONE ALL'USCITA DEL BRUCIATORE	145
FIGURA 89: CURVA DI NUKIJAMA	147
FIGURA 90: NASCITA DI UNA BOLLA DI VAPORE	148
FIGURA 91: IMPLOSIONE DELLA BOLLA	148
FIGURA 92: SCOPPIO DELLA BOLLA	149
FIGURA 93: DISTACCO DELLE BOLLE	149
FIGURA 94: EQUILIBRIO TERMODINAMICO DELLA BOLLA	149
FIGURA 95: IMPLOSIONE DELLA BOLLA DISTACCATA	151
FIGURA 96: FORMAZIONE DI COLONNE DI BOLLE	152
FIGURA 97: FORMAZIONE DI UNO STRATO DI VAPORE SULLA PARETE DI FONDO	152
FIGURA 98: SEQUENZA DI EBOLLIZIONE NUCLEATA STATICA ATTORNO AD UN FILO CALDO	154
FIGURA 99: SEQUENZA DELLE FASI DI IMPLOSIONE DI UNA BOLLA COMPLETA	155
FIGURA 100: CURVA DI NUKIJAMA PER EBOLLIZIONE DINAMICA (α È IL COEFFICIENTE DI CONVEZIONE)	156
FIGURA 101: EBOLLIZIONE DINAMICA	156
FIGURA 102: DISTRIBUZIONE DI TEMPERATURA LUNGO UN TUBO BOLLITORE	157
FIGURA 103: TIPO DI MOTO IN UN TUBO BOLLITORE ORIZZONTALE	158
FIGURA 104: DIAGRAMMA A ZONE PER IL TIPO DI MOTO	158
FIGURA 105: FATTORE DI CORREZIONE F	159
FIGURA 106: FATTORE DI CORREZIONE S	160
FIGURA 107: FORMAZIONE DEL FILM DI CONDENSATO	160
FIGURA 108: SCHEMATIZZAZIONE DEL TUBO DI CALORE	163
FIGURA 109: SEZIONE DI UN COLLETTORE SOLARE A TUBO DI CALORE	164
FIGURA 110: TIPOLOGIA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE AL VARIARE DELLA LUNGHEZZA D'ONDA	165
FIGURA 111: INTERAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE CON LA MATERIA	166
FIGURA 112: INTENSITÀ DI EMISSIONE MONOCROMATICA	167
FIGURA 113: EMISSIONE EMISFERICA	168

FIGURA 114: CURVE DI EMISSIONE DI PLANCK PER CORPO NERO A VARIE TEMPERATURE.	170
FIGURA 115: TIPOLOGIE DI EMISSIONI RADIATIVE	171
FIGURA 116: ANDAMENTO DI ε PER CORPI NERI, GRIGI E REALI.	171
FIGURA 117: ANDAMENTO DELL'EMISSIONE MONOCROMATICA PER CORPI NERI, GRIGI E REALI.	171
FIGURA 118: SCAMBIO RADIATIVO FRA CORPI NERI (FATTORE DI FORMA)	173
FIGURA 119: ADDITIVITÀ DEI FATTORI DI FORMA	175
FIGURA 120: SCAMBIO RADIATIVO FRA SUPERFICI PIANE (PARETI D'ANGOLO)	175
FIGURA 121: VERIFICA DELL'ILLUMINAMENTO DIURNO IN UN PUNTO INTERNO DI UNA SALA	176
FIGURA 122: APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI LAGRANGE	177
FIGURA 123: METODO DELLA RADIOSITÀ	179
FIGURA 124: FATTORI DI FORMA PER CASI ELEMENTARI	180
FIGURA 125: RETE EQUIVALENTE ALLO SCAMBIO RADIATIVO	181
FIGURA 126: SCHEMA DI SCAMBIO RADIATIVO FRA DUE SUPERFICI FORMANTI UNA CAVITÀ	181
FIGURA 127: RETE ELETTRICA EQUIVALENTE	182
FIGURA 128: SCAMBIO RADIATIVO FRA SUPERFICI FINITE PIANE E PARALLELE.	182
FIGURA 129: SCAMBIO RADIATIVO FRA SUPERFICI INFINITE PIANE E PARALLELE.	183
FIGURA 130: SCAMBIO RADIATIVO FRA SFERE E CILINDRI CONCENTRICI	183
FIGURA 131: SCAMBIO RADIATIVO FRA PARETE E VOLTA CELESTE.	184
FIGURA 132: SCHERMO RADIATIVO INTERPOSTO FRA DUE SUPERFICI RADIANTI.	185
FIGURA 133: SCAMBIO RADIATIVO IN UNA CAVITÀ CHIUSA	185
FIGURA 134: FATTORE DI TRASPARENZA DEI VETRI	187
FIGURA 135: RADIAZIONE SOLARE FUORI DELL'ATMOSFERA E AL SUOLO	188
FIGURA 136: SCAMBIATORE DI CALORE A CORRENTI PARALLELE EQUIVERSE	189
FIGURA 137: SCAMBIATORE DI CALORE A CORRENTI PARALLELE CONTROVERSE	190
FIGURA 138: MODALITÀ DI SCAMBIO IN UNA SEZIONE INTERMEDIA	190
FIGURA 139: DISTRIBUZIONE DELLA DIFFERENZA DI TEMPERATURA PER CORRENTI EQUIVERSE	191
FIGURA 140: DISTRIBUZIONE DELLA DIFFERENZA DI TEMPERATURA PER CONTROCORRENTE CON $M > 0$	192
FIGURA 141: DISTRIBUZIONE DELLA DIFFERENZA DI TEMPERATURA PER CONTROCORRENTE CON $M < 0$	192
FIGURA 142: DISTRIBUZIONE DELLA DIFFERENZA DI TEMPERATURA PER CONTROCORRENTE CON $M = 0$	193
FIGURA 143: SCAMBIATORE A CORRENTE INCROCIATE DEL TIPO SHELL AND TUBE	195
FIGURA 144: FASCIO TUBIERO ESTRATTO DA UNO SCAMBIATORE DI CALORE	196
FIGURA 145: CURVE (ε, NTU) PER ASSEGNATA GEOMETRIA	197
FIGURA 146: CURVE $\varepsilon - NTU$ PER ALCUNI TIPI DI SCAMBIATORI DI CALORE	198

INDICE DELLE TABELLE

TABELLA 1: CONDUCIBILITÀ DI ALCUNI MATERIALI	3
TABELLA 2: TABELLE DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE – PARTE 1°	29
TABELLA 3: TABELLE DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE – PARTE 2°	30
TABELLA 4: TABELLE DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE – PARTE 3°	31
TABELLA 5: CONDIZIONE AL CONTORNO PER CONDUZIONE STAZIONARIA	44
TABELLA 6: ALTRE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA CHIUSURA	82
TABELLA 7: SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI BLASIUS	85
TABELLA 8: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA	90
TABELLA 9: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA	91
TABELLA 10: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA	91
TABELLA 11: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA	92
TABELLA 12: CORRELAZIONI PER CONVEZIONE FORZATA	94
TABELLA 13: NUMERI DI NUSSELT PER VARIE TIPOLOGIE DI CONDOTTI	97
TABELLA 14: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE	115
TABELLA 15: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE	115
TABELLA 16: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE	116
TABELLA 17: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE	116
TABELLA 18: CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE	116