

**UNIVERSITA' DI CATANIA  
FACOLTA' DI INGEGNERIA**

# **FISICA TECNICA INDUSTRIALE**

## **VOLUME SECONDO: TERMOFLUIDODINAMICA**

DEFLUSSO MONODIMENSIONALE  
MOTO ADIABATICO NEI CONDOTTI A SEZIONE VARIABILE  
MOTO ADIABATICO NEI CONDOTTI CILINDRICI  
MOTO ISOTERMO NEI CONDOTTI CILINDRICI  
MOTO DI RAYLEIGT  
CIRCOLAZIONE DEI FLUIDI BIFASE  
STABILITA' DEI TUBI BOLLITORI

**PROF. ING. GIULIANO CAMMARATA  
PROF. ING. LUIGI CAMMARATA**

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E MECCANICA  
SEZIONE DI ENERGETICA INDUSTRIALE ED AMBIENTALE**

**AGGIORNAMENTO DEL 02/10/2010**

**FILE: FISICA TECNICA VOL 2 - COMPLEMENTI DI TERMOFLUIDODINAMICA.doc**

**AUTORI: GIULIANO CAMMARATA E LUIGI CAMMARATA**

**DATA: 2 OTTOBRE 2010**

[www.gcammarata.net](http://www.gcammarata.net)  
[gcamma@diim.unict.it](mailto:gcamma@diim.unict.it)  
[cammaratagiuliano@tin.it](mailto:cammaratagiuliano@tin.it)

Il presente volume può essere liberamente copiato e diffuso dagli Allievi per uso didattico e a condizione che rimangano invariati i riferimenti sopra indicati.

## INTRODUZIONE

Le moderne macchine per generazione di potenza meccanica si basano sempre più sulle turbine, sia a vapore che a gas. Queste sono organi di notevole complessità progettuale che coinvolge numerosi discipline quali la *Fisica Tecnica*, le *Macchine* e la *Fluidodinamica*.

Quest'ultima disciplina non è inserita nell'ordinamento della nostra Facoltà e pertanto resta al di fuori dei normali percorsi di studio che gli Allievi Ingegneri Meccanici possono scegliere.

La *Meccanica dei Fluidi* è storicamente impostata come *Idraulica* con nome apparentemente cambiato e non copre gli argomenti relativi ai fluidi comprimibili e quindi tipici della *Fluidodinamica*.

In questo breve opuscolo si desidera affrontare alcuni dei concetti fondamentali della *Fluidodinamica* necessari per le applicazioni impiantistiche e macchinistiche.

Si affronteranno, pertanto, i problemi della comprimibilità dei fluidi e dei loro effetti nel moto in condotti a sezione variabile (equazioni di *Hugoniot*) e a sezione costante.

Sono interessanti i moti di *Fanno* e di *Raileigh* e i concetti di parametri di attrito e di lunghezza massima nel moto dei fluidi compressibili.

Si lasciano fuori da questa trattazione tutti gli altri (numerosi) problemi di fluidodinamica che interessano altri campi dell'Ingegneria (quale, ad esempio, aeronautica e/o spaziale).

Gli argomenti qui selezionati, quindi, sono il minimo indispensabile per la moderna formazione di un ingegnere meccanico e trovano immediata applicazione nei corsi di Macchine ed Impianti..

Del tutto nuovo è poi il capitolo su fluidi bifase (cioè di liquidi in presenza di una fase aeriforme o anche del proprio vapore) che trova applicazioni importanti e fondamentali nel progetto di impianti (ad esempio caldaie, generatori di vapore, turbine, ...).

Si osserva subito che gli argomenti trattati richiederebbero da soli interi corsi annuali. Tuttavia, data la natura del Corso, si sono sviluppati solamente gli argomenti ritenuti fondamentali rimandando l'approfondimento ai testi in letteratura.

Catania 02/10/2010

## 1. FLUIDI COMPRIMIBILI - DEFLOSSO MONODIMENSIONALE

Le grandezze fisiche che caratterizzano il moto di un mezzo fluido variano, in generale, tridimensionalmente pertanto elaborare una teoria del moto a tre variabili euleriane risulta di enorme complessità anche nell'ipotesi di regime stazionario. Sovente si fa riferimento allo studio del *deflusso bidimensionale* scegliendo con opportuno criterio la giacitura dei piani di riferimento in modo che le variazioni del comportamento del fluido lungo la terza dimensione siano trascurabili.

Frequentemente quanto detto risulta possibile o tutt'al più si rende necessaria qualche correzione da apportare ai risultati lungo la dimensione trascurata; diversamente si può interpretare il fenomeno su più piani paralleli interpolando poi i risultati a quote intermedie, così facendo il moto viene a perdere una dimensione, e quindi una variabile euleriana, cosicché le variazioni delle grandezze fisiche caratterizzanti il moto del fluido vengono considerati solo lungo le linee di corrente e perpendicolarmente ad esse.

Tutte le volte che le variazioni del comportamento del fluido in direzione perpendicolare alle linee di corrente non sono rilevanti di può fare riferimento alla *teoria monodimensionale* del deflusso salvo, anche in questo caso, ad apportare opportune correzioni di tipo bidimensionale; è in genere lecito ricorrere a questa semplificazione nel moto lungo i condotti, sempre a condizione che le dimensioni trasversali siano piuttosto piccole rispetto alla lunghezza del condotto stesso e ciò equivale a supporre che lungo le linee di corrente congruenti i fenomeni avvengano identicamente, in tale ipotesi è sufficiente studiare quel che avviene lungo la linea mediana dell'efflusso (spesso coincidente con l'asse del condotto) per poi estrapolare i risultati, eventualmente corretti, a tutte le altre linee di corrente.

La teoria monodimensionale implica nel regime stazionario una sola variabile euleriana e si presenta semplice ed efficace, capace di fornire una visione essenziale dei fenomeni; occorre però dire che essa si presenta concettualmente insufficiente in quanto nel moto di un fluido non può essere trascurata l'esistenza degli attriti i quali producono variazioni di quantità di moto che sono causa di indesiderate distribuzioni di velocità nella direzione normale a quella del deflusso. D'altra parte le forze d'attrito, avendo carattere decisamente non conservativo, non sono funzione della sola posizione per cui, anche nel regime stazionario, non sono direttamente valutabili alla maniera euleriana ne tanto meno a quella lagrangiana ne consegue che entrambi i criteri di analisi cinematica debbano limitarsi in pratica, pur mantenendo il loro rigore, al solo studio dei moti ideali.

Tale limitazione può essere tuttavia superata mediante certi artifici consistenti nel considerare a potenziale, lungo la regione interessata al deflusso, anche le forze di attrito valutandone globalmente, e sperimentalmente, il lavoro dissipato. Ma se tale criterio può essere accettato ai fini del bilancio energetico esso non si presta a definire con semplicità i riflessi degli attriti sulla distribuzione delle velocità cosicché l'artificio rimane valido solo a condizione di limitare il campo di moto ad un esiguo tubo di flusso (che al limite degeneri in una linea di corrente) su ogni sezione del quale la velocità possa ritenersi costante.

Questa è probabilmente la ragione che porta a definire “*euleriana*” la teoria monodimensionale del deflusso mentre in realtà il criterio euleriano è di carattere generale in quanto si estende alle tre dimensioni dello spazio; in effetti solo in forma monodimensionale il metodo euleriano risulta applicabile, quando si tratta di deflusso con attrito, in virtù della predetta possibilità di valutare, sia pure per via empirica, il lavoro dissipato in funzione della successione delle velocità nel campo di moto.

Facendo riferimento al gas perfetto, approssimazione valida per gas a media e bassa densità, viene qui preso in esame il moto monodimensionale con e senza attrito nei deflussi interni per i quali le variazioni di densità sono della massima importanza per individuare la natura della corrente; questo modello fisico anche se, come già detto, sembra piuttosto limitato approssima molto bene la realtà di molte correnti fluide.

L'ipotesi di monodimensionalità presuppone quindi che tutte le grandezze fisiche interessate (pressione, densità, temperatura, velocità, ecc.) abbiano distribuzione uniforme in qualsiasi sezione del condotto.

## 1.1. COMPRIMIBILITÀ ED ESPANSIONE

La variazione volumetrica di un fluido influisce sull'andamento del moto in maniera alquanto complessa ed anche nel deflusso in condotti cilindrici, dove per fluidi a densità costante il moto può essere considerato mediamente uniforme, i cambiamenti di densità fanno variare la velocità anche lungo la direzione di avanzamento; proprio queste variazioni di densità e velocità sono quelle che determinano la necessità di una trattazione di tale deflusso distinta da quella svolta per i fluidi incomprimibili in quanto in tale circostanza il campo dinamico e quello termico interagiscono mutuamente.

Lo studio del comportamento di un fluido comprimibile in moto necessita pertanto della conoscenza dell'equazione cinetica di stato e quella del processo termodinamico responsabile della variazione volumetrica suddetta.

Viene qui dedicata particolare attenzione ad deflusso adiabatico, sia nei condotti a sezione variabile che in quelli cilindrici, visto che nella gran parte dei problemi tecnici è quello che presenta interesse maggiore; viene però anche analizzato il moto isotermo nei condotti cilindrici anche se la realizzazione di tale deflusso, come si avrà modo di vedere, può avvenire solo a particolari condizioni.

E' noto dalla *Termodinamica* che lo stato fisico di una sostanza pura ed omogenea è descritto attraverso l'equazione:

$$f(p, v, T) = 0 \quad [1.1]$$

oppure in forma esplicita da una delle equazioni:

$$\begin{aligned} v &= v(p, T) \\ p &= p(v, T) \quad [1.2] \\ T &= T(p, v) \end{aligned}$$

le quali differenziate divengono:

$$\begin{aligned} dv &= \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp \\ dp &= \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv \\ dT &= \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv + \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp \end{aligned}$$

ovvero in termini di variazione relativa:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp \\ \frac{dp}{p} &= \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \frac{1}{p} \frac{1}{\left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T} dv \\ \frac{dT}{T} &= \frac{1}{T} \frac{1}{\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p} dv + \frac{1}{T} \frac{1}{\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v} dp \end{aligned}$$

che possono essere scritte nella forma:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{v} &= \alpha \, dT - \chi_T \, dp \\ \frac{dp}{p} &= \beta \, dT - \frac{1}{pv\chi_T} \, dv \\ \frac{dT}{T} &= \frac{1}{\alpha T} \, dv + \frac{1}{\beta T} \, dp\end{aligned}\quad [1.3]$$

nelle quali il termine:

$$\alpha = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad [1.4]$$

prende il nome di **coefficiente di espansione isobara**<sup>1</sup> ed esprime la variazione relativa di volume specifico al variare della temperatura in un processo a pressione costante; il termine:

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad [1.5]$$

viene denominato **coefficiente di comprimibilità isoterna**, esso indica la variazione relativa di volume specifico al variare della pressione in un processo a temperatura costante; inoltre:

$$\beta = \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad [1.6]$$

rappresenta il **coefficiente di tensione isovolumico** ed esprime, in una trasformazione a volume costante, l'effetto della temperatura sulla pressione. Tale coefficiente e quello di espansione isobara sono in generale funzioni della pressione e della temperatura. Le [1.3] costituiscono le equazioni differenziali di stato relative ad un fluido qualsiasi allo stato termodinamico monofase.

I coefficienti termodinamici sopra definiti non sono indipendenti tra loro, infatti tenuto conto che per una funzione del tipo (1.1) si può scrivere:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_v = -1$$

ovvero anche:

$$\frac{\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p}{\left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v} = -1$$

e quindi dalle (1.4), (1.5) e (1.6) si ottiene:

$$\frac{\alpha}{\chi_T \beta} = p \quad [1.7]$$

relazione che consente il calcolo di uno dei coefficienti noti che siano gli altri due.

Se il fluido in esame è un gas perfetto per i coefficienti espansione e di tensione si scrive:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{RT}{p} \right)_p = \frac{R}{pv} \\ \beta &= \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{RT}{v} \right)_v = \frac{R}{pv}\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Spesso detto anche **coefficiente di dilatazione cubica** dei materiali.

il che equivale a scrivere:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{T} \quad [1.8]$$

ossia tali coefficienti sono indipendenti dalla pressione.

Integrando la prima delle [1.3] lungo un processo isobaro e la seconda lungo un processo isovolumico si ottiene rispettivamente:

$$v = v_0 \exp \left[ \int_{T_0}^T \alpha \, dT \right]$$

$$p = p_0 \exp \left[ \int_{T_0}^T \beta \, dT \right]$$

si osserva che se l'intervallo di temperatura non è grande i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  possono ritenersi con buona approssimazione costanti pertanto le suddette relazioni divengono:

$$v = v_0 \exp [\alpha (T - T_0)] \quad [1.9]$$

$$p = p_0 \exp [\beta (T - T_0)]$$

inoltre sviluppando in serie e trascurando i termini di ordine superiore si può scrivere:

$$v = v_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad [1.10]$$

$$p = p_0 [1 + \beta (T - T_0)]$$

come temperatura iniziale si può considerare quella del ghiaccio fondente pari a 273,15 K. Per grandi intervalli di temperatura le suddette espressioni possono ancora essere ritenute valide a condizione che  $\alpha$  e  $\beta$  siano da intendere come valori medi lungo tali intervalli. Sempre nel caso di gas perfetto per il coefficiente di comprimibilità isotermo si ha:

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{RT}{p} \right)_T = \frac{RT}{p^2 v}$$

ovvero anche:

$$\chi_T = \frac{1}{p} \quad [1.11]$$

esso quindi non dipende dalla temperatura. La comprimibilità di un fluido può anche avvenire isoentropicamente, in tal caso dalle equazioni del primo e secondo principio della termodinamica risulta:

$$(du)_s + p (dv)_s = 0$$

$$(dh)_s - v (dp)_s = 0$$

ovvero nella forma equivalente:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -p \quad \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_s = v$$

quindi effettuando il rapporto:

$$\frac{\left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_s}{\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s} = \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_s \left( \frac{\partial v}{\partial u} \right)_s = -\frac{v}{p}$$

e scrivendo nella forma:

$$-\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)_s = \frac{1}{p}$$

si può definire un altro coefficiente termodinamico di variazione volumetrica dato dalla:

$$\chi_s = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \quad [1.12]$$

denominato *coefficiente di comprimibilità isoentropica* il quale rappresenta la variazione di volume specifico al variare della pressione in un processo ad entropia costante; tale coefficiente, come si avrà modo di vedere poco più avanti, è legato alla velocità di propagazione delle onde di pressione in un mezzo fluido. Pertanto la relazione:

$$\left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)_s = \frac{1}{\chi_s p} \quad [1.13]$$

rappresenta l'equazione differenziale di una trasformazione isoentropica, nota dalla termodinamica, ed esprime la variazione delle proprietà calorifliche, entalpia ed energia interna, del fluido in funzione delle sue proprietà termiche, pressione e volume specifico, in un processo isoentropico. La quantità:

$$k^* = \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)_s$$

rappresenta appunto l'esponente dell'isoentropica, sicché per un fluido qualsiasi il coefficiente di comprimibilità isoentropico assume la forma:

$$\chi_s = \frac{1}{k^* p} \quad [1.14]$$

se il fluido è un gas perfetto risulta:

$$k^* = \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)_s = \left( \frac{dh}{du} \right)_s = \frac{c_p}{c_v}$$

pertanto la [1.14] diviene:

$$\chi_s = \frac{1}{k p} \quad [1.15]$$

e dal confronto con la [1.11] ne risulta:

$$k = \frac{\chi_T}{\chi_s} \quad [1.16]$$

ossia il coefficiente adiabatico  $k$  è dato dal rapporto tra i due coefficienti di comprimibilità isotermo ed isoentropico, rispettivamente. Si osserva altresì che la suddetta espressione, come si può dimostrare, ha validità anche per un fluido qualsiasi.

I gas hanno la tendenza a comprimersi molto più elevata rispetto a quella dei liquidi, in condizioni standard di pressione e temperatura  $\chi_T$  risulta dell'ordine di  $10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}$ . I liquidi oppongono maggiore resistenza alle azioni che tendono a comprimerli. Integrando la prima delle [1.3] per un processo isotermo si ottiene:

$$v = v_0 \exp \left[ - \int_{p_0}^p \chi_T dp \right]$$

anche qui considerando non eccessivo l'intervallo di pressione si può scrivere:

$$v = v_0 \exp \left[ -\chi_T (p - p_0) \right] \quad [1.17]$$

quindi sviluppando in serie e trascurando i termini di ordine superiore al primo si ha:

$$v = v_0 [1 - \chi_T (p - p_0)] \quad [1.18]$$

Per i liquidi più comuni  $\chi_T$  è dell'ordine di  $10^{-9} \text{ m}^2 / \text{N}$ , in particolare nel caso dell'acqua, alle medesime condizioni di pressione e temperatura, esso vale circa  $5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{N}$  ossia ventimila volte più piccolo del corrispondente valore che compete al gas, di conseguenza atteso il piccolo valore di  $\chi_T$  dalla [1.18] si deduce che il valore di  $v$  è praticamente coincidente con quello di  $v_0$  e ciò consente di considerare i liquidi come “fluidi incomprensibili”.

Tuttavia anche i gas possono essere trattati allo stesso modo dei liquidi tutte le volte che il loro movimento non comporta sensibili variazioni di pressione.

L'ipotesi di incomprensibilità porta ovviamente ad una fondamentale semplificazione negli sviluppi analitici e fornisce al tempo stesso risultati di completa attendibilità per molti problemi pratici.

Non si deve però dimenticare che il fluido incomprensibile costituisce una semplice astrazione, analoga a quella del corpo rigido; in un fluido reale e per processi isotermici ad ogni variazione di pressione si associa una variazione dell'energia potenziale elastica connessa ai corrispondenti cambiamenti di volume e tale variazione di energia equivale al lavoro meccanico compiuto dalle pressioni esterne sulla superficie di contorno durante la variazione volumetrica.

L'ipotesi di incomprensibilità presupporrebbe che la pressione del fluido potesse variare indipendentemente da un effettivo lavoro delle pressioni esterne; assume pertanto una certa importanza stabilire entro quali limiti è effettivamente lecito ammettere l'incomprensibilità dei fluidi.

## 1.2. VELOCITÀ DEL SUONO E NUMERO DI MACH

Si consideri un tubo cilindrico nel quale un pistone viene spostato con un improvviso movimento  $dw$  da sinistra verso destra; a seguito di tale spostamento si viene a generare nel fluido immediatamente vicino al pistone un aumento di pressione il quale non si manifesta all'istante in tutti i punti del condotto, essendo il fluido dotato di inerzia e di elasticità, bensì si propaga, verso destra, con velocità  $c$ ; tale velocità di propagazione di questa perturbazione provocata nel fluido viene denominata *velocità del suono*.

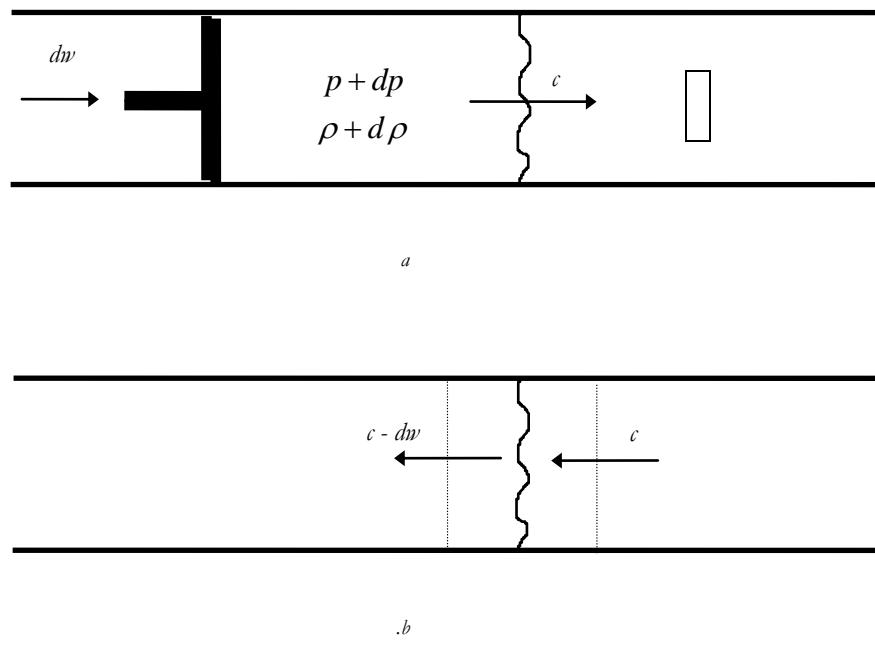


Figura 1

Per potere determinare questa velocità si consideri un riferimento solidale con l'onda di pressione, in tal caso il fluido scorre da destra verso sinistra e passando attraverso il fronte d'onda la sua velocità passa dal valore  $c$  al valore  $c - dw$ . Nell'ipotesi che il fluido si muove di moto stazionario rispetto al riferimento solidale col fronte d'onda applicando l'equazione di bilancio di quantità di moto in due sezioni immediatamente a monte ed a valle di questo si ha:

$$p + \rho c^2 = p + dp + (\rho + d\rho)(c - dw)^2$$

e trascurando infinitesimi di ordine superiore si può scrivere:

$$dp + c^2 d\rho = 2\rho c dw$$

Applicando inoltre l'equazione di bilancio di massa si scrive:

$$\rho c = (\rho + d\rho)(c - dw)$$

che diviene:

$$c d\rho = \rho dw$$

e sostituita nella precedente fornisce:

$$dp + c^2 d\rho = 2c^2 d\rho$$

dalla quale si ottiene:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad [1.19]$$

Se si tiene conto che la velocità di propagazione delle vibrazioni sonore nel mezzo fluido è molto grande nessuno scambio di calore, anche se piccolo, riesce a prodursi nelle zone di compressione e di depressione dell'onda da una parte ed il mezzo dall'altra cosicché le vibrazioni del mezzo dovute alla propagazione dell'onda si possono considerare adiabatiche ed isoentropiche, pertanto la [1.19] deve essere scritta:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad [1.20]$$

nota come *equazione di Laplace*. L'ipotesi che ha condotto alla [1.20] è che l'eccesso di pressione sia piccolo, al limite infinitesimo; in realtà si dimostra che non essendo tale incremento infinitesimo la velocità di propagazione effettiva  $c'$  differisce dal valore fornito dalla suddetta espressione, ovvero si verifica che  $c' > c$  per incrementi di pressione positivi e viceversa per incrementi negativi. Il valore di  $c$  calcolato con la [1.20] viene anche denominato *velocità del suono di frequenza zero*, infatti quando le vibrazioni sonore di frequenza sufficientemente alta si propagano in un mezzo fluido l'ipotesi sulla loro natura isoentropica cessa di essere valida, per tali situazioni la velocità del suono dipende anche dalla frequenza.

Tuttavia per un intervallo di frequenze che presentano pratico interesse l'equazione di Laplace fornisce valori di  $c$  che, a meno di qualche centesimo di percento, coincidono con i dati sperimentali.

Esprimendo la [1.20] in termini di volume specifico si ha:

$$c = \sqrt{-v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s}$$

e tramite la [1.14] si ottiene:

$$c = \sqrt{\frac{v}{\chi_s}} \quad [1.21]$$

Se il fluido è un gas perfetto, tenuto conto dell'equazione di stato, la suddetta relazione diviene:

$$c = \sqrt{k R T} \quad [1.22]$$

la velocità del suono dipende in tal caso dalla sola temperatura, mentre in un gas reale  $c$  è funzione anche della pressione.

Osservando la [1.20] si deduce che ammettere l'incomprimibilità equivale ad assegnare valore infinito alla velocità del suono, ciò significa che ogni piccola variazione di pressione provocata in un punto qualsiasi della massa fluida venga istantaneamente risentita in tutti gli altri punti.

Nell'esempio citato il fluido è comprimibile per cui esso non si sposta subito alla velocità del pistone, come ciò invece avrebbe luogo se al posto del fluido il pistone spingesse un cilindro di metallo.

Affinché l'ipotesi di incomprimibilità non dia luogo a contraddizioni troppo evidenti le dimensioni della massa fluida devono essere abbastanza limitate in modo tale da potere ritenere trascurabile il tempo effettivamente necessario per la trasmissione delle variazioni di pressione fino ai punti più lontani, oppure tali variazioni risultino così lente e graduali ed il tempo predetto sia brevissimo.

Nel caso di liquidi sarà allora necessario mettere in conto la comprimibilità nello studio dei fenomeni che riguardano l'inizio e l'arresto del movimento entro lunghi condotti (colpo d'ariete) e non se ne potrà prescindere nemmeno nel caso di condotti brevi quando l'avviamento o l'arresto del moto avvengono in un intervallo di tempo estremamente breve.

La comprimibilità deve soprattutto essere presa in considerazione allorquando il fluido acquista velocità che si avvicina al valore di  $c$ , ciò si verifica con relativa frequenza nei processi gasdinamici ed aerodinamici sia perché la velocità del suono negli aeriformi è assai minore di quella che compete ai liquidi (da un quarto ad un quinto, circa, di quella dell'acqua) e sia perché in seno all'aria è più facile raggiungere velocità di trasporto molto elevate.

L'esistenza di questa velocità di propagazione è responsabile di una fondamentale distinzione tra il *regime subsonico* ( $w < c$ ) ed il *regime supersonico* ( $w > c$ ), tale distinzione si rende necessaria in quanto il comportamento termodinamico del fluido nei due regimi di moto è assai diverso.

Si consideri a tal proposito una corrente fluida in moto a sia  $w$  la velocità in un punto qualsiasi in corrispondenza del quale lo stato termodinamico è caratterizzato dai valori di  $p, \nu, T$ ; allora il rapporto adimensionale:

$$M = \frac{w}{c} \quad [1.23]$$

viene denominato *numero di Mach* e sta ad indicare il rapporto tra la velocità del fluido in un punto, in un dato stato termodinamico, e la velocità del suono nel medesimo punto e allo stesso stato; pertanto il regime di deflusso di un fluido, al variare della velocità, viene così classificato:

- $M < 1$  *regime subsonico*
- $M = 1$  *regime sonico*
- $M << 1$  *regime incomprimibile*
- $M > 1$  *regime supersonico*
- $M >> 1$  *regime ipersonico*

Come visto solo per  $M << 1$  (in pratica all'incirca  $M < 0,3$ ) si può ritenere accettabile l'ipotesi di incomprimibilità; per valori elevati della velocità  $w$  non si può trascurare lo stato termodinamico del fluido il quale sarà sottoposto ad espansioni e compressioni.

### 1.3. STATI TERMODINAMICI PARTICOLARI

E' noto che i valori di  $p, \nu, T$  individuano lo stato termodinamico di un fluido e questa terna di grandezze in un punto qualsiasi, in corrispondenza del quale il fluido è dotato di velocità  $w$ , rappresenta uno stato termodinamico generico comunemente chiamato *stato locale*; questo stato non mette in evidenza nessun particolare circa il comportamento fisico del fluido.

Si consideri adesso un deflusso adiabatico senza scambio di lavoro e con variazione di energia potenziale trascurabile; applicando l'equazione di bilancio energetico fra uno stato locale  $(b, w)$  ed uno stato  $(h_0, w_0 = 0)$  risulta:

$$h_0 = h + \frac{w^2}{2} \quad [1.24]$$

questo stato fisico particolare viene denominato *stato di ristagno* ovvero anche *stato di arresto adiabatico* ed  $h_0$  rappresenta l'*entalpia di ristagno* ossia quel valore di entalpia che il fluido avrebbe se a partire da condizioni locali fosse portato adiabaticamente fino alla condizione di velocità nulla.

Se  $(h_1, w_1)$  e  $(h_2, w_2)$  sono due stati locali e se il fluido scambia calore l'equazione di bilancio energetico, tenuto conto della precedente, si può scrivere:

$$q_{12} = \left( h_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) - \left( h_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) = h_{02} - h_{01} \quad [1.25]$$

dalla quale si osserva che l'*entalpia di ristagno* rimane costante se non vi è scambio di calore con l'esterno, anche in presenza di fenomeni dissipativi; essa aumenta, o diminuisce, nel caso di somministrazione, o sottrazione, di calore al fluido.

L'*entalpia di ristagno* è quindi una grandezza rappresentativa del contenuto energetico del fluido, prescindendo dall'effettiva utilizzazione di tale energia al fine di ottenere lavoro. Nel caso di gas perfetto la [1.24] diviene:

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p} \quad [1.26]$$

che rappresenta la *temperatura di ristagno*, definita in maniera analoga a quanto fatto per l'*entalpia*; in tal caso dalla [1.25] si ha:

$$q_{12} = c_p (T_{02} - T_{01}) \quad [1.27]$$

pertanto anche la *temperatura di ristagno* è rappresentativa del contenuto energetico per un gas perfetto e varia solo se vi è scambio di calore con l'esterno. In un deflusso adiabatico si ha sempre:

$$h_0 = \text{cost} \cdot t. \quad T_0 = \text{cost} \cdot t.$$

Scrivendo la [1.26] nella forma:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{w^2}{2c_p T} = 1 + \frac{k-1}{2} \frac{w^2}{kRT}$$

e quindi per le [1.22] e [1.23] risulta:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad [1.28]$$

ossia per un dato gas il rapporto tra la *temperatura di ristagno* e quella locale è funzione del numero di Mach. Inoltre essendo:

$$\frac{T_0}{T} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

dalla [1.28] si ottiene:

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad [1.29]$$

che rappresenta la *pressione di ristagno*, ossia quella pressione che il gas avrebbe se partendo da condizioni locali  $(p, w)$  fosse portato isoentropicamente fino alla condizione di velocità nulla.

Facendo riferimento all'equazione di bilancio energetico in forma meccanica e trascurando ancora variazioni di energia potenziale si può scrivere:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + l_R = 0$$

e supposto che gli estremi di integrazione siano due stati di ristagno tale espressione diviene:

$$l_R = \int_{01}^{02} \frac{dp_0}{\rho_0} \quad [1.30]$$

tale eguaglianza è dovuta al fatto che calcolare l'integrale suddetto nelle condizioni di ristagno equivale ad eseguire il calcolo considerando, ad ogni passo di integrazione, pressione e densità nelle condizioni di ristagno.

Nel caso di gas perfetto e se questo non scambia calore la [1.30] si scrive:

$$l_R = \int_{01}^{02} RT_0 \frac{dp_0}{p_0} = RT_0 \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} \quad [1.31]$$

dalla quale risulta:

$$p_{01} = p_{02} \exp \left( \frac{l_R}{RT_0} \right) \quad [1.32]$$

pertanto nel moto adiabatico la pressione di ristagno non è una costante, lo diviene solo che il deflusso avviene isoentropicamente, ovvero:

$$l_R = 0 \quad p_{01} = p_{02} = p_0$$

sicché la pressione di ristagno è una grandezza rappresentativa del contenuto entropico del gas e quindi dalla sua capacità di trasformare in lavoro meccanico l'energia posseduta. Essendo inoltre:

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1}$$

ancora dalla (1.28) risulta:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad [1.33]$$

si ottiene la *densità di ristagno*, definita allo stesso modo della pressione di ristagno e come tale è una costante solo nel deflusso isoentropico. In questo caso sarebbe:

$$T_{01} \rho_{01}^{1-k} = T_{02} \rho_{02}^{1-k}$$

ed essendo costante la temperatura di ristagno sarà anche:

$$\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$$

Le equazioni [1.28], [1.29] e [1.33] dimostrano che nel caso di deflussi adiabatici reversibili esiste un legame univoco tra il numero di *Mach* ed i rapporti fra le grandezze termodinamiche locali e quelle di ristagno.

Si può concludere che lo stato di ristagno costituisce uno stato di arresto adiabatico per entalpia e temperatura mentre per pressione e densità esso è uno stato di arresto isoentropico.

Si faccia ancora riferimento alla [1.26] che può essere messa nella forma:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{kRT}{k-1} = \frac{kRT_0}{k-1}$$

ovvero anche:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{c^2}{k-1} = \frac{c_0^2}{k-1} \quad [1.34]$$

dalla quale si osserva che la velocità locale del gas diminuisce all'aumentare della velocità del suono e viceversa; da qui si deduce che in corrispondenza di un dato punto, caratterizzato da un dato stato termodinamico, le due velocità hanno eguale valore sicché:

$$w = c = w_c$$

in tale stato il numero di Mach diviene unitario ed il valore comune alle due velocità vale:

$$w_c = c_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}} \quad [1.35]$$

che prende il nome di *velocità critica*.

Essendo noto lo stato di ristagno la temperatura critica si può determinare dalla [1.28], sicché:

$$T_c = T_0 \left( \frac{2}{k+1} \right) \quad [1.36]$$

ed è ovvio che tale valore da solo non è sufficiente a definire uno stato termodinamico, sono necessari i valori di pressione e densità per i quali, come si è visto, si rende necessaria la condizione di isoentropicità del deflusso; pertanto dalla [1.29] si perviene alla:

$$p_c = p_0 \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad [1.37]$$

e dalla [1.33] si ha:

$$\rho_c = \rho_0 \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad [1.38]$$

Queste ultime tre equazioni individuano lo stato termodinamico corrispondente alla condizione di  $M = 1$  che viene così denominato *stato critico*.

Partendo da uno stato locale  $(p, \rho, T, w)$  combinando le suddette relazioni con le [1.28], [1.29] e [1.33] si può scrivere:

$$\begin{aligned} T_c &= T \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right) \\ p_c &= p \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad [1.39] \\ \rho_c &= \rho \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \end{aligned}$$

lo stato critico isoentropico è pertanto uno stato termodinamico corrispondente alla condizione  $M = 1$  ottenuto a partire da condizioni locali o di ristagno.

Essendo il deflusso isoentropico i valori di  $T_c, p_c, \rho_c$  sono costanti in ogni punto del campo di moto. Questo particolare stato termodinamico è fondamentale nello studio dell'efflusso dei gas lungo i condotti a sezione variabile (ugelli e diffusori) nei quali, come si avrà modo di vedere qui di seguito, sia per geometria sia per condizioni di moto l'entropia si può ritenere costante, almeno in prima approssimazione.

Dalla [1.34] si osserva che nel moto isoentropico la velocità ha un limite superiore che si ottiene allorquando la velocità locale del suono diviene nulla, in caso si può scrivere:

$$w_{\max} = c_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}} \quad [1.40]$$

questa velocità in pratica sarebbe realizzata solo allo zero assoluto di temperatura in corrispondenza del quale l'entalpia del gas sarebbe totalmente trasformata in energia cinetica; tale valore in condizioni isoentropiche non può quindi essere raggiunto.

Facendo riferimento alla [1.40] la [1.34] assume la forma:

$$\frac{w^2}{w_{\max}^2} + \frac{c^2}{c_0^2} = 1 \quad [1.41]$$

la quale mostra come tutti i possibili regimi di moto sopra descritti per un gas perfetto giacciono su un'ellisse di assi  $(w, c)$ , come è illustrato nella Figura 2.

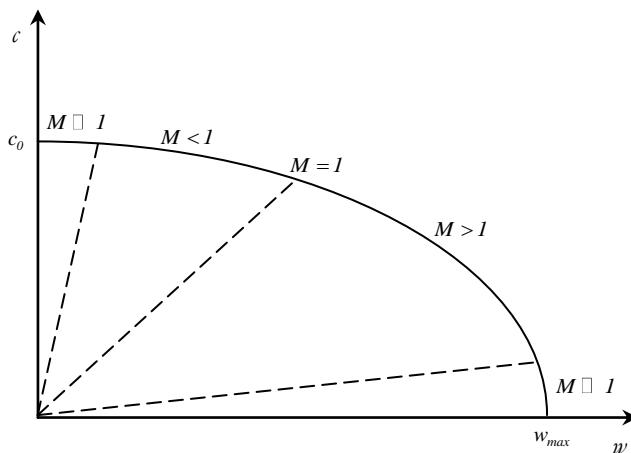


Figura 2

#### 1.4. FATTORE DI COMPRIMIBILITÀ

Si faccia riferimento all'equazione energetica per un fluido incomprimibile la quale, trascurando variazioni di energia potenziale e le resistenze per attrito, si scrive:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p - p_0) = 0$$

essendo  $p_0$  la pressione di ristagno del fluido; scrivendo tale equazione nella forma:

$$\frac{\rho w^2}{2} = p_0 - p \quad [1.42]$$

si osserva che la pressione dinamica del fluido si identifica come differenza tra la pressione di ristagno e quella locale; non si può dire altrettanto nel caso di un fluido compressibile. Si consideri infatti il rapporto:

$$f_k = \frac{p_0 - p}{\frac{\rho w^2}{2}} \quad [1.43]$$

che viene denominato *fattore di comprimibilità*, da esso si deduce che se il fluido è incomprimibile si ha  $f_k = 1$  mentre se il fluido è compressibile deve essere  $f_k > 1$  e pertanto si ha:

$$\frac{\rho w^2}{2} < p_0 - p \quad [1.44]$$

Al fine di valutare la differenza di pressione  $p_0 - p$  si consideri un gas perfetto che si muove isoentropicamente, in tal caso si può scrivere:

$$\frac{\rho w^2}{2} = \frac{k}{2} p M^2$$

di conseguenza la [1.43] diviene:

$$f_k = \frac{2}{k M^2} \left( \frac{p_0}{p} - 1 \right)$$

e quindi per la [1.29] risulta:

$$f_k = \frac{2}{k M^2} \left[ \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right] \quad [1.45]$$

pertanto per un dato gas, ovvero per un assegnato valore di  $k$ , il fattore di comprimibilità è funzione del solo numero di Mach locale. Sviluppando in serie binomiale il termine in parentesi si può scrivere:

$$\left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = 1 + \frac{k}{2} M^2 + \frac{k}{8} M^4 + \frac{k(2-k)}{48} M^6 + O(M^8)$$

e la [1.45] diviene:

$$f_k = 1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-k}{24} M^4 + O(M^6) \quad [1.46]$$

sicché dalla [1.43] si ottiene la differenza di pressione richiesta, ossia:

$$p_0 - p = \frac{\rho w^2}{2} \left[ 1 + \frac{M^2}{2} + \frac{2-k}{24} M^4 + O(M^6) \right] \quad [1.47]$$

Se il moto del gas è lontano dal regime sonico, ossia per  $M \ll 1$ , i termini alla seconda ed alla quarta potenza delle ultime due relazioni divengono piccolissimi di conseguenza dalla [1.46] risulterebbe che  $f_k = 1$ , ossia il fluido si può considerare incomprimibile, mentre la si identificherebbe con la [1.42].

Tale risultato risulta alquanto significativo, il deflusso adiabatico dei gas attorno ad oggetti e lungo i condotti si può ritenere incomprimibile finché il numero di Mach è piccolo,  $M < 0,3$  circa, ottenendo così nel modello a densità costante una indubbia semplificazione di calcolo.

## 2. MOTO ADIABATICO NEI CONDOTTI A SEZIONE VARIABILE

Allorquando i fluidi si comportano come comprimibili si hanno interessanti comportamenti per il loro moto all'interno di condotti a sezione variabile che qui si presentano.

### 2.1. MOTO ISOENTROPICO: VELOCITÀ E PORTATA SPECIFICA

Nello studio dei condotti a sezione variabile il problema che in pratica si pone è quello di analizzare la loro conformazione e le condizioni operative necessarie al fine di ottenere mentre il fluido scambia lavoro, ed eventualmente calore, che esso subisca determinate trasformazioni; viceversa di individuare le trasformazioni che il fluido subisce nell'attraversare un condotto di forma assegnata ed in determinate condizioni.

I condotti che vengono qui esaminati sono suddivisi in due classi fondamentali dove il fluido segue un comportamento totalmente diverso, si definisce infatti:

- - *ugello* un condotto che, a prescindere dalla sua forma geometrica, consente di ottenere un incremento della velocità a spese di una diminuzione di pressione e densità;
- - *diffusore* un condotto che, prescindendo dalla forma geometrica, consente di realizzare una diminuzione della velocità a vantaggio di un aumento di pressione e di densità. Si vedrà nel prossimo paragrafo che la modalità del deflusso in questi particolari condotti dipende esclusivamente dal regime di partenza della corrente fluida pur conservando la stessa geometria.

Si consideri allora un fluido che viaggia in regime stazionario in un condotto a sezione variabile per il quale siano rispettate le seguenti ipotesi:

- - pareti termicamente isolate,
- - non vi sia scambio di lavoro meccanico,
- - le variazioni di energia potenziale dovute al campo gravitazionale siano trascurabili,
- - deflusso monodimensionale.

La prima ipotesi è senz'altro verificata in quanto trattandosi di condotti corti ed avendo a che fare con velocità elevate ne risulta che la quantità di calore scambiata attraverso le pareti è molto piccola ed in pratica quasi sempre trascurabile, la terza ipotesi si ritiene accettabile appunto perché le alte velocità danno luogo a variazioni di energia cinetica molto grandi rispetto a quelle di energia potenziale, anche la quarta ipotesi si ritiene valida se il condotto è ad asse rettilineo o comunque poco incurvato di modo che i filetti fluidi siano paralleli e diretti secondo l'asse. La seconda ipotesi non viene per il momento presa in considerazione. Sotto le suddette condizioni l'equazione di bilancio di energia nella forma termodinamica si scrive:

$$\frac{w^2 - w_1^2}{2} + (h - h_1) = 0$$

dalla quale si ricava:

$$w = \sqrt{w_1^2 + (h_1 - h)} \quad [2.1]$$

che consente la determinazione della velocità del fluido in una sezione generica del condotto a partire da uno stato locale noto, caratterizzato dai valori  $(h_1, w_1)$ , e viene denominata *velocità adiabatica*; mentre l'equazione di bilancio di energia nella forma meccanica si scrive:

$$\frac{w^2 - w_1^2}{2} + \int_{p_1}^p \frac{dp}{\rho} + l_R = 0$$

dalla quale risulta:

$$w = \sqrt{w_1^2 + 2 \left[ \int_p^{p_1} \frac{dp}{\rho} - l_R \right]} \quad [2.2]$$

che consente di determinare la velocità in una generica sezione del condotto a partire dallo stato locale noto caratterizzato dai valori  $(p_1, w_1)$ .

Le equazioni [2.1] e [2.2] sono di carattere generale nel senso che sono valide per qualsiasi fluido, anche se per dare forma risolutiva alla seconda sono necessarie la conoscenza del processo termodinamico e del lavoro delle forze d'attrito altrimenti il problema risulta due volte indeterminato.

Se il condotto, ugello o diffusore, è convenientemente breve e la superficie lambita dal fluido è ben levigata la trasformazione si può considerare praticamente reversibile in quanto il termine  $l_R$  diviene piuttosto piccolo rispetto al valore che assume l'energia cinetica nella sezione finale e pertanto può essere considerato trascurabile, almeno in prima approssimazione, di conseguenza la (2.2) diviene:

$$w = \sqrt{w_1^2 + 2 \int_p^{p_1} \frac{dp}{\rho}} \quad [2.3]$$

Si può dire pertanto che la [2.1] è valida nel caso di processo reversibile ed irreversibile ma necessariamente adiabatico mentre la [2.3] è applicabile a qualunque processo purché necessariamente reversibile il quale se è anche adiabatico la suddetta espressione viene denominata *velocità isoentropica*.

Facendo riferimento alla [2.1] e se il fluido è un gas perfetto si può scrivere:

$$w = \sqrt{w_1^2 + 2c_p(T_1 - T)}$$

ovvero anche:

$$w = \sqrt{w_1^2 + \frac{2k}{k-1} RT_1 \left(1 - \frac{T}{T_1}\right)}$$

e tenuto conto sia dell'equazione di stato che l'equazione di trasformazione in funzione di pressione e temperatura si ottiene:

$$w = \sqrt{w_1^2 + \frac{2k}{k-1} RT_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad [2.4]$$

ovvero la velocità isoentropica del gas perfetto; è immediato verificare che alla suddetta equazione si può pervenire anche attraverso la [2.3] sostituendo nell'integrale l'equazione di trasformazione in funzione di pressione e densità.

La portata di massa specifica si può ottenere dalla relazione:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho w$$

nella quale essendo:

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{p_1}{RT_1} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

e tenuto conto della (2.4) si perviene alla relazione:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{p_1}{RT_1} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{w_1^2 + \frac{2k}{k-1} RT_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad [2.5]$$

ossia la *portata specifica isoentropica* di un gas perfetto. Si osserva che qualora la velocità  $w_1$  non sia nota si può mettere la [2.4] nella forma:

$$w^2 - w_1^2 = \frac{2k}{k-1} RT_1 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad [2.6]$$

inoltre potendo scrivere:

$$w^2 - w_1^2 = w^2 \left[ 1 - \left( \frac{w_1}{w} \right)^2 \right]$$

tenuto conto dell'equazione di bilancio di massa:

$$\frac{w_1}{w} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right) \left( \frac{A}{A_1} \right)$$

e dell'equazione di trasformazione la precedente espressione diviene:

$$w^2 - w_1^2 = w^2 \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_1} \right)^2 \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} \right]$$

e sostituendo nella [2.6] si ottiene:

$$w = \sqrt{\frac{\frac{2k}{k-1} RT_1}{1 - \left( \frac{A}{A_1} \right)^2 \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}}}} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad [2.7]$$

in tal caso la velocità isoentropica viene messa in relazione con la geometria del condotto; per la portata di massa si può allora scrivere:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R} \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}} \sqrt{\frac{\frac{2}{k-1}}{1 - \left( \frac{A}{A_1} \right)^2 \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}}}} \left[ \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right] \quad [2.8]$$

tale espressione consente anche di risolvere il problema inverso, ossia quello di determinare l'area della sezione di uscita del condotto, nota che sia quella in ingresso, affinché sia garantita una data portata di massa di gas compatibile con lo stato termodinamico iniziale e la pressione finale.

Per semplificare le espressioni suddette si potrebbe considerare una particolare sezione del condotto ove vi siano condizioni tali per le quali sia nulla, o quanto meno trascurabile, la velocità del fluido; nella maggior parte delle situazioni reali tale sezione non esiste però ad essa si può sempre fare riferimento in quanto noto che sia il suo stato termodinamico  $(p_1, \rho_1, T_1, w_1)$  si può sempre determinare lo stato di ristagno ad essa associato  $(p_0, \rho_0, T_0)$  attraverso le equazioni [1.28], [1.29] e [1.33] sicché la [2.4]

$$w = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad [2.9]$$

mentre per la portata di massa specifica risulta:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad [2.10]$$

Se si tiene conto della [1.29] per la suddetta equazione si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}}{A} &= \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{2}{k-1} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{2}{k-1} \frac{1}{\left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{2}{k-1}}} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)} \end{aligned}$$

e quindi semplificando ed ordinando si ottiene:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \frac{M}{\left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad [2.11]$$

la quale esprime la portata specifica in funzione dello stato termodinamico di ristagno e del numero di Mach; tale relazione costituisce una forma alternativa alla [2.10] ed ha un'importanza notevole nel campo della termofluidodinamica applicata alle macchine.

Uno dei problemi fondamentali nello studio del comportamento degli ugelli e diffusori è quello di determinare il valore massimo di portata specifica che può defluire nel condotto in esame e più precisamente a quale stato termodinamico tale valore corrisponde.

Con riferimento alla [2.10] si osserva che la portata specifica varia al variare della pressione ed il valore massimo si ottiene allorquando risulta massimo il termine in parentesi quadra per il quale, in corrispondenza di una data pressione  $p^*$ , deve essere nulla la derivata prima:

$$\frac{2}{k p_0} \left( \frac{p^*}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k p_0} \left( \frac{p^*}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}-1} = 0$$

dalla quale si ottiene:

$$p^* = p_0 \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = p_c$$

pertanto la massima portata specifica si raggiunge in corrispondenza dello stato critico sicché sostituendo questo valore di pressione nella [2.10] si perviene all'espressione:

$$\left( \frac{\dot{m}}{A} \right)_{\max} = \frac{\dot{m}}{A_c} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad [2.12]$$

Dalla [2.10] si osserva che la portata aumenta al diminuire della pressione fino al valore fornito

dalla [2.12] per poi decrescere fino ad annullarsi addirittura laddove la velocità assume valore massimo, è evidente che questo discorso è inaccettabile; in pratica attraverso l'osservazione sperimentale si è visto che una volta raggiunta la pressione critica la portata conserva costantemente il valore massimo sicché l'andamento della funzione [2.10] è quello riportato nella figura 3 dove il ramo di curva tratteggiato ha solo un significato matematico ma non corrisponde ad alcuna situazione reale.

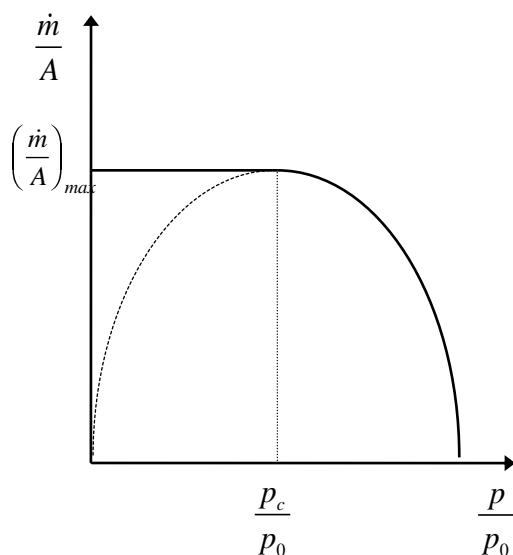


Figura 3

Questo fatto pone senz'altro un limite alla validità della [2.10] in quanto non essendo fisicamente giustificabile il secondo ramo della curva suddetta tale equazione è accettabile solo per  $p \geq p_c$ .

## 2.2. TEOREMA DI HUGONIOT

L'ipotesi di considerare reversibile il deflusso adiabatico negli ugelli e diffusori costituisce ovviamente solo un'approssimazione anche se abbastanza accettabile visto che, per quanto detto in precedenza, si tratta di condotti di caratteristiche geometriche tali che i fenomeni dissipativi non hanno ne lo spazio né il tempo sufficiente per far sentire in modo apprezzabile i loro effetti; nella realtà però questa è una semplificazione che viene fatta solo in una prima fase di calcolo, o di verifica, al fine di determinare i valori teorici di velocità, portata di massa e le altre grandezze fisiche e successivamente, in un seconda fase, vengono messe in conto le irreversibilità, fra l'altro inevitabili, modificando i valori delle suddette grandezze mediante opportuni coefficienti correttivi determinabili solo attraverso l'osservazione sperimentale.

Considerando in una prima approssimazione il moto isoentropico attraverso le equazioni differenziali di bilancio di massa ed energia si può analizzare il comportamento di un fluido comprimibile che attraversa un condotto a sezione variabile. Per le condizioni poste inizialmente l'equazione differenziale di bilancio energetico si scrive:

$$w dw + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad [2.13]$$

che si può anche mettere nella forma:

$$\frac{dw}{w} + \frac{1}{w^2} \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

ovvero per la [1.20] e la [1.23].

$$\frac{dw}{w} + \frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad [2.14]$$

inoltre differenziando l'equazione di continuità:

$$\rho w A = \text{cost.}$$

risulta:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} = 0 \quad [2.15]$$

quindi sostituendo nella [2.14] ed ordinando si ha:

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dw}{w} \quad [2.16]$$

quindi sostituendo nella [2.13] si ha:

$$\frac{dA}{A} = (1 - M^2) \frac{dp}{\rho w^2} \quad [2.17]$$

sostituendo ancora la [2.15] nella [2.14] si ottiene:

$$\frac{dA}{A} = \left( \frac{1}{M^2} - 1 \right) \frac{d\rho}{\rho} \quad [2.18]$$

Le [2.16], [2.17] e [2.18] sono le *equazioni di Hugoniot* le quali descrivono il moto di un fluido comprimibile qualsiasi lungo un condotto a sezione variabile, più precisamente attraverso le suddette equazioni è possibile risalire al comportamento totalmente opposto del fluido nei riguardi dei due regimi di deflusso.

Nel caso di deflusso subsonico le variazioni della sezione del condotto causerebbero la variazione delle grandezze fisiche nel modo seguente:

$$dA < 0 \quad \begin{cases} dw > 0 \\ dp < 0 \\ d\rho < 0 \end{cases} \quad dA > 0 \quad \begin{cases} dw < 0 \\ dp > 0 \\ d\rho > 0 \end{cases}$$

mentre in regime supersonico si avrebbe:

$$dA < 0 \quad \begin{cases} dw < 0 \\ dp > 0 \\ d\rho > 0 \end{cases} \quad dA > 0 \quad \begin{cases} dw > 0 \\ dp < 0 \\ d\rho < 0 \end{cases}$$

Da queste condizioni si vede che per poter incrementare la velocità del fluido, a spese di una diminuzione di pressione e densità, occorre un condotto convergente in regime subsonico ed un divergente in regime supersonico pertanto in un convergente non può essere realizzato il regime supersonico, al limite si raggiunge il regime sonico; un condotto che realizza questa condizione di moto viene denominato rappresenta ugello e può essere costituito da un solo convergente o da un convergente collegato ad un divergente, come è illustrato nella Figura 4a.

Per decelerare il fluido, con recupero di pressione e densità, occorre un convergente in regime supersonico ed un divergente in regime subsonico; un condotto che realizza questo deflusso rappresenta un diffusore, illustrato nella Figura 4b.

Si osserva quindi come la denominazione, ovvero la caratteristica del condotto, non dipende dalla forma geometrica bensì dal regime di moto della corrente.

Da queste considerazioni si può enunciare il *teorema di Hugoniot* secondo il quale nel moto isoentropico in un condotto a sezione variabile il passaggio da moto subsonico a supersonico, e viceversa, può avvenire solo in una sezione di area minima che viene chiamata *sezione di gola*.

Con riferimento al gas perfetto che fluisce in regime stazionario è possibile ricavare una relazione fra il numero di Mach e l'area della sezione trasversale del condotto; in tal caso si fa riferimento alla sezione di gola in corrispondenza della quale si è raggiunta la velocità del suono, ovvero la condizione  $M = 1$ , e che pertanto viene definita *sezione critica*  $A_c$ .

L'equazione di bilancio di massa tra la sezione suddetta ed una sezione generica consente di scrivere:

$$\rho w A = \rho_c w_c A_c$$

ovvero anche:

$$\frac{A}{A_c} = \left( \frac{\rho_c}{\rho} \right) \left( \frac{w_c}{w} \right) = \left( \frac{\rho_c}{\rho} \right) \frac{\sqrt{kRT_c}}{M \sqrt{kRT}} = \frac{1}{M} \left( \frac{\rho_c}{\rho} \right) \left( \frac{T_c}{T} \right)^{1/2}$$

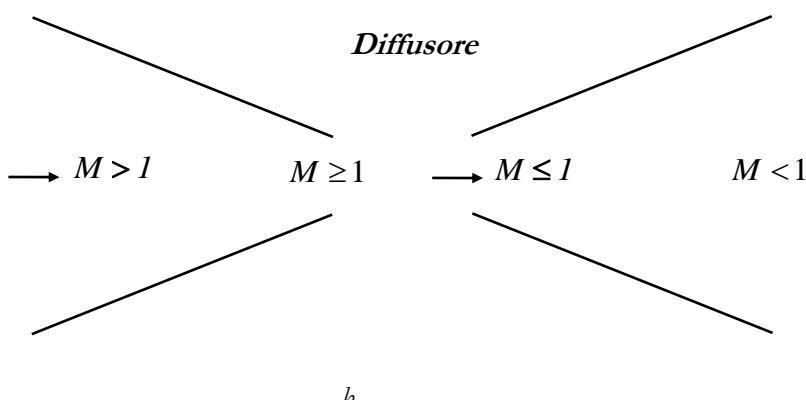
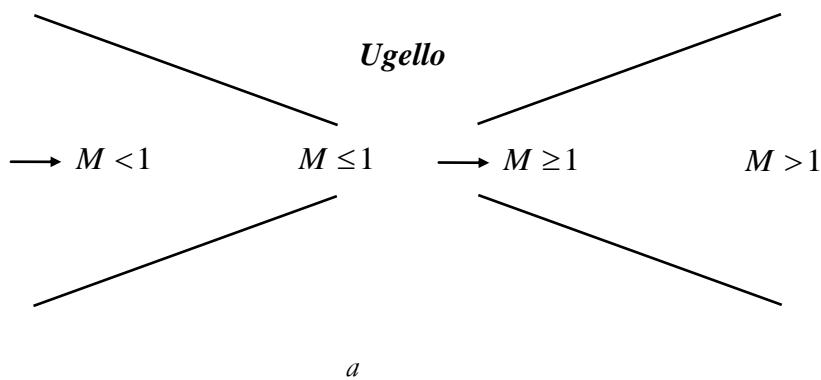


Figura 4

Tenuto conto della prima e terza delle [1.39] si ottiene:

$$\frac{A}{A_c} = \frac{1}{M} \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad [2.19]$$

questa funzione, rappresentata nella Figura , presenta un minimo per  $M = 1$  dove si ha  $A = A_c$ , per ogni altro valore del rapporto  $\frac{A}{A_c} > 1$  si hanno due valori del numero di Mach: uno per il regime subsonico  $\left( \frac{A}{A_c} \right)_{M < 1}$  ed uno di regime supersonico  $\left( \frac{A}{A_c} \right)_{M > 1}$  e quindi per aumentare il numero di Mach la sezione trasversale deve diminuire, nel senso del deflusso, a velocità subsoniche ed aumentare a velocità supersoniche; viceversa per diminuire il numero di Mach.

Tutto ciò è in accordo con quanto dedotto dalle equazioni di Hugoniot. I valori del rapporto  $\frac{A}{A_c}$  sono tabulati ed anche diagrammati per dato numero di Mach ma anche per un dato valore di  $k$  il quale, come si osserva ancora dal diagramma di Figura 5, influenza il suddetto rapporto solo per elevati valori del numero di Mach e più precisamente nel caso di regimi supersonici.

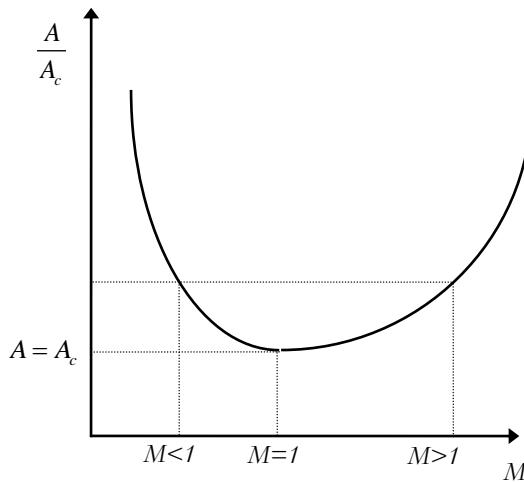


Figura 5

Nello studio del funzionamento degli ugelli e diffusori risulta conveniente esprimere il rapporto  $\frac{A}{A_c}$

in funzione del rapporto di pressione  $\frac{p}{p_0}$ , infatti facendo riferimento alle [2.10] e [2.12] dal loro rapporto risulta:

$$\frac{A}{A_c} = \sqrt{\frac{\frac{k-1}{2} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}}}} \quad [2.20]$$

dalla quale ad ogni valore del rapporto  $\frac{A}{A_c}$  corrispondono due soluzioni isoentropiche: una di moto subsonico  $\left(\frac{p}{p_0}\right)_{M<1}$  ed una di moto supersonico  $\left(\frac{p}{p_0}\right)_{M>1}$ ; per  $A = A_c$  si ha la soluzione  $\frac{p_c}{p_0}$ .

Si osserva che per dato condotto, ugello o diffusore, e a seconda del regime di moto, subsonico o supersonico, in cui si trova il fluido una delle due soluzioni suddette dovrà necessariamente essere scartata in quanto risulterebbe incompatibile con il comportamento caratteristico del condotto in esame, più in particolare si possono fare le seguenti considerazioni conclusive per ciascuno dei due condotti.

Nel caso di un ugello si può dire che se il fluido arriva alla sezione di gola con moto subsonico il deflusso nel divergente, per il teorema di Hugoniot, prosegue subsonicamente e questa è una condizione da non prendere in considerazione in quanto il condotto funzionerebbe come un tubo di Venturi, il fluido nella sezione di gola deve necessariamente arrivare con velocità sonica in tal caso nel divergente il moto o ritorna subsonico, soluzione da scartare, come può divenire supersonico che rappresenta la condizione che si vuole realizzare; questa situazione di moto è schematicamente illustrata nella Figura 6.

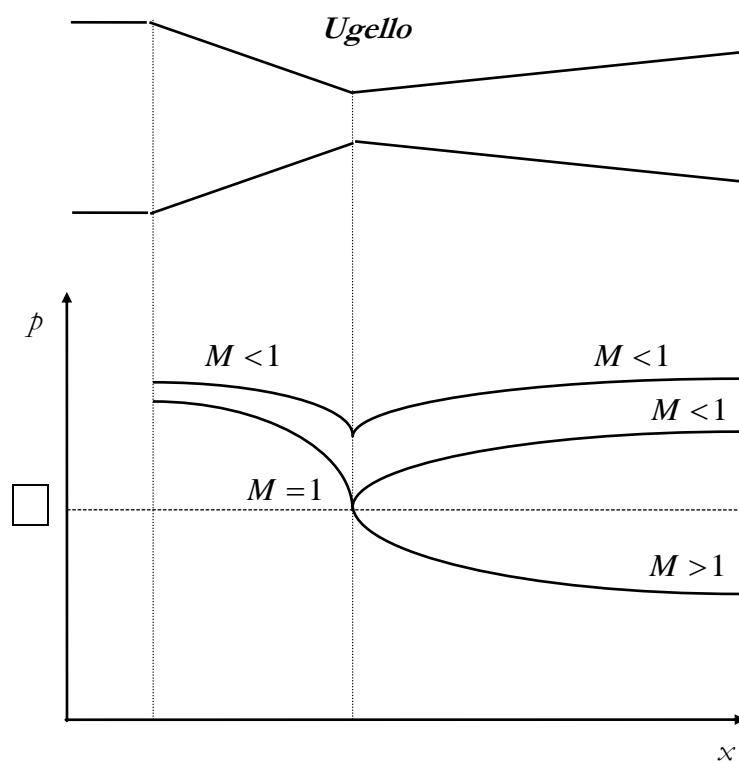


Figura 6

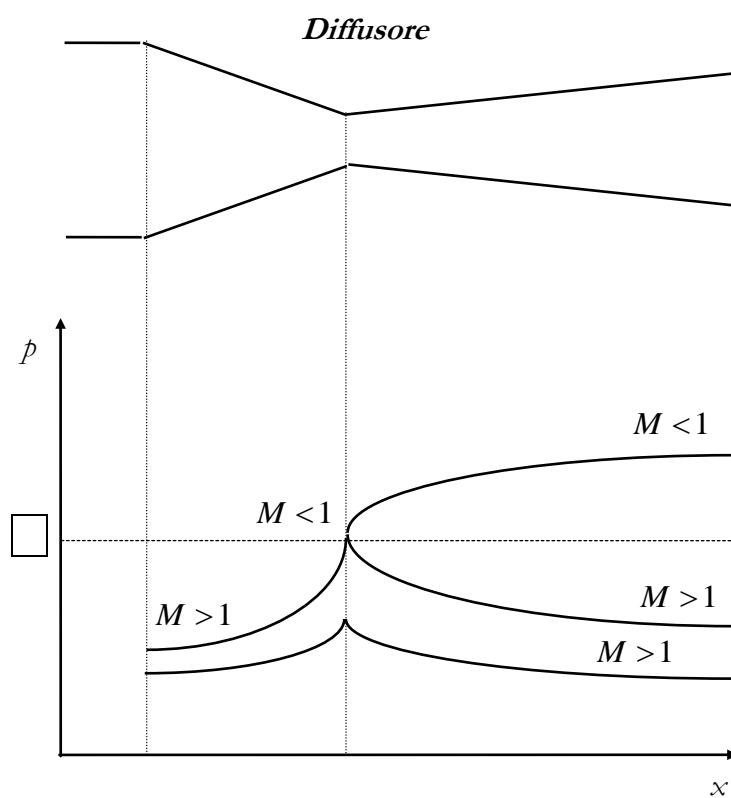


Figura 7

Opposto è il comportamento del diffusore in quanto se il fluido perviene alla sezione di gola con moto supersonico esso nel divergente procede supersonicamente, condizione da non prendere in considerazione, il fluido deve arrivare nella sezione di gola con velocità è sonica allora nel divergente il

moto può ritornare supersonico, soluzione da scartare, come può divenire subsonico e questa rappresenta la condizione che si vuole realizzare; la situazione di moto è illustrata nella Figura 7.

Una particolare equazione di Hugoniot si può ottenere partendo dall'equazione differenziale di bilancio energetico nella forma:

$$wdw + dh = 0$$

la quale per un gas perfetto diviene:

$$wdw + \frac{kR}{k-1} dT = 0$$

ovvero scrivendo in termini di variazioni relative:

$$\frac{dw}{w} + \frac{1}{k-1} \frac{kRT}{w^2} \frac{dT}{T} = 0$$

ed ordinando si ottiene:

$$\frac{dT}{T} = (1-k)M^2 \frac{dw}{w} \quad [2.21]$$

tale equazione, a differenza delle tre precedenti, vale per moto adiabatico con attrito ma il fluido deve essere un gas perfetto, essa mette in evidenza che nei fenomeni di efflusso la variazione di temperatura è sempre opposta in segno alla variazione di velocità e pertanto ad una diminuzione di velocità corrisponde un aumento di temperatura, il gas si comprime, così come ad un aumento di velocità consegue una diminuzione di temperatura, il gas si espande; si può quindi affermare che, in valore assoluto, ad una variazione di velocità segue una variazione di temperatura tanto più rapida quanto più è elevato il numero di Mach.

## 2.3. CONDIZIONE DI FUNZIONAMENTO DI UN UGELLO

Si è visto attraverso il teorema di Hugoniot come la trasformazione termodinamica che un fluido subisce nell'attraversare un ugello o un diffusore dipende, ovviamente per un dato fluido, solo dalla legge con cui la sezione del condotto varia lungo l'asse, tale teorema costituisce pertanto la base per potere effettuare una analisi qualitativa del comportamento di un ugello, o di un diffusore, di caratteristiche geometriche prefissate una volta assegnato lo stato termodinamico del fluido a monte e facendo variare la pressione a valle.

Questo studio viene qui condotto facendo riferimento al moto isoentropico di un gas perfetto che si espande in un ugello considerando separatamente i casi in cui esso è costituito da un solo convergente o da un convergente -divergente in quanto il funzionamento di quest'ultimo è leggermente più complesso del primo.

Analoghe considerazioni ma nel verso opposto, ovvero a diagrammi capovolti, si possono poi fare nel caso del diffusore.

### 1.1.1. UGELLO CONVERGENTE

Nella Figura 8 è rappresentato un ugello convergente dove il gas a partire da uno stato termodinamico di ristagno a monte fluisce in un ambiente la cui pressione  $p_s$  viene fatta decrescere con continuità a partire dal valore  $p_0$ . Il funzionamento di questo condotto è caratterizzato da quattro situazioni fondamentali:

- a) Se  $p_s = p_0$  non si ha deflusso in quanto non si realizza alcun gradiente di pressione in seno al fluido ed è quindi nulla la portata di massa; l'andamento della pressione segue ovviamente la linea orizzontale del diagramma di *fig. 2.7*.
- b) Se  $p_c < p_s < p_0$  si viene ad avere un gradiente di pressione in seno al gas ed essendo il moto subsonico si ha anche  $p_s = p_2$  e quindi la velocità nella sezione di uscita vale:

$$w_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_s}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

mentre la portata di massa specifica è:

$$\frac{\dot{m}}{A_2} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{p_s}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_s}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}$$

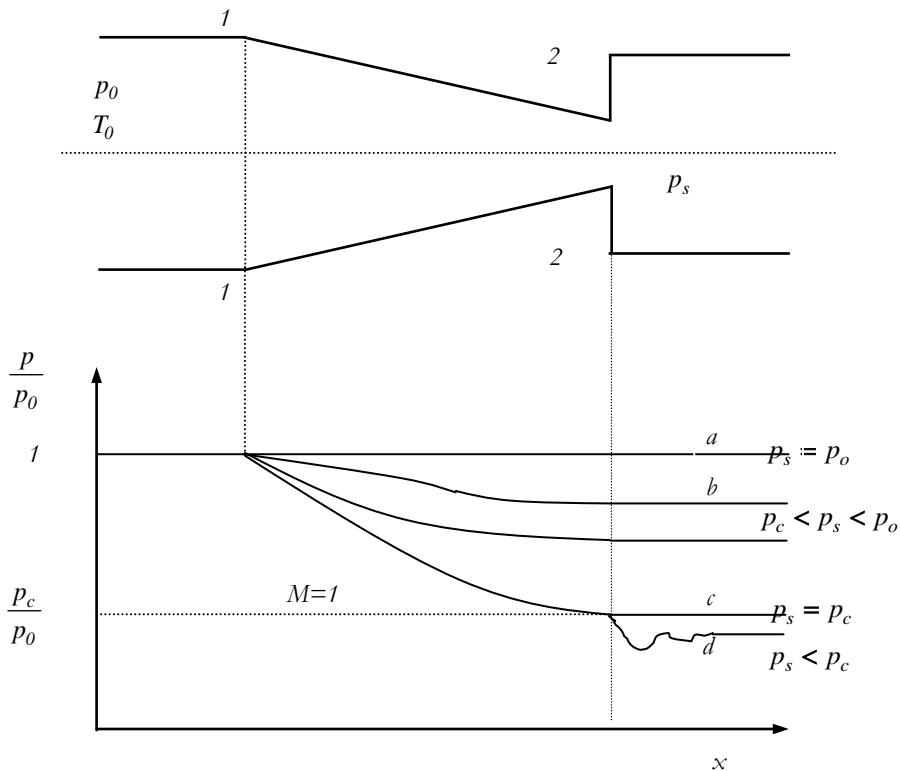


Figura 8

un ulteriore abbassamento di pressione ma sempre compreso nell'intervallo sudetto del diagramma, non farebbe altro che aumentare la velocità e la portata ma il regime di moto nella sezione di uscita rimane subsonico.

- c) Se  $p_s = p_c$  il regime di moto nella sezione di uscita è sonico:

$$w_2 = w_c = \sqrt{k R T_c}$$

pertanto la portata di massa raggiunge il valore massimo:

$$\left( \frac{\dot{m}}{A_2} \right)_{\max} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

- d) Se  $p_s < p_c$  il gradiente di pressione nel convergente rimane come nella curva c così come rimangono inalterate velocità e portata nella sezione di uscita ma il fluido all'uscita del condotto subisce delle onde di espansione e solo più a valle si adeguia alla pressione  $p_s$  dell'ambiente.

L'assenza di un divergente a valle di  $A_2$  impedisce pertanto al fluido di raggiungere il regime supersonico e ciò è in perfetto accordo con il teorema di Hugoniot.

### 1.1.2. UGELLO CONVERGENTE - DIVERGENTE

Si è detto che il funzionamento di questo condotto è un po' più complesso del precedente se non altro nel divergente visto che dovendosi qui realizzare il regime supersonico è possibile la formazione di onde d'urto anche se questo fenomeno non verrà qui preso in considerazione.

Partendo da una pressione a valle uguale a quella a monte, condizione corrispondente al valore di portata nulla, la pressione di scarico  $p_s$  viene al solito ridotta con continuità dal valore di ristagno  $p_{01}$  a valori via via decrescenti e per ogni valore di  $p_s$  si calcola un valore di pressione  $p_g$  in corrispondenza della sezione di gola.

Finché risulta  $p_g > p_c$  la velocità del fluido in tale sezione è subsonica e pertanto il moto risulta subsonico anche nel divergente sicché il condotto si comporta come un tubo di Venturi.

Allorquando si ha  $p_g = p_c$  la sezione di gola diviene critica e la portata del fluido diviene massima a questo punto il moto nel tratto convergente è completamente definito mentre il moto nel divergente dipende dalle condizioni imposte a valle.

Si è visto che in questa situazione le soluzioni nel divergente possono essere due in tal caso la (2.20) deve però essere scritta:

$$\frac{A}{A_c} = \sqrt{\frac{\frac{k-1}{2} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}{\left(\frac{p}{p_{01}}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_{01}}\right)^{\frac{k+1}{k}}}}$$

da questa equazione si possono ricavare i due valori di pressione  $p'_2 = (p_2)_{M<1}$  e  $p''_2 = (p_2)_{M>1}$  nella sezione di uscita del divergente.

Per cui si può trarre una prima conclusione:

- a) per  $p'_2 \leq p_s < p_{01}$  il moto del fluido nel divergente risulta subsonico isoentropico, che rappresenta la soluzione da scartare;
- b) per  $p_s = p''_2$  si ottiene nel divergente il moto supersonico isoentropico, che sarebbe la soluzione ottimale.

Resta adesso da chiarire che cosa accade al fluido quando si verifica  $p''_2 < p_s < p'_2$  ed ancora quando si ha  $p_s < p''_2$ .

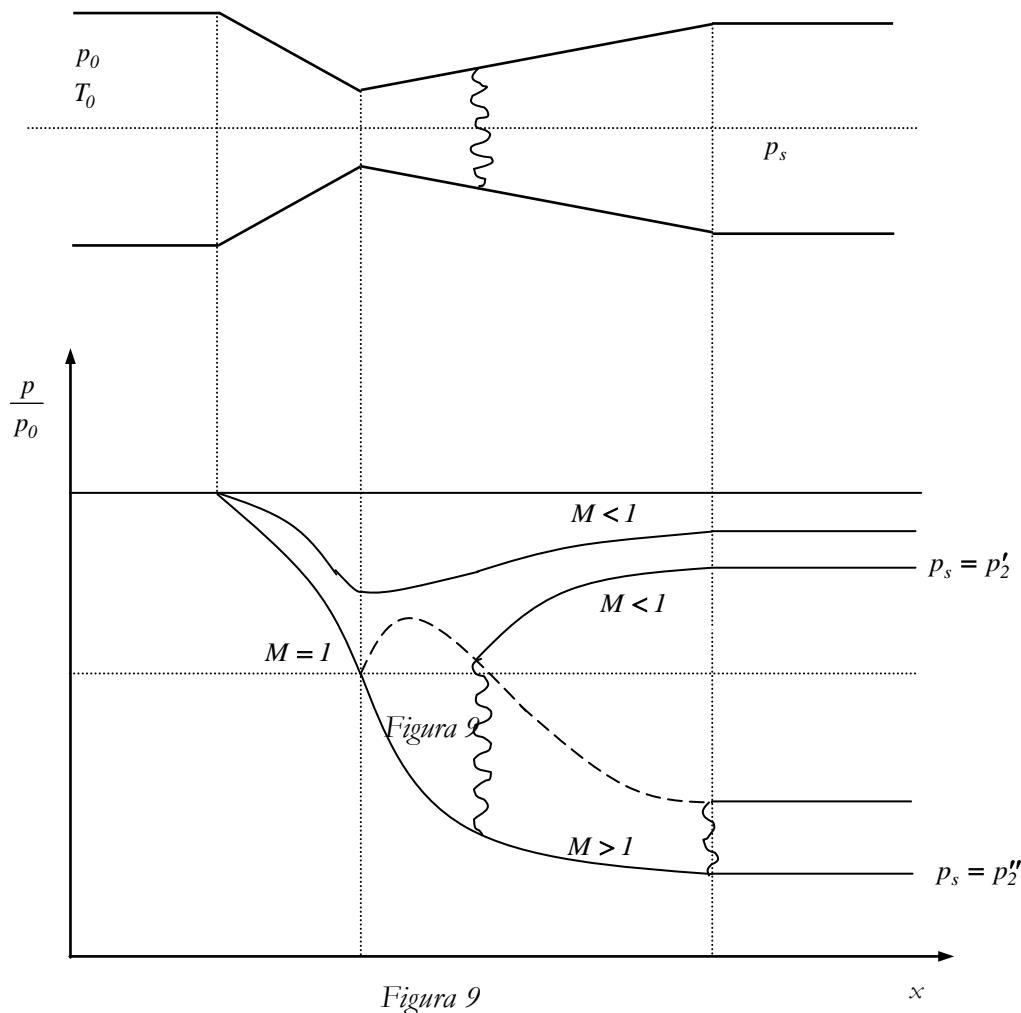
Si è detto che se il moto è supersonico è necessario prevenire la formazione di onde d'urto le quali possono aver luogo all'interno del divergente ed anche nell'ambiente dove il fluido avrà lo sbocco.

A causa della formazione di un'onda d'urto la pressione di ristagno diminuisce bruscamente dal valore a monte  $p_{01}$ , dove si ha  $M > 1$ , a quello a valle  $p_{02}$ , dove si verifica  $M < 1$ .

Se il fronte d'onda può formarsi in una sezione qualsiasi del divergente si supponga che questo avvenga nella sezione di uscita e pertanto, senza peraltro entrare nei dettagli di questo argomento, si dimostra che:

$$\frac{p''_2^*}{p'_2^*} = \frac{2k}{k+1} M'_2 - \frac{k-1}{k+1}$$

nella quale  $p'_2^*$  è la pressione che si ha nella sezione 2 prima della formazione dell'onda mentre  $p''_2^*$  è la pressione immediatamente a valle del fronte d'onda,  $M'_2 > 1$  è il numero di Mach a monte del fronte d'onda, non viene considerato quello a valle  $M''_2 < 1$ .



Calcolata la pressione a valle dell'onda d'urto con l'equazione suddetta si possono fare le seguenti considerazioni:

- *c)* per  $p''_2 < p_s < p'_2$  il moto non è isoentropico con formazione di un'onda d'urto in una sezione interna al divergente;
- per  $p_s = p''_2$  il moto è isoentropico nel divergente con formazione di un'onda d'urto in corrispondenza della sezione di uscita;
- *e)* per  $p'_2 < p_s < p''_2$  il moto è isoentropico nel divergente ma con formazione di onde d'urto esterne di compressione, ovvero il fluido è sopraespanso;
- *f)* per  $p_s < p'_2$  il moto è isoentropico nel divergente ma con formazione di onde d'urto esterne di espansione, ovvero il fluido è sottoespanso.

La curva discreta tracciata nel divergente rappresenta il luogo dei punti in corrispondenza dei quali si manifesta un'onda d'urto normale, tutti i punti di tale curva rappresentano pressioni a valle del fronte d'onda.

### 1.1.3. OSSERVAZIONI

In tutto ciò che si è detto, anche sull'ugello convergente, si osserva che non è stata presa in considerazione la lunghezza del condotto pertanto l'ugello potrebbe teoricamente avere qualunque lunghezza, è evidente che se il condotto è molto breve la diminuzione di pressione avviene con forti gradienti nella direzione assiale mentre se esso è lungo si avrebbero gradienti di pressione minori; nella realtà questa lunghezza viene fissata da diversi criteri di carattere costruttivo.

Per lo stato termodinamico a monte è stato convenientemente scelto quello di ristagno al quale, come già detto, si può sempre risalire da uno stato locale noto in quanto una velocità nulla all'inizio dell'espansione significherebbe considerare infinita l'area della sezione, si può però in pratica tendere a questa condizione costruendo le pareti dell'ugello tangentì alle pareti del serbatoio di monte, come è illustrato nella Figura 10, cosicché la velocità risulta piccola e quindi trascurabile e non è necessario poi che la parte convergente dell'ugello abbia un profilo particolare, qualunque forma è accettabile purché l'area decresca gradualmente fino alla sezione di gola; il tronco convergente può avere una lunghezza abbastanza breve e questo significa che le perdite per attrito fra fluido e parete sono considerate quasi nulle.

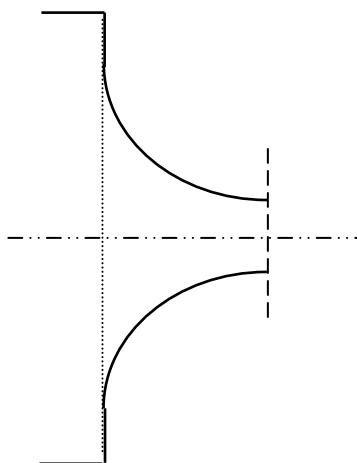


Figura 10

Molto più delicato è invece il divergente il quale deve essere realizzato più accuratamente in quanto qui il fluido ha superato la barriera del suono, inoltre allorquando il fluido esce dall'ugello le pareti del divergente devono avere curvatura molto graduale fino a divenire parallele in corrispondenza della sezione di uscita. Inoltre se per ridurre gli attriti occorre che il tratto divergente sia breve l'angolo di divergenza non può essere troppo grande altrimenti si avrebbe il distacco della vena fluida dalle pareti con formazione di vortici e conseguenti fenomeni dissipativi.

Nella maggior parte dei casi pratici il profilo di un ugello ha forma tronco-conica con angolo convergente fino a circa  $45^\circ$  mentre l'angolo di apertura nel divergente è in genere compreso tra i  $7^\circ$  e i  $10^\circ$ . Da queste considerazioni si può dire che per un *ugello convergente - divergente* le dimensioni fondamentali, cioè quelle da calcolare, si riducono alle aree della sezione di gola ed alla sezione di uscita mentre se l'ugello è costituito da un solo convergente il calcolo riguarda solo l'area della sezione di uscita.

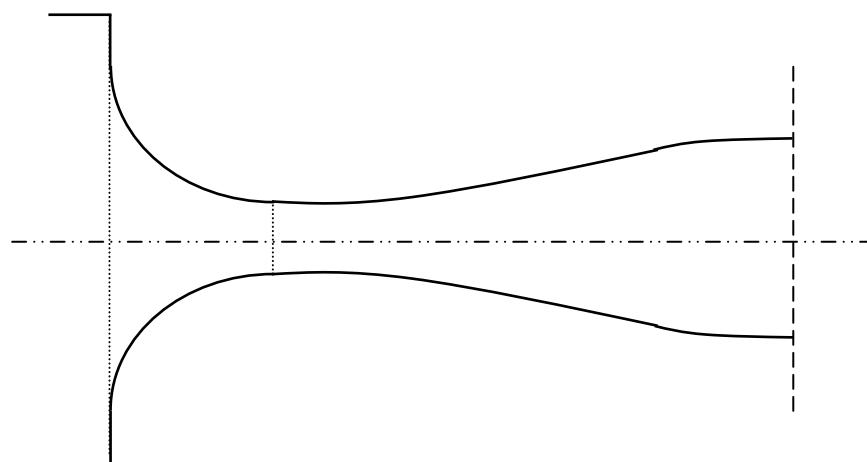


Figura 11

## 2.4. MOTO ADIABATICO CON ATTRITO

Il deflusso isoentropico ha una notevole importanza teorica in quanto costituisce un riferimento limite mentre il moto adiabatico irreversibile riveste grande importanza pratica in quanto qualunque movimento fluido lungo un condotto di qualsivoglia geometria è sempre accompagnato da perdite di energia anche in condotti corti e ben profilati come lo sono gli ugelli e i diffusori, principale responsabile di tali perdite è l'attrito dovuto prevalentemente alla viscosità del fluido ed alla rugosità delle pareti nonché, con riferimento ai fluidi che qui vengono trattati, all'effetto della comprimibilità.

Gli effetti dovuti alla viscosità del fluido si manifestano in due modi:

- - formazione di uno strato limite in una zona a ridosso delle pareti per cui anche supponendo isoentropico il deflusso i valori delle aree introdurre nelle espressioni della portata no sarebbero più quelli geometrici;
- - per effetto dell'attrito in seno al fluido e tra fluido e parete si avrà nel caso di un ugello una riduzione della velocità di efflusso e di portata rispetto ai corrispondenti valori isoentropici, nel caso di un diffusore una parte della variazione di energia cinetica verrà convertita in calore di conseguenza a parità di variazione di entalpia e di energia cinetica l'aumento di pressione risulterà minore di quello che si avrebbe nella corrispondente compressione isoentropica.

Si consideri il deflusso di un fluido in un ugello dove a causa delle perdite per attrito l'entropia cresce nella direzione del moto, inoltre tenuto conto che durante il deflusso, con o senza attrito, il fluido si espande sino alla pressione  $p_2$  all'uscita dell'ugello il punto 2r corrispondente allo stato termodinamico reale si troverà sulla stessa isobara ma più a destra del punto 2 e poiché le isobare nel diagramma  $b-s$  hanno pendenza positiva si ha che  $h_{2r} > h_2$  e pertanto durante il deflusso si ha sempre  $h_1 - h_{2r} < h_1 - h_2$  conseguentemente la velocità del gas  $w_{irr}$  all'uscita dall'ugello sarà sempre inferiore di quella isoentropica.

Si scriva l'equazione di bilancio energetico tra uno stato locale generico ed uno stato locale noto la quale se il moto è isoentropico allora si scrive:

$$\frac{w^2 - w_1^2}{2} + (h - h_1) = 0$$

mentre per il moto adiabatico si ha:

$$\frac{w_{irr}^2 - w_1^2}{2} + (h_{irr} - h_1) = 0$$

il rendimento isoentropico dell'ugello è dato dall'espressione:

$$\eta_{ie} = \frac{h_1 - h_{irr}}{h_1 - h} = \frac{\frac{w_{irr}^2 - w_1^2}{2}}{\frac{w^2 - w_1^2}{2}}$$

ovvero se la velocità iniziale si ritiene trascurabile, per quanto è stato fatto osservare in precedenza, si può ancora scrivere:

$$\eta_{ie} = \frac{\frac{w_{irr}^2}{2}}{\frac{w^2}{2}} \quad [2.22]$$

in tal caso il rendimento isoentropico di un ugello è dato dal rapporto tra l'energia cinetica adiabatica e quella isoentropica nella sezione di uscita, pertanto risulta:

$$w_{irr} = w \sqrt{\eta_{ie}}$$

che si può anche scrivere come:

$$w_{irr} = k_w w \quad [2.23]$$

sicché la velocità adiabatica  $w_{irr}$  si ottiene da quella isoentropica, fornita dalla [2.4], moltiplicando questa per il fattore  $k_w = \sqrt{\eta_e}$  che viene denominato *coefficiente di velocità*, è un coefficiente di riduzione sperimentale che, nella maggior parte dei casi, è poco discosto dall'unità e dipende dalla forma e dalla rugosità delle pareti.

Nel caso di ugelli convergenti  $k_w$  ha un'influenza trascurabile sulla velocità in quanto assume valori compresi fra  $0,97 \div 0,99$  ed il moto si considera abbondantemente isoentropico; nel caso di ugelli convergenti - divergenti i valori di  $k_w$  sono compresi fra  $0,94 \div 0,96$  e ciò perché il condotto è più lungo e sia perché nella parte divergente si realizzano velocità più elevate.

La perdita di energia per attrito può essere espressa come la differenza tra l'energia cinetica isoentropica nella sezione di uscita dell'ugello e quella adiabatica irreversibile in corrispondenza della stessa sezione, ossia:

$$\Delta E_{attr} = \frac{w^2 - w_{irr}^2}{2} \quad [2.24]$$

che attraverso la [2.22] diviene:

$$\Delta E_{attr} = (1 - \eta_e) \frac{w^2}{2} = \zeta \frac{w^2}{2} \quad [2.25]$$

nella quale il termine  $\zeta$  viene chiamato *coefficiente di perdita di energia*.

Se 1 e 2 sono gli stati termodinamici in cui si trova il fluido, rispettivamente, all'ingresso e all'uscita dell'ugello la differenza tra la velocità isoentropica in uscita:

$$w_2 = \sqrt{2 (h_1 - h_2)}$$

e quella adiabatica nella medesima sezione:

$$w_{2irr} = \sqrt{2 (h_1 - h_{2irr})}$$

la perdita di energia può essere scritta:

$$\Delta E_{attr} = h_{2irr} - h_2 \quad [2.26]$$

ed è dunque espressa come differenza tra l'entalpia adiabatica e quella isoentropica nella sezione di uscita dell'ugello. Inoltre tenuto conto della [2.25] ed utilizzando la velocità isoentropica la suddetta relazione assume la forma:

$$\Delta E_{attr} = \zeta (h_1 - h_2) \quad [2.27]$$

e quindi eguagliando i secondi membri di queste espressioni si può determinare il valore dell'entalpia adiabatica nella sezione di uscita:

$$h_{2irr} = h_2 + \zeta (h_1 - h_2) \quad [2.28]$$

Nel diagramma di Figura 12 è rappresentato il deflusso adiabatico dell'ugello, si osserva che l'area sotto la curva  $1-2_{irr}$  rappresenta il lavoro necessario per vincere le forze d'attrito che si trasforma irreversibilmente in calore assorbito dal fluido sicché la temperatura del gas nella sezione di uscita dell'ugello è maggiore di quella isoentropica; d'altra lungo l'adiabatica  $1-2_{irr}$  risulta:

$$q_{attr} = \int_{s_1}^{s_{2irr}} T \, ds$$

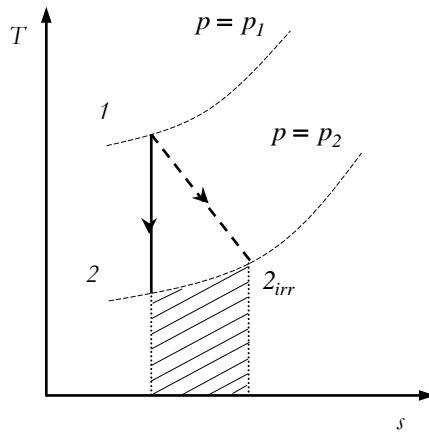


Figura 12

si osserva dal diagramma  $T-s$  che l'area sottesa dalla curva isobarica  $2-2_{irr}$  rappresenta la perdita di energia cinetica per attrito  $\Delta E_{attr}$ ; infatti tenuto conto che per lungo un'isobara reversibile si ha:

$$Tds = dh$$

allora integrando tra i punti  $2$  e  $2_{irr}$  risulta:

$$\int_{T_2}^{T_{2_{irr}}} T \, ds = h_{2_{irr}} - h_2 \quad [2.29]$$

nella quale il primo membro rappresenta proprio l'area della curva tratteggiata sopramenzionata, dal confronto con l'area sottesa dalla curva  $1-2_{irr}$  si osserva che la perdita di energia cinetica per attrito  $\Delta E_{attr}$  rappresenta solo una parte del calore di attrito la rimanente parte, non tratteggiata, viene assorbita dal fluido e si trasforma di nuovo in lavoro meccanico.

Pertanto vale sempre la diseguaglianza:

$$h_{2_{irr}} - h_2 < q_{attr} \quad [2.30]$$

ne consegue che la forma della curva  $1-2_{irr}$ , esprimente “convenzionalmente” un adiabatica irreversibile, non ha alcuna importanza per l'analisi del deflusso con attrito.

Nel caso un deflusso adiabatico con attrito essendo  $q_{est} = 0$  risulta:

$$dh = vdp + dq_{attr}$$

quindi integrando:

$$h_{2_{irr}} - h_1 = \int_{p_1}^{p_2} vdp + q_{attr} \quad [2.31]$$

D'altra parte tenuto conto che per un processo isoentropico si ha:

$$h_2 - h_1 = \int_{p_1}^{p_2} vdp$$

si può affermare che i due integrali delle equazioni suddette non sono affatto identici, infatti sottraendo membro a membro si può scrivere più precisamente:

$$h_{2_{irr}} - h_2 = \left( \int_{p_1}^{p_2} vdp \right)_{attr} - \left( \int_{p_1}^{p_2} vdp \right)_{rev} + q_{attr} \quad [2.32]$$

e quindi attraverso la (2.30) dalla suddetta espressione si deduce che:

$$\left( \int_{p_1}^{p_2} vdp \right)_{attr} > \left( \int_{p_1}^{p_2} vdp \right)_{rev}$$

pertanto il lavoro utilizzabile in un moto adiabatico con attrito è sempre maggiore di quello corrispondente al deflusso isoentropico.

Tenuto conto della (2.26) la (2.32) assume la forma:

$$\left( \int_{p_1}^{p_2} vdp \right)_{attr} - \left( \int_{p_1}^{p_2} vdp \right)_{rev} = q_{attr} - \Delta E_{attr} \quad [2.33]$$

espressione che rispecchia quanto detto in precedenza.

### 3. MOTO ADIABATICO NEI CONDOTTI CILINDRICI

#### 3.1. L'ATTRITO NEI FLUIDI COMPRIMIBILI. TEOREMA DI FANNO

L'analisi dimensionale dimostra che nel caso di regimi di moto completamente sviluppati il fattore d'attrito  $\xi$  dipende in generale dal numero di Reynolds, dal numero di Mach e dall'eventuale scabrezza relativa, nel caso di condotti con parete a comportamento non liscio; l'esperienza però conferma che per regimi subsonici, o al limite sonici, la dipendenza del fattore di attrito è trascurabile nei riguardi del numero di Mach di conseguenza per la determinazione del fattore stesso possono essere utilizzate con buona approssimazione le stesse correlazioni che riguardano il moto dei fluidi incomprimibili.

Diversamente accade nel regime supersonico dove il fattore d'attrito dipende da altri parametri, oltre a quelli sopra citati, e ciò trova spiegazione nel fatto che in tale regime non si può avere un moto completamente sviluppato in quanto la condizione  $M > 1$  può essere mantenuta per una lunghezza di condotto molto limitata oltre la quale vengono a manifestarsi i fenomeni d'urto, come verrà illustrato poco più avanti. In tale circostanza lo spazio attraversato dal fluido rappresenta per intero una "regione di ingresso" nella quale il fattore d'attrito risulta variabile sezione per sezione in quanto dipende dal numero di Mach, dal numero di Reynolds locale  $Re(x)$ , dallo spessore iniziale dello strato limite nonché dal grado di turbolenza iniziale; conseguentemente verrebbe anche a cedere l'ipotesi di monodimensionalità del moto sicché le equazioni di bilancio precedentemente scritte non sarebbero più valide. Il fattore di attrito che viene utilizzato nel deflusso supersonico viene definito come un *fattore medio apparente* che continua a soddisfare ancora le equazioni di bilancio nel deflusso monodimensionale ma molto difficilmente può essere determinato con considerazioni teoriche.

Sperimentalmente si è visto che i fattori d'attrito che si incontrano nel regime supersonico risultano normalmente più bassi di quelli che si manifestano nel moto dei fluidi incomprimibili, in particolare nel caso di condotti a sezione circolare con pareti a comportamento liscio con riferimento ai campi di variazione:

$$\begin{aligned} 10 \text{ } d &< l < 50 \text{ } d \\ 2,5 \cdot 10^4 &< Re < 7 \cdot 10^5 \\ 1,2 &< M < 3 \end{aligned}$$

è stato riscontrato che il fattore di attrito medio è compreso tra i valori:

$$0,008 < \xi < 0,012$$

ovvero si ottengono valori di  $\xi$  praticamente dimezzati rispetto a quelli ottenuti nel moto dei fluidi incomprimibili.

Potendo allora esprimere gli effetti dell'attrito in termini di proprietà medie del fluido nella sezione considerata e secondo quanto già detto al §1.1 sull'ipotesi di monodimensionalità del moto si faccia riferimento all'equazione di bilancio di energia meccanica nella forma differenziale la quale trascurando l'energia potenziale del campo gravitazionale, in questo caso del tutto ininfluente, e senza scambi di lavoro con l'esterno si scrive:

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + \frac{\xi}{2d} w^2 dx = 0$$

che può essere messa nella forma:

$$\frac{dw}{w} + \frac{dp}{\rho w^2} + \frac{\xi}{2d} dx = 0 \quad [3.1]$$

tale equazione nel caso di gas perfetto ed in funzione del numero di Mach si può ancora scrivere:

$$\frac{dw}{w} + \frac{I}{kM^2} \frac{dp}{p} + \frac{\xi}{2d} dx = 0 \quad [3.2]$$

L'equazione differenziale di bilancio di massa per il caso in esame ha espressione:

$$\frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad [3.3]$$

Inoltre differenziando l'equazione di stato dei gas perfetti risulta:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad [3.4]$$

di conseguenza la [3.3] diviene:

$$\frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} + \frac{dw}{w} = 0 \quad [3.5]$$

Inoltre dall'espressione differenziata del numero di Mach:

$$\frac{dM}{M} = \frac{dw}{w} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$$

combinata con la [2.21] si ottiene la variazione relativa della velocità:

$$\frac{dw}{w} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad [3.6]$$

mentre dalla [3.5] ed ancora attraverso la [2.21] risulta:

$$\frac{dp}{p} = - \left[ 1 + (k-1)M^2 \right] \frac{dw}{w}$$

e quindi per la [3.6] si ottiene:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{1 + (k-1)M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad [3.7]$$

Sostituendo le [3.6] e [3.7] nella [3.2] si scrive:

$$\left[ \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} - \frac{1 + (k-1)M^2}{kM^2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} \right] \frac{dM}{M} + \frac{\xi}{2d} dx = 0$$

la quale, sommando dentro parentesi, assume la forma:

$$\frac{\xi}{2d} dx = \frac{1 - M^2}{kM^3 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} dM \quad [3.8]$$

Si faccia adesso riferimento all'equazione:

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho}$$

che combinata con la [1.24] scritta in forma differenziale:

$$wdw + dh = 0$$

diviene:

$$\rho Tds = -\rho wdw - dp$$

Ricavando la variazione relativa di pressione dalla (3.1) risulta:

$$dp = -\rho w dw - \frac{\xi}{2d} \rho w^2 dx$$

e sostituendo nella precedente si ha:

$$ds = \frac{w^2}{T} \frac{\xi}{2d} dx$$

ovvero in funzione del numero di Mach:

$$ds = kRM^2 \frac{\xi}{2d} dx$$

e tenuto conto della [3.8] si perviene all'espressione differenziale della variazione di entropia in funzione del solo numero di Mach:

$$ds = \frac{R(1-M^2)}{M \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} dM \quad [3.9]$$

da essa risulta che:

$$\left( \frac{\partial s}{\partial M} \right)_{M=1} = 0$$

inoltre, come è semplice verificare, risultando anche:

$$\left( \frac{\partial^2 s}{\partial M^2} \right)_{M=1} < 0$$

si deduce che lo stato di massima entropia si ha in corrispondenza del regime sonico. Integrando la [3.9] si ottiene:

$$s = R \left[ \ln M - \frac{k+1}{2(k-1)} \ln \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right] + C \quad [3.10]$$

la quale assieme alla [1.28] consente di tracciare nel piano  $T, s$  le curve del deflusso adiabatico, dette *linee di Fanno*, più precisamente fissata una temperatura di ristagno  $T_0$  si ottiene un fascio di curve ognuna delle quali è valevole per un dato numero di Mach e ciascuna di esse ha un limite, stato di massima entropia, in corrispondenza di  $M = 1$ ; ricavando dalla [1.28] il numero di Mach e sostituendo nella [3.10] si ottiene l'equazione di una curva per quel dato numero di Mach, ossia:

$$s = \frac{R}{2} \left[ \ln \frac{2}{k-1} \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right) - \frac{k+1}{k-1} \ln \frac{T_0}{T} \right] + C \quad [3.11]$$

inoltre essendo:

$$w = \sqrt{2c_p(T_0 - T)} \quad [3.12]$$

si deduce che le linee a temperatura costante sono anche linee a velocità costante conseguentemente gli stati appartenenti al ramo superiore di ogni curva corrispondono a velocità subsoniche mentre gli stati corrispondenti al ramo inferiore delle curve suddette corrispondono a velocità supersoniche, Figura 13.

Il verso di evoluzione del deflusso è quello indicato dalle frecce in quanto la presenza dell'attrito non può che causare un aumento di entropia e pertanto se il moto è inizialmente subsonico l'aumento di entropia porta ad aumento della velocità, ovvero del numero di Mach, mentre se il moto è inizialmente supersonico si ha una diminuzione di velocità sicché in entrambi i casi la velocità del fluido tende al regime sonico.

Da queste considerazioni si può adesso enunciare il teorema fondamentale di Fanno, ovvero: *nel deflusso adiabatico non isoentropico in un condotto cilindrico un moto subsonico non può mai divenire supersonico ed un moto supersonico, in assenza di onde d'urto, non può mai divenire subsonico, lo stato limite comune è il regime sonico.*

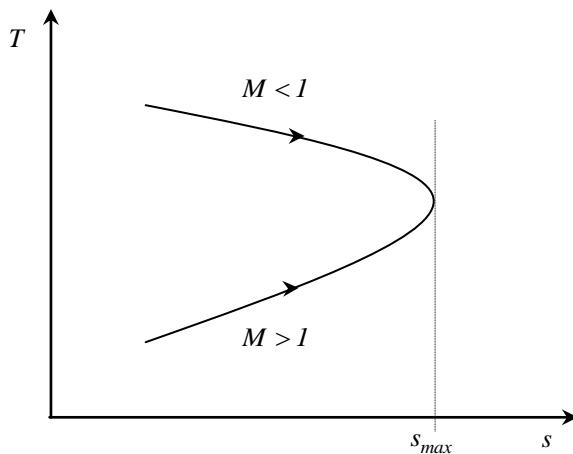


Figura 13

### 3.2. PARAMETRO LIMITE E GRADIENTE DI PRESSIONE

Da quanto finora visto si può dire che facendo riferimento ad uno stato termodinamico in una certa sezione del condotto in corrispondenza della quale il numero di Mach è  $M$  esiste una lunghezza massima, valutata a partire dalla sezione medesima, alla fine della quale si ha  $M = 1$ .

Tale lunghezza si può ottenere integrando la [3.8], ossia:

$$\int_0^{l_{max}} \frac{\xi}{d} dx = \int_M^1 \frac{2(1-M^2)}{kM^3 \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)} dM$$

che fornisce l'espressione:

$$\frac{\xi l_{max}}{d} = \frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{\frac{k+1}{2}M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \quad [3.13]$$

la variabile adimensionale a primo membro prende il nome di *parametro limite di attrito* e come si può osservare essa è funzione del solo numero di Mach; pertanto dato il diametro del condotto ed il numero di Mach in una sezione nota il parametro di attrito consente di determinare la lunghezza  $l$  residua che si può assegnare al condotto affinché il moto avvenga adiabaticamente senza che si verifichino fenomeni d'urto, al limite per  $l = l_{max}$  il numero di Mach allo sbocco assume valore unitario.

Tale lunghezza è molto limitata infatti osservando la (3.13) per una velocità che al limite è infinitamente grande si può scrivere:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{\xi l_{max}}{d} \right) = \frac{1}{k} \left( \frac{k+1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1} - 1 \right)$$

e quindi per  $k = 1,4$  ed un valore medio del fattore di attrito di 0,01 la lunghezza in corrispondenza della quale si raggiunge il regime sonico vale:

$$l_{max} \approx 82d$$

La lunghezza tra due sezioni del condotto, Figura 14, in corrispondenza delle quali i numeri di Mach sono, rispettivamente,  $M_1$  e  $M_2$  si può ottenere calcolando dapprima le lunghezze limiti  $(l_{max})_{M_1}$  e  $(l_{max})_{M_2}$  attraverso la [3.13] e poi dall'espressione:

$$l_{12} = (l_{max})_{M_1} - (l_{max})_{M_2} \quad [3.14]$$

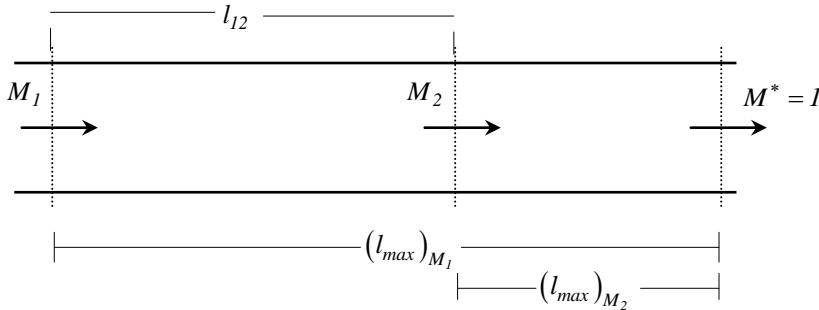


Figura 14

viceversa dato il numero di Mach  $M_1$  la [3.14] consente di determinare il numero di Mach incognito allo sbocco.

Sostituendo la [2.21] nella [3.5] si ricava la variazione relativa di velocità:

$$\frac{dw}{w} = \left[ \frac{1}{(1-k)M^2 - 1} \right] \frac{dp}{p}$$

e quindi tenuto conto che:

$$\frac{\rho w^2}{p} = kM^2 \quad [3.15]$$

la (3.1) si scrive:

$$\left[ \frac{kM^2}{(1-k)M^2 - 1} - 1 \right] \frac{dp}{dx} + \frac{\xi}{2d} \rho w^2 = 0$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{dp}{dx} = \left[ \frac{1+(k-1)M^2}{M^2 - 1} \right] \frac{\xi}{2d} \rho w^2 \quad [3.16]$$

e pertanto risulta:

$$\frac{dp}{dx} < 0 \quad M < 1$$

$$\frac{dp}{dx} > 0 \quad M > 1$$

sicché si ha una perdita di pressione nel regime subsonico. Si osserva inoltre che per  $M \approx 1$  dalla [3.16] si ottiene:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\xi}{2d} \rho w^2$$

ovvero il gradiente di pressione che si manifesta nei fluidi incomprimibili.

### 3.3. STATO TERMODINAMICO DI RIFERIMENTO

Anche per il deflusso adiabatico nei condotti cilindrici viene considerato come stato di riferimento quello corrispondente alla condizione  $M = 1$ , dove si è visto che il fluido raggiunge la massima entropia, ma a differenza dello stato critico isoentropico la condizione suddetta viene raggiunta in modo irreversibile e pertanto delle equazioni scritte il precedenza restano valide solo la [1.28] e la [1.36], ovvero la prima delle [1.39], quest'ultima viene in tal caso considerata come quella temperatura caratteristica dello *stato critico adiabatico*.

Se si considera un processo adiabatico che parte da uno stato locale ( $p, T, \rho, w$ ) fino a raggiungere lo stato di massima entropia ( $p_c, T_c, \rho_c, w_c$ ) l'equazione di continuità si scrive:

$$\rho w = \rho_c w_c$$

ossia anche:

$$\rho_c = \frac{\rho w}{w_c} = \frac{\rho M \sqrt{kRT}}{\sqrt{kRT_c}} = \rho M \left( \frac{T}{T_c} \right)^{1/2}$$

e quindi per la prima delle [1.39] si ottiene:

$$\rho_c = \rho M \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{-1/2} \quad [3.17]$$

Inoltre tenuto conto dell'equazione di stato si può scrivere:

$$\frac{p_c}{\rho_c T_c} = \frac{p}{\rho T}$$

sicché:

$$p_c = p \left( \frac{\rho_c}{\rho} \right) \left( \frac{T_c}{T} \right)$$

e tenuto conto della [3.17] e tramite la prima delle [1.39] si perviene all'espressione:

$$p_c = p M \left( \frac{2}{k-1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{1/2} \quad [3.18]$$

Ancora dall'equazione di continuità risulta:

$$w_c = \frac{\rho w}{\rho_c}$$

e tramite la [3.17] si ha:

$$w_c = \frac{w}{M} \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{1/2} \quad [3.19]$$

la quale unitamente alle [3.17], [3.18] e la prima delle [1.39] definiscono lo stato critico adiabatico ovvero lo stato di massima entropia.

Nella Figura 15 è rappresentato il processo i cui estremi sono gli stati sopra menzionati, in tal caso in corrispondenza dell'isoentropica  $s = s_{max}$  si può scrivere:

$$p'_0 = p_c \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

mentre lungo l'isoentropica appartenente allo stato locale vale la [1.29] e dal rapporto di queste pressioni di ristagno si ha:

$$\frac{p_0}{p'_0} = \frac{p}{p_c} \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

la quale tramite la [3.18] assume la forma:

$$\frac{p_o}{p'_o} = \frac{I}{M} \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad [3.20]$$

che fornisce il rapporto tra la pressione di ristagno relativa allo stato locale e quella che si ha nello stato critico adiabatico.

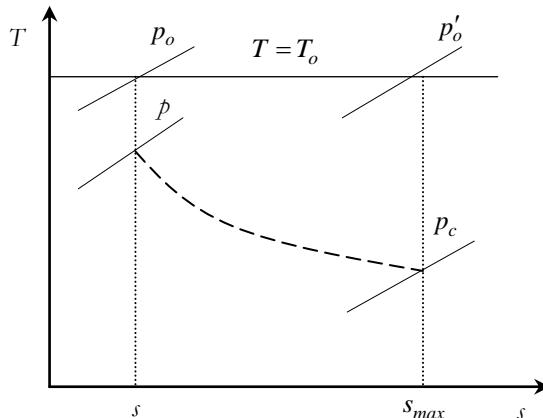


Figura 15

L'aumento di entropia nella suddetta trasformazione vale:

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T_c}{T} \left( \frac{p_c}{p} \right)^{\frac{1-k}{k}}$$

d'altra parte lungo l'isoentropica locale e quella critica si può scrivere rispettivamente:

$$T p^{\frac{1-k}{k}} = T_o p_o^{\frac{1-k}{k}}$$

$$T_c p_c^{\frac{1-k}{k}} = T_o p'_o^{\frac{1-k}{k}}$$

e dal rapporto di ambo i membri ne risulta:

$$\frac{T_c}{T} \left( \frac{p}{p_c} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left( \frac{p_o}{p'_o} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

e pertanto l'aumento di entropia si può scrivere nella forma:

$$\Delta s = c_p \ln \left( \frac{p_o}{p'_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} = R \ln \frac{p_o}{p'_o} \quad [3.21]$$

ovvero in funzione del rapporto tra la pressione di ristagno locale e quella appartenente allo stato di massima entropia.

Si può dire che lo stato critico adiabatico è adesso definito in modo completo in quanto oltre alle equazioni precedenti la [3.21] fornisce il valore della massima entropia a partire da condizioni locali note.

### 3.4. FUNZIONAMENTO DEI CONDOTTI MISTI

Lo studio del moto in ugelli e diffusori è stato trattato separatamente da quello nei condotti cilindrici in quanto benché in entrambi i casi il deflusso è adiabatico si è visto che solo nel primo caso è possibile, almeno in prima approssimazione, trascurare gli effetti dell'attrito.

Viene adesso preso in esame lo studio del moto adiabatico in un condotto cilindrico collegato a monte ad un ugello, questo deflusso si può definire “*misto*” sia per geometria che per comportamento fisico del fluido in quanto se nel condotto cilindrico vale il teorema di Fanno nell’ugello vale quello di Hugoniot.

Questo studio viene affrontato in maniera ancor più sintetica di quello fatto per gli ugelli sia perché i fenomeni d’urto, principali responsabili del comportamento del fluido, non vengono qui presi in considerazione ed anche per gli aspetti più complessi che questo deflusso combinato comporta per il quale si rimanda il lettore ai trattati specifici sull’argomento.

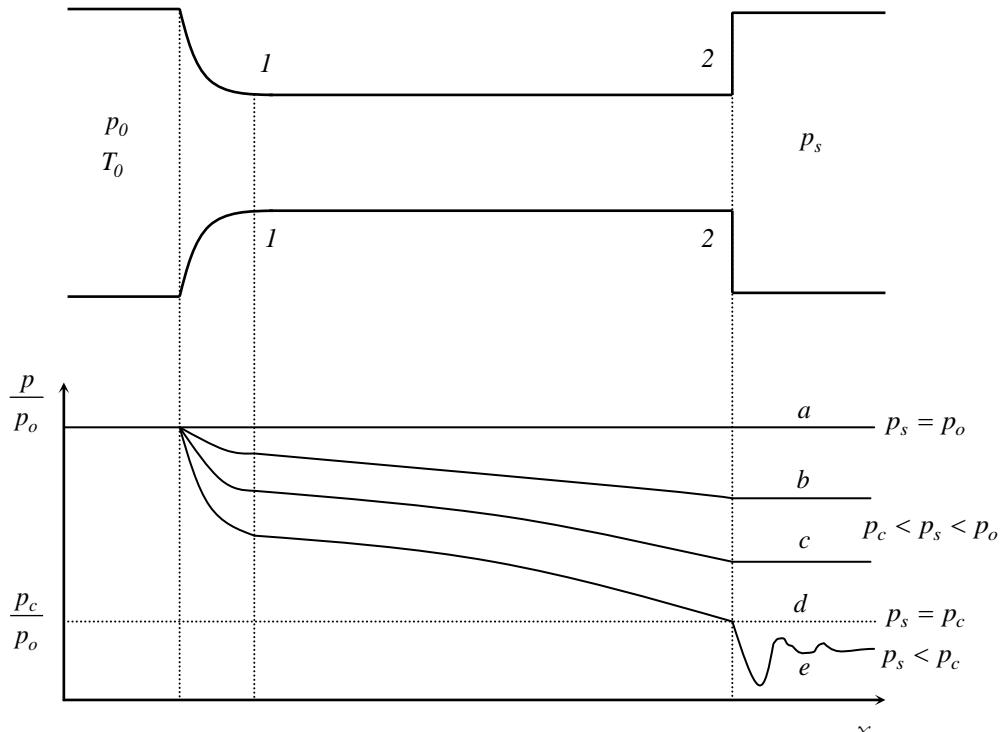


Figura 16

#### 1.1.4. CONDOTTO ALIMENTATO DA UN CONVERGENTE

Nella Figura 16 il condotto è collegato, attraverso un ugello convergente, a monte ad un serbatoio con pressione e temperatura di ristagno note ed a valle ad un ambiente la cui pressione  $p_s$  viene fatta decrescere con continuità a partire dal valore della pressione di ristagno a monte. Nell’ugello il moto è isoentropico mentre nel tratto cilindrico il deflusso è adiabatico con attrito.

Facendo riferimento al diagramma delle pressioni sottostante alla figura si osserva che se la pressione nel serbatoio a valle è uguale a quella di ristagno a monte non c’è movimento, curva  $a$ , mentre per valori via via decrescenti di  $p_s$  rispetto alla  $p_0$ , curve  $b$  e  $c$ , si realizza il deflusso in regime subsonico e nella sezione di uscita si ha  $M_2 < 1$ ; ad ogni diminuzione di  $p_s$  si verifica un incremento del numero di Mach e quindi un accrescimento della portata fino a che quando la pressione  $p_s$  raggiunge il valore critico, curva  $d$ , nella sezione di uscita si ha  $M_2 = 1$  e la portata ha valore massimo così come in corrispondenza della sezione di imbocco del tratto cilindrico anche il numero di Mach raggiunge un valore massimo.

Per valori di  $p_s$  minori della  $p_c$ , curva  $e$ , non si manifesta alcuna variazione della portata che rimane uguale al suo valore massimo corrispondente a  $M_2 = 1$  anche perché per il teorema di Fanno il numero di Mach in tale sezione non può superare il valore unitario.

Pertanto il deflusso all'interno del condotto rimane inalterato ma oltre la sezione di uscita il fluido subisce delle onde di espansione per poi raggiungere più a valle l'adeguamento alla pressione  $p_s$ .

### 1.1.5. CONDOTTO ALIMENTATO DA UN CONVERGENTE - DIVERGENTE

Il condotto cilindrico viene collegato al serbatoio di monte con un ugello convergente - divergente ed anche qui lo stato di ristagno nel serbatoio è noto così come può essere fatta variare la pressione dell'ambiente rispetto alla pressione di ristagno del serbatoio; è evidente che in questo caso si deve necessariamente ammettere che nel divergente il moto sia isoentropicamente supersonico altrimenti, per quanto è già noto, si ricadrebbe nel caso precedente.

Per studiare l'influenza della pressione  $p_s$  sul deflusso di possono distinguere tre casi a seconda che la lunghezza reale del condotto è minore, uguale o maggiore di quella massima compatibile con lo stato fisico iniziale fissato nella sezione di ingresso del tratto cilindrico, come è rappresentato nella Figura 17, nella quale la sezione intermedia rappresenta la  $l_{max}$  calcolata in corrispondenza del numero di Mach nella sezione iniziale del condotto cilindrico.

- $l = (l_{max})_{M_1}$  in questo primo caso la sezione di sbocco è la  $2'-2'$  allora per  $p_s = p_c$  il moto è interamente supersonico nel condotto e solo nella sezione di uscita si ha  $M_{2'} = 1$ , curva  $e$ , mentre se  $p_s < p_c$  si ha ancora  $M_{2'} = 1$  ma il fluido subisce delle onde di espansione e solo più a valle si ha l'adeguamento alla pressione  $p_s$ , curva  $g$ ; se  $p_s > p_c$  si ha  $M_{2'} < 1$  ma un'onda d'urto normale si viene a formare nel condotto, curva  $d$ , in dipendenza del valore di  $p_s$  e tale onda si sposta verso monte all'aumentare di  $p_s$ .

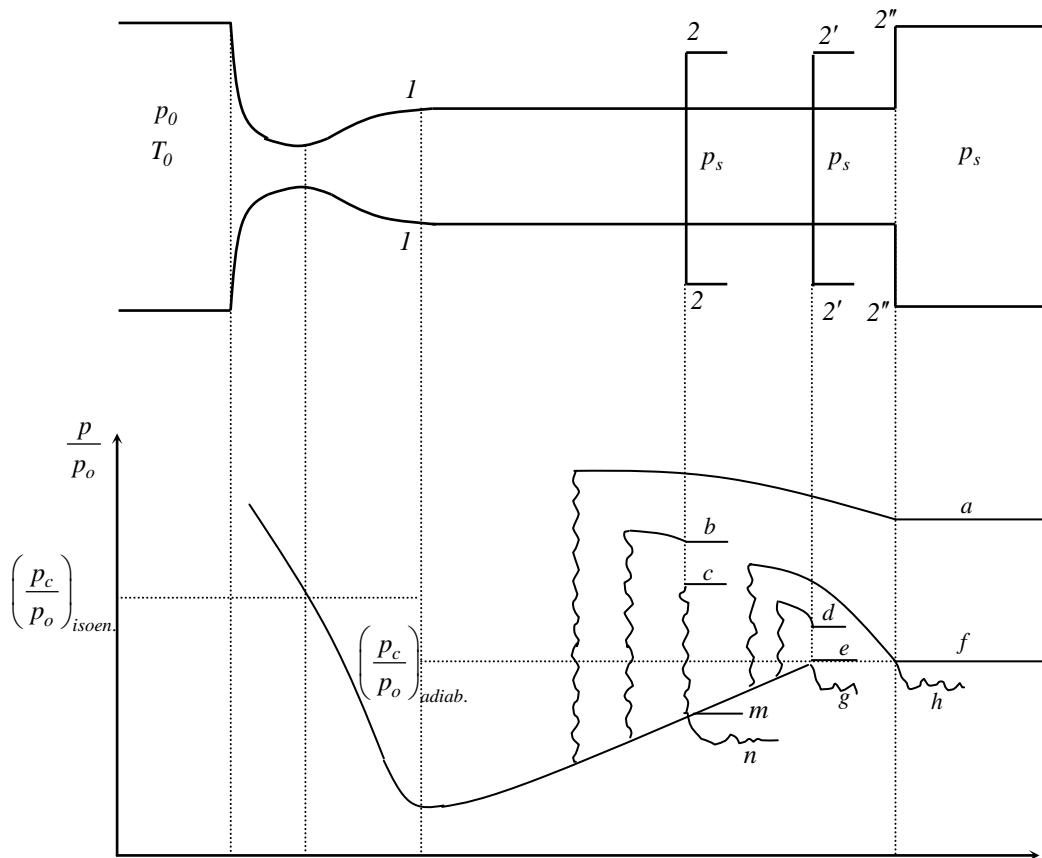


Figura 17

- $l < (l_{max})_{M_1}$  in questo secondo caso la sezione di sbocco è la  $2-2$  in corrispondenza della quale, calcolata la pressione con le equazioni di Fanno, si ha che  $p_2 < p_c$  per cui il moto nel

condotto è supersonico senza onde d'urto ovvero se  $p_s = p_2 < p_c$  si ha la curva  $m$  mentre se  $p_s < p_2 < p_c$  si hanno onde di espansione, curva  $n$ , e quindi l'adeguamento alla pressione  $p_s$  più a valle, per una particolare pressione  $p_s = p_2^*$  si viene a formare un'onda d'urto nella sezione di sbocco, curva  $c$ .

- -  $l > (l_{max})_{M_1}$  in quest'ultimo caso la sezione di sbocco è la  $2''-2''$  e il fluido subisce sempre un'onda d'urto all'interno del condotto e più precisamente se  $p_s > p_c$  si ha  $M_{2''} < 1$  e quindi la sezione del condotto nella quale si forma l'onda d'urto dipende dalla  $p_s$ , curva  $a$ ; per  $p_s = p_c$ , curva  $f$ , si ha  $M_{2''} = 1$  e tale valore vale anche per  $p_s < p_c$  anche se il fluido subisce onde oblique di espansione, curva  $b$ , e solo più a valle si ha l'adeguamento alla pressione  $p_s$ .

Si osserva che man mano che la lunghezza del condotto cilindrico viene incrementata a partire da  $(l_{max})_{M_1}$  l'onda d'urto normale si sposta verso monte fino a formarsi nella sezione  $1-1$  di conseguenza il moto in tutto il condotto è interamente subsonico ed in corrispondenza della sezione finale si raggiunge il regime sonico.

## 4. MOTO ISOTERMO NEI CONDOTTI CILINDRICI

### 4.1. PERDITE DI PRESSIONE E PORTATA DI MASSA

Si è detto inizialmente che nel caso di comprimibilità la velocità del fluido anche per condotto a sezione costante varia per effetto dei cambiamenti di densità e pertanto non si annulla la variazione di energia cinetica. Tuttavia se il fluido viaggia di regime laminare stazionario le basse velocità fanno sì che le variazioni suddette si possono ritenere praticamente trascurabili ai fini del bilancio di energia meccanica. Si può pervenire ad un'espressione del gradiente di pressione in tale regime partendo dal gradiente di pressione per un fluido incomprimibile per il quale, come è noto, nel caso di un condotto cilindrico a sezione circolare vale la relazione:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{32\mu}{d^2} \bar{w} \quad [4.1]$$

che messa in funzione della portata di massa diviene:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{128\mu}{\rho \pi d^4} \dot{m} \quad [4.2]$$

Questa equazione per un fluido comprimibile deve essere necessariamente scritta per un tronco di condotto di lunghezza elementare  $dx$ , ossia:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{128\mu}{\rho \pi d^4} \dot{m}$$

che nel caso del gas perfetto si scrive:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{128\mu}{\pi d^4 p} RT \dot{m}$$

sicché integrando su tutto il tronco di lunghezza  $l$  si ha:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \frac{128\mu \dot{m} l}{\pi d^4} RT$$

ovvero anche:

$$\frac{p_1 + p_2}{2} \Delta p = \frac{128\mu \dot{m} l}{\pi d^4} RT \quad [4.3]$$

d'altra parte se la temperatura del gas è costante nelle due sezioni estreme si può scrivere:

$$p_1 = \rho_1 RT \quad p_2 = \rho_2 RT$$

quindi dalla semisomma risulta:

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} RT = \rho_m RT$$

e sostituendo nella [4.3] si ottiene:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{128\mu \dot{m}}{\rho_m \pi d^4} \quad [4.4]$$

relazione analoga alla [4.2] pertanto il gradiente di pressione di un gas perfetto in regime laminare stazionario si può ottenere dal corrispondente gradiente di pressione di un fluido incomprimibile adottando per la densità il valore medio delle densità nelle sezioni estreme del condotto.

In regime turbolento le variazioni di velocità conseguenti alle diminuzioni di pressione sono sovente piuttosto rilevanti per cui nell'equazione di bilancio di energia devono essere computate le variazioni di energia cinetica anche se, come si avrà modo di vedere, l'approssimazione fatta per il regime laminare può in qualche caso valere anche in tale regime.

Se la temperatura è costante l'equazione [3.3] diviene:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}$$

e dal confronto con la [3.4] risulta:

$$\frac{dw}{w} = -\frac{dp}{p}$$

sicché la [3.1] assume la forma:

$$-\frac{dp}{p} + \frac{dp}{\rho w^2} + \frac{\xi}{2d} dx = 0 \quad [4.5]$$

Se lo stato fisico iniziale del fluido è caratterizzato dai valori  $(\rho_i, p_i, w_i)$  l'equazione di bilancio di massa è data da:

$$\rho w = \rho_i w_i$$

e quindi scrivendo:

$$\rho w^2 = (\rho w) w = (\rho_i w_i) w$$

e tenuto conto dell'equazione di stato risulta anche:

$$\rho w^2 = \frac{\rho_i^2 w_i^2}{\rho} = \frac{RT}{p} \rho_i^2 w_i^2$$

pertanto l'equazione [4.5] si scrive:

$$-\frac{dp}{p} + \frac{p}{RT \rho_i^2 w_i^2} dp + \frac{\xi}{2d} dx = 0 \quad [4.6]$$

Se si ammette che  $\xi = f(Re)$  ed essendo in tale deflusso  $\mu = \text{cost.}$  risulta che:

$$Re = \frac{\rho w d}{\mu} = \text{cost.}$$

di conseguenza è anche  $\xi = \text{cost.}$  e quindi integrando la [4.6] si ottiene:

$$p_i^2 - p_2^2 = 2RT \rho_i^2 w_i^2 \left( \frac{\xi l}{d} + \ln \frac{p_1}{p_2} \right) \quad [4.7]$$

che può essere scritta nella forma:

$$\Delta p = \frac{2RT}{p_1 + p_2} \rho_i^2 w_i^2 \left( \frac{\xi l}{d} + \ln \frac{p_1}{p_2} \right) \quad [4.8]$$

Si osserva che il logaritmo del rapporto delle pressioni estreme è ampiamente trascurabile quando il condotto non sia troppo breve; ad esempio per  $\xi = 0,03$  e se  $p_1 = 2p_2$ , che in pratica è un rapporto estremamente elevato, in un condotto lungo circa 2000 diametri si avrebbe:

$$\frac{\xi l}{d} = 30 \quad \ln \frac{p_1}{p_2} = \ln 2 = 0,69$$

ovvero per le condizioni suddette, abbastanza svantaggiose, il termine logaritmico è circa 45 volte più piccolo del precedente e quindi praticamente trascurabile; questo significa che la variazione di energia cinetica dovuta alle variazioni di densità risulta trascurabile rispetto a quella dissipata per effetto dell'attrito sicché la [4.8] diviene:

$$\Delta p = \frac{2RT}{p_1 + p_2} \rho_I^2 w_I^2 \frac{\xi l}{2d}$$

che tramite l'equazione di stato può essere anche scritta:

$$\frac{\Delta p}{l} = \left( \frac{2}{I + \frac{p_2}{p_1}} \right) d \frac{\xi \rho_I w_I^2}{2} \quad [4.9]$$

espressione che fornisce il gradiente di pressione per il deflusso isotermo il quale può essere determinato come se il fluido fosse incomprimibile partendo dai valori iniziali di densità e velocità correggendo poi con il fattore in parentesi che a sua volta, essendo  $p_1 > p_2$ , è sempre maggiore dell'unità. Si può quindi affermare che:

$$\left( \frac{\Delta p}{l} \right)_{T=cost} > \left( \frac{\Delta p}{l} \right)_{\rho=cost}$$

ossia la resistenza effettivamente incontrata dalla corrente fluida è maggiore di quella che si avrebbe se il fluido fosse incomprimibile ed avente una densità pari a quella del gas in corrispondenza della sezione iniziale del condotto; d'altra parte se si pensa che nel moto turbolento la resistenza che incontra il fluido è proporzionale al prodotto  $\rho w^2$  e tenuto conto che  $\rho w = cost$ . tale resistenza cresce al crescere di  $w$  ossia al diminuire della densità, ciò che subisce il fluido durante il deflusso.

Si faccia riferimento all'equazione [4.7] la quale tramite l'equazione di stato del gas può essere scritta:

$$p_I^2 - p_2^2 = RT \left( \frac{\dot{m}}{A} \right) \left( \frac{\xi l}{d} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right)$$

ovvero anche:

$$p_I^2 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^2 \right] = RT \left( \frac{\dot{m}}{A} \right) \left( \frac{\xi l}{d} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right)$$

si può dunque ricavare la portata di massa specifica:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{p_1}{\sqrt{RT}} \sqrt{\frac{1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^2}{\frac{\xi l}{d} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2}}} \quad [4.10]$$

ovvero la determinazione della portata di massa note che siano le pressioni nelle sezioni estreme, o quantomeno il valore del loro rapporto, in un condotto di dato diametro; nei casi in cui si può trascurare il termine logaritmico, come visto in precedenza, si ottiene l'espressione semplificata:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{p_1}{\sqrt{RT}} \sqrt{\frac{d}{\xi l} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^2 \right]} \quad [4.11]$$

dalla quale o anche dalla [4.10], sempre che siano note le pressioni suddette, si può determinare quale diametro deve avere il condotto che deve convogliare una data portata di massa  $\dot{m}$ .

## 4.2. PARAMETRO LIMITE. STATO CRITICO

Il gradiente di pressione può essere anche scritto in funzione del numero di Mach se si considera che l'equazione [4.5] può essere messa nella forma:

$$\left(1 - \frac{\rho w^2}{p}\right) \frac{dp}{dx} + \frac{\xi}{2d} \rho w^2 = 0$$

e tenuto conto della [3.15] la precedente diviene:

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{I}{kM^2 - 1}\right) \frac{\xi}{2d} \rho w^2 \quad [4.12]$$

dalla quale si osserva che in corrispondenza del valore:

$$M^* = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad [4.13]$$

si ha che  $dp \rightarrow \infty$  facendo cadere in difetto la [4.12]; la [4.13] rappresenta lo *stato critico isotermo* in corrispondenza del quale il regime isotermo può essere mantenuto solo teoricamente ma in pratica tale regime sarebbe impossibile da realizzare.

Si ha allora un'effettiva perdita di pressione solo per valori di Mach inferiori al valore critico, ovvero risulta:

$$M < \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \frac{dp}{dx} < 0 \quad [4.14]$$

mentre per Mach superiori al valore critico si ha l'inversione del gradiente di pressione, ossia:

$$M > \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \frac{dp}{dx} > 0 \quad [4.15]$$

Si scriva l'equazione [4.7] partendo da condizioni iniziali note e facendo riferimento ad una sezione generica del condotto di ascissa  $x$ , per cui:

$$p_I^2 - p^2 = p_I \rho_I w_I^2 \left( \frac{\xi x}{d} + 2 \ln \frac{p_I}{p} \right)$$

ovvero anche:

$$1 - \left( \frac{p}{p_I} \right)^2 = \frac{\rho_I w_I^2}{p_I} \left( \frac{\xi x}{d} + 2 \ln \frac{p_I}{p} \right)$$

quindi ordinando e scrivendo la suddetta relazione in funzione del numero di Mach si può scrivere:

$$\frac{\xi x}{d} = \frac{1}{kM_I^2} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_I} \right)^2 \right] + 2 \ln \frac{p}{p_I} \quad [4.16]$$

La (4.16) è rappresentata nel diagramma di Figura 18 dalle linee a tratto continuo ognuna delle quali è determinata per un dato numero di Mach iniziale e forniscono l'andamento della pressione  $p = p(x)$  lungo il condotto; le linee a tratto e punto forniscono l'andamento della pressione per fluido incompressibile, in tal caso infatti si avrebbe:

$$p_I - p = \frac{\xi x}{d} \frac{\rho_I w_I^2}{2}$$

ovvero in funzione del numero di Mach:

$$\frac{\xi x}{d} = \frac{1}{kM_1^2} \left( 1 - \frac{p}{p_1} \right) \quad [4.17]$$

che rappresenta l'equazione delle sopraindicate rette ottenute al variare di  $M_1$ .

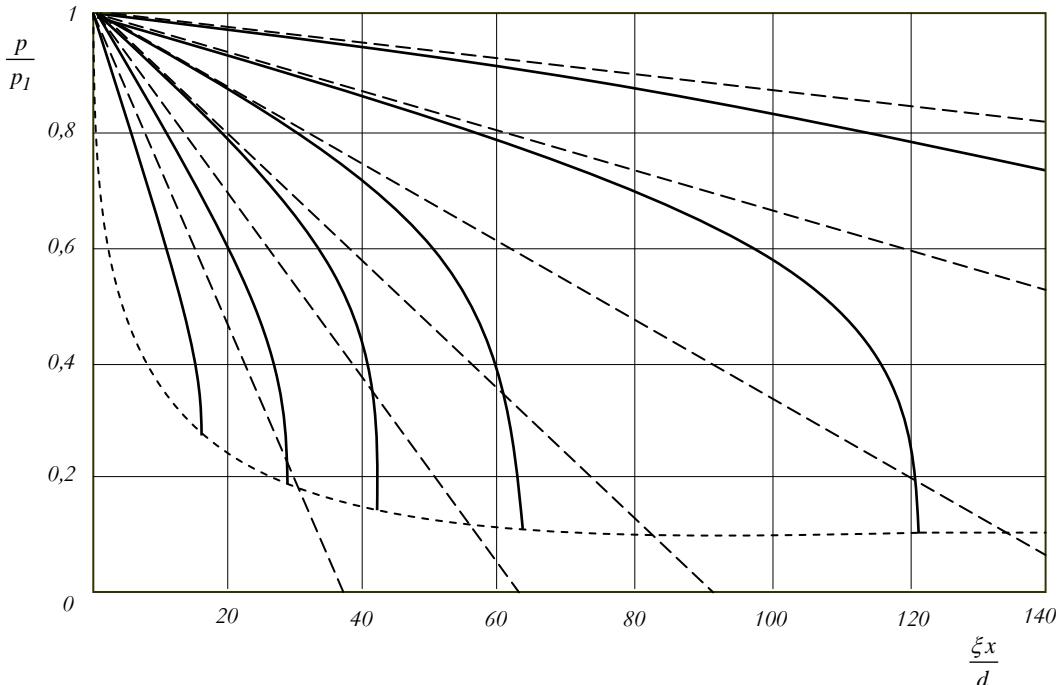


Figura 18

Come si può osservare il diagramma mette in evidenza ciò che del resto è già stato dimostrato ovvero che la pressione diminuisce più rapidamente per i fluidi comprimibili e gli scostamenti sono tanto maggiori quanto maggiore è il numero di Mach iniziale. Fissata la portata  $\dot{m}$  e la pressione iniziale  $p_1$  restano anche determinati il valore di  $M_1$ , ovvero la curva caratteristica della corrente fluida; noti allora la lunghezza e il diametro del condotto si può leggere sulla curva suddetta il valore del rapporto  $\frac{p}{p_1}$  e quindi, noto il fattore d'attrito, ricavare la differenza di pressione necessaria affinché il condotto possa convogliare la portata assegnata.

Si può altresì osservare che tutte le curve del suddetto diagramma presentano un punto a tangente verticale il quale rappresenta il punto rappresentativo dello stato critico, ciò significa che se la lunghezza del condotto è tale che il termine  $\frac{\xi x}{d}$  supera l'ascissa in quel punto è impossibile che il condotto possa convogliare la portata assegnata qualunque sia il rapporto delle pressioni nelle sezioni estreme; può al massimo essere convogliata quella portata cui corrisponde un numero di Mach iniziale tale che la curva rappresentativa abbia tangente verticale proprio nel punto di ascissa  $\frac{\xi l}{d}$ . Scrivendo la [4.5] in funzione del numero di Mach si ha:

$$-\frac{dp}{p} + \frac{dp}{kpM^2} + \frac{\xi}{2d} dx = 0$$

quindi ordinando:

$$\frac{\xi}{2d} dx = \left( 1 - \frac{1}{kM^2} \right) \frac{dp}{p} \quad [4.18]$$

e tenuto conto che, per quanto visto in precedenza per la velocità, si può anche scrivere:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dM}{M} \quad [4.19]$$

la precedente assume la forma:

$$\frac{\xi}{d} dx = 2 \left( \frac{1}{kM^2} - 1 \right) \frac{dM}{M} \quad [4.20]$$

e quindi integrando si ha:

$$\int_0^{l_{max}} \frac{\xi}{d} dx = 2 \int_M^{1/\sqrt{k}} \left( \frac{1}{kM^2} - 1 \right) \frac{dM}{M} = \frac{2}{k} \int_M^{1/\sqrt{k}} M^{-3} dM - 2 \int_M^{1/\sqrt{k}} \frac{dM}{M}$$

dalla quale si ottiene:

$$\frac{\xi l_{max}}{d} = \frac{1 - kM^2}{kM^2} + \ln(kM^2) \quad [4.21]$$

dove il termine a primo membro rappresenta il parametro limite di attrito per il deflusso isotermo e la  $l_{max}$  rappresenta la massima lunghezza di condotto lungo il quale il moto, a partire da una sezione di assegnato numero di Mach, si mantenga isotermo senza che si verifichino fenomeni di discontinuità nella sezione considerata.

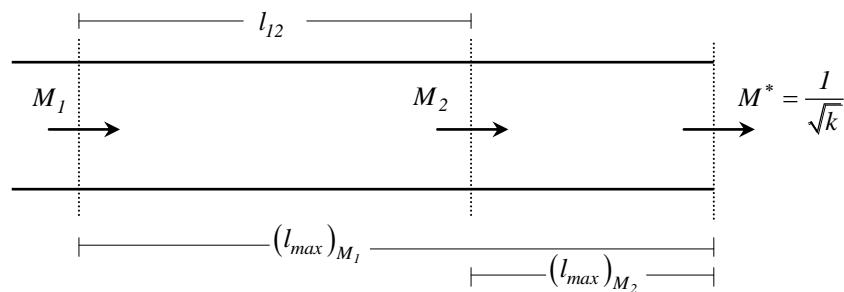


Figura 19

La Figura 19 è analoga alla fig. 3.2, fatta eccezione per il numero di Mach critico, e dalla quale è possibile dunque determinare la lunghezza di condotto necessaria affinché il moto passi dalla sezione con  $M_1$  alla sezione con  $M_2$  mantenendo il regime isotermo e senza che si verifichino fenomeni d'urto; vale ancora l'equazione [3.14] dove però le massime lunghezze relative ai corrispondenti numeri di Mach vengono determinate tramite la [4.21].

Si può adesso determinare il rapporto di pressione corrispondente allo stato critico integrando la [4.19], ossia:

$$\int_{p_1}^{p^*} \frac{dp}{p} = - \int_{M_1}^{1/\sqrt{k}} \frac{dM}{M}$$

dalla quale si ottiene:

$$\frac{p^*}{p_1} = M_1 \sqrt{k} \quad [4.22]$$

pertanto la [4.16] in corrispondenza dello stato critico diviene:

$$\frac{\xi l_{max}}{d} = 2 \ln(M_1 \sqrt{k}) + \frac{1}{kM_1^2} - 1 \quad [4.23]$$

dalla quale risolvendo per tentativi si ottiene il valore del numero di Mach iniziale che darebbe luogo alla massima portata di fluido che il condotto può convogliare sostituendo tale valore nell'espressione:

$$\dot{m}_{max} = \rho_i A w_i = \rho_i A M_i \sqrt{\frac{k p_i}{\rho_i}}$$

che può essere scritta in funzione della temperatura:

$$\dot{m}_{max} = A M_i \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_i}{\sqrt{T_i}} \quad [4.24]$$

tale valore, a differenza della portata massima che si realizza nel deflusso isoentropico, ha solo un significato teorico ma non ha alcuna applicazione pratica in quanto, come verrà precisato qui di seguito, lo stato critico isotermo non può essere realizzato praticamente.

### 4.3. CONDIZIONE DI ISOTERMICITÀ

Si faccia riferimento alla [1.28] la quale differenziata diviene:

$$dT_0 = T(k-1) M dM$$

ovvero in termini di variazione relativa si scrive:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{k-1}{\frac{1}{M^2} + \frac{k-1}{2}} \frac{dM}{M}$$

e quindi per la [4.20] si perviene all'espressione:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{k(k-1)M^2}{\left(\frac{2}{M^2} + k-1\right)(1-KM^2)} \frac{\xi}{d} dx \quad [4.25]$$

la quale assieme alla [4.18] nonché alle già note relazioni:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dM}{M} = -\frac{dw}{w}$$

consente di stabilire il verso di variazione, lungo il deflusso isotermo, delle grandezze dinamiche e termiche che lo caratterizzano, risulta infatti:

$$M < \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \begin{cases} dp < 0 \\ d\rho < 0 \\ dw > 0 \\ dT_0 > 0 \end{cases} \quad M > \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \begin{cases} dp > 0 \\ d\rho > 0 \\ dw < 0 \\ dT_0 < 0 \end{cases} \quad [4.26]$$

pertanto la [4.13] rappresenta il limite a cui tende il numero di Mach sia partendo da condizioni subsoniche che supersoniche, escludendo in questo secondo caso fenomeni d'urto. Inoltre differenziando la [4.24] si può scrivere:

$$dQ = d\left(h + \frac{w^2}{2}\right) = dh_0 = c_p dT_0$$

e pertanto, tenendo presenti le condizioni [4.23], si avrebbe:

$$M < \frac{1}{\sqrt{k}} \quad dQ > 0$$

ciò significa che l'attrito provoca una diminuzione di temperatura di conseguenza affinché il moto si mantenga isotermo è necessaria una somministrazione di calore dall'ambiente al fluido e finché si verifica tale condizione l'apporto di calore compensa effettivamente il raffreddamento del fluido mantenendone costante la temperatura. Mentre se si ha:

$$M > \frac{I}{\sqrt{k}} \quad dQ < 0$$

in tal caso occorrerebbe sottrarre calore al fluido per mantenere il moto isotermo in quanto l'attrito causa un aumento della temperatura; in pratica però questa situazione non è realizzabile in quanto è tecnicamente impossibile effettuare uno scambio termico convettivo talmente intenso che possa compensare l'effetto dell'attrito.

Infine:

$$M = \frac{I}{\sqrt{k}} \quad dQ = 0$$

in tale circostanza l'apporto o la sottrazione di calore non influenza la temperatura la quale in questa circostanza limite rimarrebbe costante, anche questa situazione è solo teorica ma di impossibile realizzazione pratica.

Si conclude che il deflusso isotermo di un gas lungo un condotto cilindrico può essere realizzato solo per numeri di Mach sufficientemente lontani dal valore critico e lungo condotti con pareti molto trasmissenti perché solo a tale condizione l'azione dell'attrito risulta concomitante ad uno scambio termico con l'esterno di entità tale da mantenere costante la temperatura per l'intera durata del deflusso, pertanto lo stato critico sopra definito nonché il valore della portata corrispondente determinato con la [4.25] hanno solo un significato teorico.

## 5. MOTO CON SCAMBIO TERMICO NEI CONDOTTI CILINDRICI

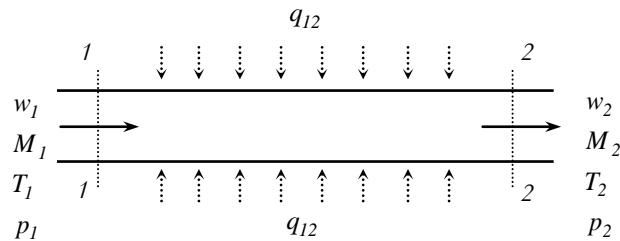
### 5.1. DEFLUSSO DI RAYLEIGH

Si tratta di un moto a regime stazionario, internamente reversibile lungo un condotto cilindrico che si realizza mediante scambio di calore e senza scambi meccanici; oltre ai fenomeni dissipativi, con riferimento principale ovviamente all'attrito, viene anche trascurata la variazione di energia potenziale del fluido.

Per lo studio di questo tipo di deflusso oltre alle equazioni di bilancio di massa ed energia precedentemente utilizzate è necessario fare riferimento all'equazione di bilancio di quantità di moto che nel caso in esame deve essere scritta nella forma:

$$p + \rho w^2 = \text{cost} \quad [5.1]$$

Viene qui preso in esame solo il caso più semplice ossia che la somministrazione di energia termica venga effettuata dall'esterno, come è illustrato nella *fig.5.1*, escludendo il caso in cui vi siano sorgenti termiche all'interno del condotto dovuti a fenomeni di combustione.



*figura 5.1*

Applicando l'equazione (5.1) alle sezioni estreme del tronco di condotto si può scrivere:

$$p_1 + \rho_1 w_1^2 = p_2 + \rho_2 w_2^2$$

ed essendo:

$$\rho w^2 = k p M^2$$

l'eguaglianza precedente diviene:

$$p_1 (1 + k M_1^2) = p_2 (1 + k M_2^2)$$

ovvero anche:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + k M_2^2}{1 + k M_1^2} \quad [5.2]$$

espressione che collega le pressioni locali nelle sezioni di ingresso e di uscita ai corrispondenti numeri di Mach.

Le pressioni di ristagno  $p_{01}$ , a monte della somministrazione di calore, e  $p_{02}$ , a valle, vanno ricavate supponendo che il fluido nell'arrestarsi, in corrispondenza delle sezioni medesime, non abbia modo di scambiare calore ed il processo sia reversibile; pertanto l'equazione (1.29) deve essere applicata sia nella sezione iniziale che in quella finale, si deve dunque scrivere:

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

inoltre dividendo membro a membro:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad [5.3]$$

e tenuto conto della (5.2) risulta:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad [5.4]$$

la quale fornisce il rapporto tra le pressioni di ristagno  $p_{02}$  e  $p_{01}$ , rapporto che è diverso dall'unità e varia al variare dei numeri di Mach locali; è evidente, per quanto si è detto in precedenza, che tale rapporto diviene unitario se la corrente fluida non scambia calore con l'esterno. Pertanto le grandezze di ristagno che nel moto isoentropico costituiscono un stato termodinamico fisso nel deflusso di Rayleigh esse variano al variare dello stato termodinamico locale.

Nel deflusso isoentropico di Hugoniot così come in quello adiabatico di Fanno lo stato di riferimento è quello che corrisponde al regime sonico, anche in questo caso torna opportuno scegliere come riferimento la condizione  $M = 1$  che viene raggiunta reversibilmente ma con aumento di entropia, come si potrà vedere poco più avanti osservando la linea di Rayleigh.

Considerando uno stato locale generico la (5.2) diviene:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \quad [5.5]$$

che fornisce il rapporto tra la pressione  $p$  in una sezione qualsiasi del condotto e la pressione  $p^*$  che si ha in quella sezione dove risulta  $M = 1$ .

Se  $p_0^*$  è la pressione di ristagno corrispondente alla  $p^*$  e  $p_0$  è quella corrispondente ad uno stato di ristagno in una sezione generica la (5.4) assume la forma:

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad [5.6]$$

ossia il rapporto tra la pressione di ristagno locale e quella di riferimento corrispondente.

Per quanto riguarda la temperatura di ristagno vale ancora l'equazione (1.28) in quanto è da supporre che nell'arresto il fluido subisca una trasformazione adiabatica essa però varia sezione per sezione, secondo l'equazione (1.27), e pertanto si deve scrivere:

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2$$

$$\frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2$$

e quindi facendo il rapporto dei membri:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right) \quad [5.7]$$

Dall'equazione di stato applicata alle sezioni 1 e 2 si può scrivere l'eguaglianza:

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

dalla quale si ricava il rapporto tra le temperature:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

inoltre dall'equazione di bilancio di massa, in funzione del numero di Mach, deve essere:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{M_2 \sqrt{kRT_2}}{M_1 \sqrt{kRT_1}} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} \quad [5.8]$$

sostituendo tale rapporto nella precedente risulta:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2$$

e tenendo conto della (5.2) si può ancora scrivere:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left( \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 \quad [5.9]$$

pertanto la (5.7) assume la forma:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \left[ \frac{M_2 (1 + kM_1^2)}{M_1 (1 + kM_2^2)} \right]^2 \quad [5.10]$$

si ottiene dunque il rapporto tra le pressioni di ristagno relative agli stati locali delle sezioni 1 e 2 in funzione dei numeri di Mach corrispondenti.

Se adesso si considera una generica sezione del condotto il rapporto tra la temperatura locale e quella di riferimento corrispondente risulta dalla (5.9):

$$\frac{T}{T^*} = \frac{M^2 (1+k)^2}{(1+kM^2)^2} \quad [5.11]$$

mentre il rapporto tra la temperatura di ristagno locale e quella di riferimento corrispondente si ottiene dall'equazione (5.10):

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2M^2 (k+1) \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}{(1+kM^2)^2} \quad [5.12]$$

In maniera analoga si può determinare il rapporto tra le densità locali, infatti facendo riferimento alla (5.8) si può scrivere:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-1/2}$$

e quindi per la (5.9) risulta:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2} \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \quad [5.13]$$

allora scrivendo la (1.33) in corrispondenza degli stati 1 e 2 si ha:

$$\frac{\rho_{01}}{\rho_1} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_2} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

ovvero facendo il rapporto dei membri:

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

e quindi per la (5.13) si ottiene il rapporto tra le densità locali di ristagno in funzione dei soli numeri di Mach corrispondenti:

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2} \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad [5.14]$$

inoltre considerando uno stato locale e quello di riferimento si può scrivere, tramite la (5.13) il rapporto:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1+kM^2}{(1+k)M^2} \quad [5.15]$$

mentre il rapporto tra le corrispondenti grandezze di ristagno si ottiene dalla (5.14), ovvero:

$$\frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1+kM^2}{(1+k)M^2} \left( \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad [5.16]$$

Anche la variazione di entropia tra gli stati 1 e 2 può essere espressa in funzione dei numeri di Mach corrispondenti, infatti essendo:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{k}}$$

tramite le (5.2) e (5.9) si ottiene:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left[ \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left( \frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right] \quad [5.17]$$

Considerando uno stato locale generico di entropia  $s$  e lo stato di riferimento la cui entropia è  $s^*$  la suddetta espressione diviene:

$$s - s^* = c_p \ln \left[ M^2 \left( \frac{1+k}{1+kM^2} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right] \quad [5.18]$$

dalla quale è immediato verificare che:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial s}{\partial M} \right)_{M=1} &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2 s}{\partial M^2} \right)_{M=1} &< 0 \end{aligned}$$

e pertanto anche nel deflusso di Rayleigh lo stato di massima entropia si ha in corrispondenza del regime sonico. Portando in un diagramma  $(s, M)$  la (5.18) si ottiene la linea di Rayleigh illustrata nella figura sottostante.

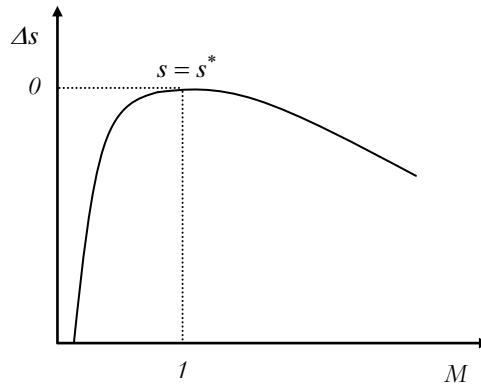


figura 5.2

## 5.2. SOMMINISTRAZIONE MASSIMA DI CALORE

I rapporti tra le varie grandezze in funzione del numero di Mach forniti dalle precedenti espressioni consentono di poter capire come deve avvenire lo scambio termico affinché possa essere realizzato il deflusso di Rayleigh.

Facendo riferimento alla (5.12) si osserva che per un dato valore di  $T_0^*$  un incremento positivo del rapporto fornito da tale espressione comporta un aumento della temperatura  $T_0$  cui corrisponde una somministrazione di calore, a norma della (1.27), mentre un incremento negativo di tale rapporto causa una diminuzione di  $T_0$  con conseguente sottrazione di calore. Inoltre dalla (5.12), come è immediato verificare, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T_0}{\partial M} \right)_{M=1} &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2 T_0}{\partial M^2} \right)_{M=1} &< 0 \\ T_{0max} &= T_0^* \end{aligned}$$

pertanto la temperatura di ristagno presenta un massimo in corrispondenza di  $M = 1$ , ovvero nel punto di massima entropia, e poiché la somministrazione di calore tende a far crescere la  $T_0$ , e quindi

anche il rapporto  $T_0/T_0^*$ , il fluido in moto ricevendo calore tende a portarsi al regime sonico di conseguenza in regime subsonico il numero di Mach cresce così come in regime supersonico esso decresce ed entrambi hanno come limite  $M = 1$ ; si deduce pertanto che non è possibile passare dal regime subsonico a quello supersonico, e viceversa, somministrando sempre calore; in corrispondenza della sezione in cui si raggiunge il valore  $M = 1$  occorre iniziare a sottrarre calore altrimenti si verifica la formazione di onde d'urto.

In sintesi se il fluido si trova in regime subsonico somministrando calore il fluido accelera e tende al regime sonico che può venire superato solo effettuando una sottrazione di calore a valle della sezione  $M = 1$  in tal caso il fluido incrementa la sua velocità, mentre una sottrazione di calore comporta una diminuzione della velocità. Se il fluido si trova in regime supersonico una somministrazione di calore provoca una diminuzione della velocità fino al regime sonico mentre una sottrazione di calore comporta un aumento della velocità.

Da quanto detto si deduce che il calore che si può somministrare al fluido ha un limite che dipende dalle condizioni in cui viene effettuato il moto. Se in corrispondenza di una sezione le condizioni sono date da  $T$  ed  $M$  la quantità di calore necessaria per portare il fluido fino alla condizione  $M = 1$  è data da:

$$q_{max} = c_p (T_0^* - T_0) \quad [5.19]$$

e tale quantità rappresenta il *massimo calore somministrabile* in quanto, come si è visto,  $T_0^*$  è il massimo di  $T_0$ .

Per potere esprimere tale calore in funzione del numero di Mach si considerino due sezioni generiche 1 e 2 del condotto per cui la quantità di calore da somministrare al fluido per portarlo dallo uno stato all'altro sarebbe data dalla (1.27) che in questo caso conviene scrivere nella forma:

$$q_{12} = c_p T_{01} \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right)$$

ovvero anche:

$$q_{12} = c_p T_1 \left( \frac{T_{01}}{T_1} \right) \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right)$$

espressione che, per le (5.10) e (1.28), diviene:

$$q_{12} = c_p T_1 \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) \left\{ \left[ \frac{M_2 (1+kM_1^2)}{M_1 (1+kM_2^2)} \right]^2 \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} - 1 \right\}$$

pertanto se lo stato 2 corrisponde al regime sonico in corrispondenza di uno stato locale generico si può scrivere:

$$q_{max} = c_p T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \left[ \frac{(1+kM^2)^2}{M^2(k+1)} \frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} - 1 \right]$$

quindi sviluppando ed ordinando si ottiene:

$$q_{max} = \frac{c_p T (M^2 - 1)^2}{2M^2(k+1)} \quad [5.20]$$

dalla quale si osserva che:

$$M \rightarrow 0 \quad q_{max} \rightarrow \infty$$

è evidente che questa è una situazione limite, essa però serve ad indicare che quando si parte da bassi valori del numero di Mach per incrementare la velocità del fluido si devono somministrare quantità di calore molto elevate.

Torna più conveniente disegnare la linea di Rayleigh nel piano termodinamico ( $T, s$ ) le cui equazioni parametriche sono date dalle (5.9) e (5.17) scritte in corrispondenza di una stato iniziale noto, caratterizzato dai valori ( $T_I, s_I, M_I$ ), e da uno stato locale generico ( $T, s, M$ ):

$$T = T_I \left[ \frac{M (1 + kM_I^2)}{M_I (1 + kM^2)} \right]^2$$

$$s = s_I + c_p \ln \left[ \left( \frac{M}{M_I} \right)^2 \left( \frac{1 + kM_I^2}{1 + kM^2} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]$$

attraverso le quali ad ogni valore del numero di Mach  $M$  corrisponde una coppia di valori di ( $T, s$ ) ottenendo così la curva illustrata nella figura sottostante; si osserva dal diagramma che la massima temperatura locale si raggiunge in condizioni di moto subsonico, d'altra parte facendo riferimento alla (5.11) se si pone:

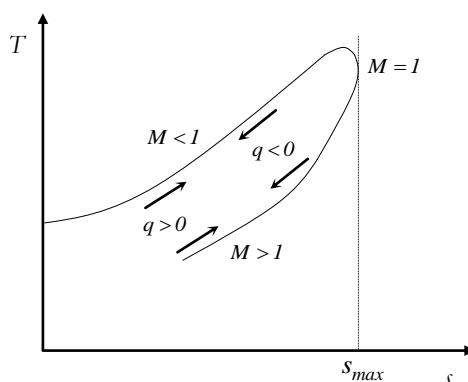


figura 5.3

$$\frac{\partial T}{\partial M} = 0$$

ne risulta l'equazione:

$$\frac{2M(1+k)^2}{(1+kM^2)^2} - \frac{4kM^3(1+k)^2}{(1+kM^2)^3} = 0$$

che fornisce la soluzione:

$$M = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad [5.21]$$

pertanto la temperatura locale massima sarebbe:

$$T_{max} = \frac{T^*(1+k)^2}{4k} \quad [5.22]$$

Si osserva che se nella linea di Rayleigh il fluido evolve in modo internamente reversibile si può allora scrivere l'eguaglianza di Clausius:

$$dq = Tds$$

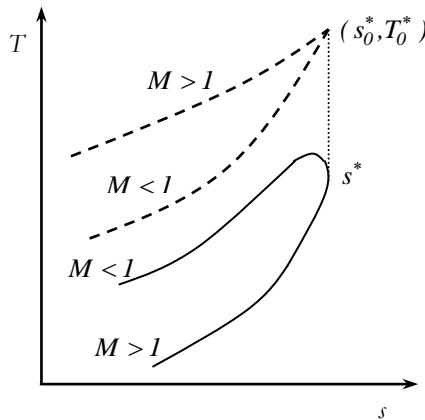
inoltre l'equazione di bilancio di energia porge:

$$dq = d\left(\frac{w^2}{2}\right) + c_p dT = c_p dT_0$$

e dal confronto con la precedente risulta:

$$Tds = c_p dT_0$$

tale relazione conferma quanto detto in precedenza ossia che il punto di massima entropia lungo la linea di Rayleigh è anche il punto di massima temperatura di ristagno, nella *fig. 5.4* sono rappresentati, dalle linee tratteggiate, gli stati di ristagno della linea di Rayleigh.



*figura 5.4*

### 5.3. VELOCITÀ DI RIFERIMENTO E VELOCITÀ MASSIMA

Per un deflusso reversibile che avviene con scambio di calore l'equazione di bilancio di energia per un gas perfetto si scrive:

$$\frac{w^2}{2} + c_p (T - T_0) = q$$

avendo fatto riferimento ad uno stato iniziale dove il fluido ha velocità nulla e temperatura  $T_0$ , tale espressione, per quanto è già stato fatto in precedenza, si può scrivere nella forma:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{c^2}{k-1} = \frac{c_0^2}{k-1} + q_{max} \quad [5.23]$$

dalla quale si osserva che anche se il deflusso avviene con scambio termico la velocità locale del gas diminuisce all'aumentare della corrispondente velocità del suono, e viceversa, per cui in un dato punto le due velocità assumono ugual valore  $w^*$  fornito dalla suddetta espressione:

$$w^* = \sqrt{\frac{2(k-1)}{k+1} \left( \frac{c_0^2}{k-1} + q_{max} \right)} \quad [5.24]$$

pertanto la velocità di riferimento nel deflusso di Rayleigh è sempre maggiore di quella che si realizza nel moto isoentropico e tale aumento è funzione della quantità di calore scambiata, in assenza di scambio di calore la (5.24) si identifica con la (1.35).

La velocità di riferimento può essere espressa in funzione del numero di Mach locale, infatti dall'equazione di bilancio di massa scritta nella (5.8) e tenuto conto della (5.13) risulta:

$$\frac{w_2}{w_1} = \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \quad [5.25]$$

che fornisce il rapporto delle velocità locali. Allora considerando uno stato locale generico caratterizzato dai valori  $(w, M)$  e quello di riferimento  $(w^*, M = 1)$  si può scrivere:

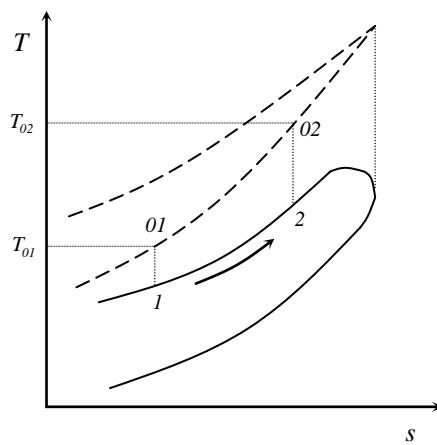
$$\frac{w^*}{w} = \frac{1 + kM^2}{M^2(k+1)} \quad [5.26]$$

ed è facile verificare che alla suddetta espressione si può pervenire anche attraverso la (5.24), con procedimento meno immediato del precedente..

#### 5.4. EVOLUZIONE DEL DEFLUSSO SULLA LINEA DI RAYLEIGH

Per un fluido che si muove lungo la curva di Rayleigh il problema fondamentale di importanza pratica è quello della determinazione dello stato termodinamico finale  $(p_2, T_2, w_2, M_2)$  allorquando, come si osserva dalla *fig. 5.1*, a partire da uno stato termodinamico iniziale noto  $(p_1, T_1, w_1, M_1)$  ad esso viene somministrata la quantità di calore  $q_{12}$ .

Lo stato termodinamico iniziale determina nel piano  $(T, s)$  una particolare linea di Rayleigh ed inoltre calcolata la temperatura di ristagno iniziale  $T_{01}$ , tramite la (1.28), resta anche determinata la temperatura di ristagno nello stato di riferimento  $T_0^*$ , attraverso la (5.12), nonché la temperatura di ristagno finale  $T_{02}$ , mediante la (1.27); tra queste temperature si può allora verificare che  $T_{02} \leq T_0^*$  oppure  $T_{02} > T_0^*$ .



*figura 5.5*

Nel caso in cui  $T_{02} < T_0^*$  se inizialmente  $M < 1$  lo stato finale 2 si trova ancora nel ramo superiore della linea di Rayleigh, *fig.5.5*, il deflusso è dunque caratterizzato dal tratto 12 ed è

univocamente determinato dalle relazioni sopra scritte; se inizialmente è  $M > 1$  si possono verificare due situazioni:

- il fluido si muove lungo il tratto  $12'$  della linea di Rayleigh, fig.5.6, questa è una soluzione accettabile e pertanto lo stato finale  $2'$  è ancora univocamente determinato;
- il fluido partendo dallo stato iniziale  $1$  in corrispondenza di un generico stato  $a$  sul tratto supersonico della linea di Rayleigh subisce un'onda d'urto passando allo stato  $b$  del ramo subsonico della stessa linea di Rayleigh, accade in questo caso che  $T_{0a} = T_{0b}$ , per poi proseguire subsonicamente fino allo stato finale  $2''$ , questa è una soluzione da scartare.

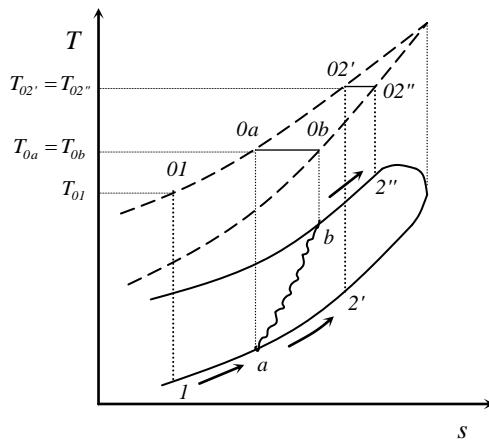


figura 5.6

Nel caso limite in cui  $T_{02} = T_0^*$  il fluido evolverebbe fino allo stato  $M = 1$  sia che viaggia di regime subsonico che supersonico.

Nel caso in cui  $T_{02} > T_0^*$  il deflusso non è realizzabile in quanto la quantità di calore  $q_{12}$  somministrata al fluido sarebbe maggiore della massima quantità di calore che il fluido può scambiare lungo la linea di Rayleigh:

$$q_{max} = c_p (T_0^* - T_{01})$$

ovvero non verrebbe rispettata la condizione principale  $T_{01} < T_{02} < T_0^*$ .

## 6. CIRCOLAZIONE DEI FLUIDI BIFASE

Un fluido si dice bifase quando è costituito da due fasi fisiche distinte una liquida ed una gassosa. Una miscela di acqua ed aria, ad esempio, costituisce una miscela bifase, come pure una miscela di acqua e vapore d'acqua in equilibrio con essa. L'interesse scientifico e tecnico per queste miscele è grandissimo per le notevoli applicazioni che si possono avere. Si pensi, ad esempio, agli impianti nucleari<sup>2</sup>, agli impianti solari<sup>3</sup>, agli impianti termotecnici civili ed industriali (si pensi alle caldaie e ai generatori di vapore). Il moto delle miscele bifase pone diversi problemi di calcolo fluidodinamico per le diverse azioni inerziali che esercitano la fase liquida e la fase gassosa.

In generale uno studio analitico completo richiede l'applicazione delle equazioni di Navier Stokes e dell'energia (vedi Convezione termica) sia per la fase liquida che per quella gassosa.

Inoltre, a causa dei diversi regimi di moto che si possono instaurare nel moto bifase (vedi dopo), si ha la doppia necessità di scrivere ed integrare le suddette equazioni di equilibrio sia nel dominio dello spazio (cioè in zone omogenee) che del tempo (condizioni tempo varianti).

Se il moto dei fluidi bifase è associato anche ad uno scambio energetico (ad esempio in un tubo bollitore di una caldaia o di un impianto nucleare) allora si hanno, contemporaneamente ai fenomeni fluidodinamici, fenomeni di cambiamento di fase (ebollizione e/o condensazione) che complicano non poco le equazioni di bilancio. Così, ad esempio, perdite di pressione nell'ebollizione sottoraffreddata sono più elevate di quelle in ebollizione ordinaria e pur tuttavia l'incremento non è eccessivo.

Le perdite di pressione bifase sono sempre maggiori di quelle monofasi e pertanto occorre sempre stimarle correttamente per evitare problemi di sottodimensionamento delle pompe di circolazione. L'equazione dell'energia già vista all'inizio del corso sotto forma di equazione di Bernoulli generalizzata può essere scritta in forma differenziale nella forma:

$$-dp = \frac{wdw}{v} + \rho gdz + \xi \frac{dl}{d} \frac{w^2}{2v} + \frac{dL_m}{v}$$

Ricordando l'equazione di continuità  $\dot{m} = \rho w S$  l'equazione di Bernoulli generalizzata si può ancora scrivere nella forma:

$$-dp = \frac{\dot{m}^2}{S^2} dv + \gamma dz + \xi \frac{1}{d} \frac{\dot{m}^2}{2S^2} v dl + \frac{dL_m}{v} \quad A)$$

ove si ha il seguente simbolismo:

- $\gamma$  peso specifico del fluido,  $kg/m^3$ ;
- $\rho$  densità del fluido,  $kg/m^3$ ;
- $v$  volume specifico del fluido,  $m^3/kg$ ;
- $w$  velocità del fluido,  $m/s$ ;
- $L_m$  lavoro motore sul fluido,  $J/kg$ ;
- $\xi$  fattore d'attrito del condotto;
- $d$  diametro (o diametro equivalente) del condotto,  $m$ ;
- $l$  lunghezza del condotto,  $m$ ;
- $p$  pressione nel fluido,  $Pa$ ;
- $\dot{m}$  portata di massa del fluido,  $kg/s$ .
- $g$  accelerazione di gravità,  $m^2/s$ .

<sup>2</sup> Nei reattori ad acqua bollente si ha una circolazione di acqua con piccole percentuali di vapore in equilibrio termico. Questo fluido assolve sia alle funzioni di refrigerazione che di moderazione neutronica.

<sup>3</sup> Le centrali eliotermiche di potenza utilizzano sia miscele acqua-vapore (centrali tipo Francia) che di metalli liquidi (Sodio fuso o leghe NaK o similari). Anche i collettori a vetro usano una miscela bifasica costituita da freon liquido e aeriforme.

Si osservi che qualora ci riferisce alla velocità media del fluido nella sezione di passaggio del condotto occorre tenere conto, nelle precedenti relazioni, di un fattore pari a 1.2 per moto turbolento e 1.8 per moto laminare, cioè occorre scrivere  $\alpha\bar{w}$  al posto della sola velocità.

A questa equazione si associa l'equazione dell'energia per sistemi aperti stazionari:

$$q + l = \Delta_{1-2} \left( \frac{w^2}{2} + gz + h \right)$$

ove si è indicato con:

- $h$  l'entalpia del fluido,  $J/kg$ ;
- $q$  il calore fornito all'unità di massa di fluido,  $J/kg$ ;
- $l = l_m + l_r$  il lavoro totale fornito all'unità di massa di fluido,  $J/kg$ .

Data l'arbitrarietà nella scelta delle sezioni di integrazione si fa in modo da non avere, all'interno del condotto in esame, alcun organo motore e pertanto possiamo annullare il lavoro motore presente nelle precedenti equazioni.

Integrando l'equazione di Bernoulli generalizzata fra due sezioni 1 e 2 prive di organi motori si ottiene la seguente espressione:

$$p_1 - p_2 = \underbrace{\frac{\dot{m}^2}{S^2} (v_2 - v_1)}_{Slip} + \underbrace{\int_1^2 \frac{dz}{v}}_{Gravimetriche} + \underbrace{\frac{\dot{m}^2}{2S^2} \frac{1}{d} \int_1^2 \xi v dl}_{Attrito} \quad B)$$

Questa equazione dice chiaramente che la differenza di pressione fra la sezione iniziale e finale nel condotto esaminato è somma dei tre termini a secondo membro che esprimono, nell'ordine:

- le perdite di pressione per effetto della variazione di energia cinetica (*perdite di slip*);
- per perdite per alleggerimento termico dovute all'azione della gravità;
- le perdite di attrito totali dovute alla viscosità del fluido.

Nel caso di moto bifase le perdite di *slip* debbono tenere conto anche delle diverse velocità delle due fasi e quindi dell'attrito virtuale che si viene a determinare nel moto relativo (scorrimento o *slip*) della fase più veloce rispetto a quella più lenta. Questo termine presenta notevoli difficoltà di calcolo anche in considerazione del tipo di moto che si instaura nel condotto. Le perdite gravimetriche sono certamente le più semplici da valutare, come si vedrà nel prosieguo. Le perdite di attrito sono nuovamente complesse da determinare proprio per l'eterogeneità del fluido bifase e del tipo di moto nel condotto.

## 6.1. TIPI DI MOTO BIFASE

Per condotti verticali si è avuto modo di esaminare i regimi di flusso che si instaurano durante l'ebollizione dinamica in un tubo bollitore, come illustrato dalla Figura 3. I regimi possono essere:

- *Moto a bolle*: il vapore si muove sotto forma di bolle sparse in una matrice di liquido;
- *Moto a tappi*: il vapore è presente in quantità elevate e tali da creare, per coalescenza fra bolle vicine, dei veri e propri tappi interni al condotto;
- *Moto anulare*: il liquido si muove in aderenza alle pareti e il vapore nel cuore interno della sezione del condotto;
- *Moto a nebbia*: il liquido è quasi del tutto evaporato ed occupa tutto il volume disponibile mentre il liquido, in quantità residuali, si muove sotto forma di minute goccioline sparse nella matrice di vapore.

Ciascuna di queste tipologie di flusso richiede un tipo di analisi particolare per la necessità, come sopra accennato, di dovere integrare le equazioni di Navier Stokes e dell'energia in zone di spazio spesso determinate casualmente e quindi senza alcuna possibilità pratica di previsione analitica.

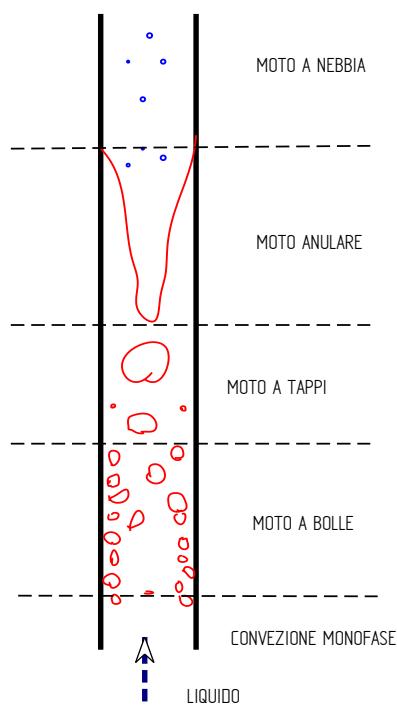


Figura 3: Regimi di moto in condotto verticale durante l'ebollizione

Del resto anche l'istaurarsi del regime di moto non è facile da prevedere anche se esistono alcune mappe sperimentali che delimitano, certamente non in modo preciso, i campi di esistenza dei vari regimi di flusso.

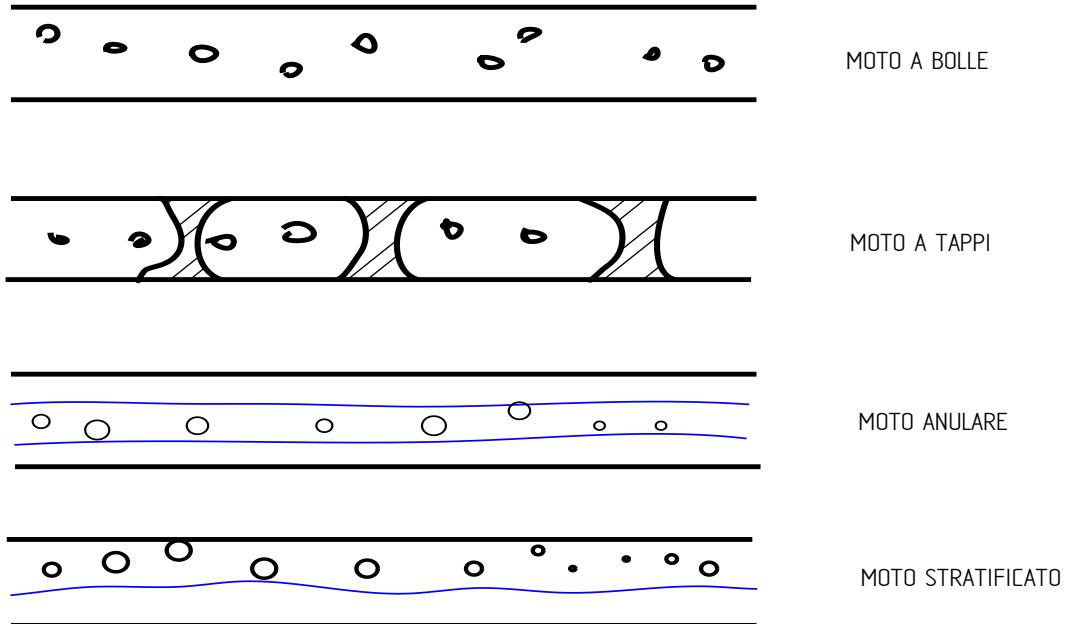


Figura 4: Regimi di moto in condotto orizzontale durante l'ebollizione

Oltre ai regimi visti in precedenza si ha il moto *stratificato* nel quale la fase liquida si mantiene, per gravità, in basso e la frazione aeriforme nella parte superiore sotto forma di bolle. L'istaurarsi di un regime di moto piuttosto che un altro dipende fortemente dai rapporti delle portate della fase liquida e della fase aeriforme. I profili di velocità nel moto bifase non hanno una definizione ben precisa, come del resto si può intuire, e spesso si ricorre a rappresentazioni fittizie di tipo polinomiali determinate con esperienze mirate per particolari regimi di moto.

In Figura 4 si ha un esempio di regimi di flusso per l'ebollizione in condotti orizzontali.

## 6.2. CALCOLO DELLE PERDITE DI PRESSIONE IN REGIME BIFASE

In calcolo delle perdite di pressione nel moto bifase è stato oggetto di studi da diversi decenni.

Inizialmente in mancanza di sperimentazioni pratiche si è cercato di proporre metodi analitici basati su ipotesi di moto semplificati e in particolare immaginando che il fluido complessivo bifase fosse determinato dalle caratteristiche medie di un fluido omogeneo opportunamente definito.

Negli anni ‘settanta’ si sono avute le prime sperimentazioni di Martinelli e Nelson che hanno portato alla definizione di metodi semiempirici ritenuti più affidabili di quelli solamente teorici.

Negli anni ‘novanta’ le esperienze di Thom hanno fornito una metodologia semiempirica completa oggi ritenuta fondamentale per il calcolo delle perdite di pressione in regimi bifasi.

### 1.1.6. METODO DI HANFORD

E’ uno dei primi metodi di calcolo analitico delle perdite di pressione e si basa su alcune ipotesi semplificative che qui riportiamo:

- Si suppone il condotto orizzontale e quindi si trascurano le perdite gravitazionali;
- Il fluido si suppone omogeneo avente volume specifico dato dalla relazione:

$$\nu_m = \frac{\nu_l + \nu_v}{2}$$

ove, per miscele saturate, si ha, come si ricorda dalla Termodinamica:  $\nu = \nu_l + x(\nu_v - \nu_l)$  con  $\nu_l$  volume specifico del liquido,  $\nu_v$  volume specifico del vapore ed  $x$  titolo della miscela. Inoltre il punto 1 indica l’ingresso del condotto e 2 l’uscita. La velocità media del fluido è data dalla relazione inversa di Leonardo:  $\bar{w} = \dot{m}/\rho S$ . Si definisce, inoltre, la fluidità (inverso della viscosità newtoniana) data dalla relazione:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1-x}{\mu_l} + \frac{x}{\mu_v}$$

con la solita convenzione sui pedici. La fluidità media del fluido omogeneo è data, analogamente a quanto visto per volume specifico medio, dalla relazione:

$$\mu_m = \frac{\mu_l + \mu_v}{2}$$

essendo 1 e 2 l’ingresso e l’uscita del condotto considerato. Nel caso di un tubo bollitore o in ogni caso con scambi termici con l’esterno l’ipotesi di un fluido omogeneo per lunghi condotti appare poco realistica e in ogni caso fortemente dipendente, per via dei volumi specifici e delle viscosità, dalle pressioni locali nelle sezioni di condotto. Pertanto si può suddividere il condotto in tratti di piccola lunghezza all’interno dei quali le ipotesi di omogeneità appaiono maggiormente valide. Per ogni condotto si può scrivere, con l’ipotesi  $dz=0$ , l’equazione di Bernoulli:

$$p_1^{(i)} - p_2^{(i)} = \frac{\dot{m}^2}{S^2} (\nu_2^{(i)} - \nu_1^{(i)}) + \frac{\dot{m}^2}{2S^2} \frac{1}{d} \xi^{(i)} \nu_m^{(i)} l^{(i)}$$

ove con l’apice  $(i)$  si intende il generico tratto del condotto.

In pratica partendo dal primo tratto, nel quale è nota la pressione  $p_1^{(1)}$ , si determina la pressione di uscita  $p_2^{(1)}$  che è poi la pressione di ingresso del secondo tratto, cioè si ha  $p_1^{(2)} = p_2^{(1)}$  e così via per gli altri tronchi fino ad arrivare alla  $p_2$  d’uscita dell’ultimo tronco che coincide con la pressione finale all’uscita del condotto.

In definitiva la somma delle equazioni parziali dei singoli tratti porta all’equazione totale:

$$p_1 - p_2 = \frac{\dot{m}^2}{S^2} \sum_1^2 (\nu_2^{(i)} - \nu_1^{(i)}) + \frac{\dot{m}^2}{2S^2} \frac{1}{d} \sum_1^2 \xi^{(i)} \nu_m^{(i)} l^{(i)}$$

Il coefficiente di attrito  $\xi$  può essere calcolato con la classica relazione di Weissbach valida per tubi lisci:

$$x = 0.184 \text{ Re}^{-0.2}$$

per cui per ogni singolo tratto si può scrivere l'equazione di bilancio<sup>4</sup>:

$$p_1^{(i)} - p_2^{(i)} = \frac{\dot{m}^2}{S^2} (v_2^{(i)} - v_1^{(i)}) + 0.184 \left( \frac{\dot{m}}{S} \right)^{1.8} \frac{d^{-1.2} \mu_{(i)}^{0.2}}{2} v_m^{(i)} l^{(i)}$$

Per calcolare il volume specifico medio,  $v_m$ , occorre conoscere come varia il titolo in funzione della lunghezza e della pressione parziale del tratto considerato. L'equazione dell'energia per il singolo tratto (sempre supposto orizzontale) diviene:

$$q_e^{(i)} = \Delta^{(i)} \left( h + \frac{\bar{w}^2}{2} \right)$$

L'entalpia della miscela bifase in una generica sezione  $(i)$  è dato da:

$$h = h_l + xr$$

ove  $r$  è il calore latente di vaporizzazione alla pressione parziale nel tratto. Fra le sezioni 1 e 2 di ciascun tratto si ha:

$$\Delta_{1,2} = \Delta h_l + r_2 x_2 - r_1 x_1$$

ove  $r_2$  ed  $r_1$  sono i calori latenti di vaporizzazione alle pressioni  $p_2$  e  $p_1$  ed è:

$$\Delta h_l = h_{l_2} - h_{l_1}$$

la variazione delle entalpie specifiche del liquido alle pressioni suddette. Combinando le precedenti equazioni si ha, per la velocità media, l'espressione:

$$\bar{w} = \frac{\dot{m}}{S} v = \frac{\dot{m}}{S} [v_l + x(v_v - v_l)]$$

Pertanto si ha:

$$\Delta \frac{\bar{w}^2}{2} = \frac{\dot{m}^2}{2S^2} [v_{l_1} + x_2(v_{v_2} + v_{l_2})]^2 - [v_{l_1} + x_1(v_{v_1} + v_{l_1})]^2$$

ove  $v_l$  e  $v_v$  sono note una volta conosciute le pressioni  $p_2$  e  $p_1$ .

Si osservi che i volumi specifici del liquido, non appena il titolo  $x$  supera qualche centesimo, divengono trascurabili di fronte ai volumi specifici del vapore, per cui la precedente diviene:

$$\Delta \frac{\bar{w}^2}{2} \approx \frac{\dot{m}^2}{2S^2} [x_2^2 v_{v_2}^2 - x_1^2 v_{v_1}^2]$$

Con gli sviluppi sopra esposti si può applicare il metodo di Hanford per approssimazioni successive. Nota la pressione iniziale del primo tratto si stima la pressione di uscita dello stesso tratto e si calcola la  $x_2$  dello stesso tratto (eventualmente risolvendo l'equazione di 2° grado sopra indicata).

A questo scopo, trascurando il termine cinetico (di solito piccolo rispetto ai termini termici) si può scrivere:

$$q_e^{(1)} - \Delta^{(1)} h_l + r_1^{(1)} x_1^{(1)} = r_2^{(1)} x_2^{(1)}$$

Il calore fornito  $q_e^{(1)}$  può essere calcolato dalla relazione:

<sup>4</sup> Si ricordi che è  $\text{Re} = \rho w d / \mu = \rho w d / \mu = d \dot{m} / \mu S$  e quindi è  $\xi = 0.184 \text{ Re}^{-0.2} = 0.184 \left( \frac{d}{\mu} \right)^{0.2} \left( \frac{\dot{m}}{S} \right)^{-0.2}$ .

$$q_e^{(1)} = \frac{1}{m} \int_1^{l^{(1)}} q b dz$$

con  $b$  perimetro del condotto. nota  $x_2^{(1)}$  si ricava  $v_2^{(1)}$  dalla relazione:

$$v_2^{(1)} = v_{l_2}^{(1)} + x_2^{(1)} (v_{v_2}^{(1)} - v_{l_2}^{(1)})$$

e quindi:

$$v_m^{(1)} = \frac{v_1^{(1)} + v_2^{(1)}}{2}$$

Si calcola poi:

$$\mu_m^{(1)} = \frac{\mu_1^{(1)} + \mu_2^{(1)}}{2}$$

Ora si ricava il valore della pressione di uscita  $p_2^{(1)}$  che di solito differisce da quella inizialmente stimata. Se la differenza è minore dell'errore massimo tollerabile allora si procede con il tratto successivo reiterando le operazioni appena descritte.

Nel caso di differenza maggiore dell'errore ammissibile allora si assume la  $p_2^{(1)}$  appena calcolata e si riparte per una nuova iterazione fino a quando la differenza fra il valore di calcolo attuale e quello del ciclo precedente è minore dell'errore ammissibile.

La caduta di pressione totale è quindi data da:

$$\Delta p_{1,2} = \sum_{i=1}^{i=N} (p_1^{(i)} - p_2^{(i)})$$

### Osservazioni sul metodo di Hanford.

L'ipotesi di modello omogeneo, alla base del metodo di Hanford, presuppone che la fase aeriforme sia in percentuale piccolissima (o che si abbia moto a nebbia) o che la pressione media sia elevata e vicina alla pressione critica del fluido.

Si ricordi, infatti, che alla pressione critica non si ha differenza fra la fase liquida e quella aeriforme. In queste condizioni la precisione del metodo è dell'ordine del 30% che, in mancanza di altri dati sperimentali, è da considerarsi buona per le applicazioni impiantistiche.

Nelle situazioni diverse da quelle sopra indicate il metodo di Hanford commette errori non trascurabili. E va utilizzato con molta cautela.

### 1.1.7. CONDOTTI VERTICALI - CALCOLO DELLE PERDITE GRAVIMETRICHE

Nel caso di condotti verticali occorre valutare anche il termine gravimetrico (prima del tutto trascurato), cioè il termine:

$$\Delta p_{grav.} = \int_1^2 \frac{dz}{v}$$

Vediamo adesso una semplice metodologia per effettuare questo calcolo. Si supponga di avere un flusso termico uniforme lungo la lunghezza del condotto e che il salto di pressione sia piccolo<sup>5</sup>.

Allora si può scrivere:

$$dq_e = rdx$$

ovvero:

---

<sup>5</sup> Il salto di pressione  $\Delta p$  è pari alla caduta di pressione totale e pertanto questo deve essere comunque limitato nelle applicazioni impiantistiche onde evitare eccessive potenze di pompaggio.

$$dq_e = \frac{qb}{m} dz = rdx$$

con  $z$  lunghezza del condotto a partire dall'ingresso,  $b$  il perimetro e  $q$  il flusso termico specifico ( $J/m^2$ ). Questa relazione ci dice che la variazione del titolo è proporzionale alla lunghezza progressiva, per cui, supponendo che sia  $x_i=0$ , si ha:

$$v = v_l + x(v_v - v_l) = v_l + \frac{x_2}{l}(z - z_l)(v_v - v_l)$$

Sostituendo nell'espressione di  $\Delta p_{grav}$  si ha (per  $i=z_2 - z_l$ ):

$$\Delta p_{grav.} = \int_1^2 \frac{dz}{v} = \frac{z_2 - z_l}{x_2(v_v - v_l)} \ln \frac{v_v + x_2(v_v - v_l)}{v_l}$$

Questa perdita va sommata alle perdite per slip e per attrito.

### 1.1.8. METODO DI MARTINELLI E NELSON

Negli anni 'settanta, data la complessità analitica del problema, si effettuarono numerose esperienze per determinare le cadute di pressione in miscele bifasiche di acqua ed aria.

Inizialmente Lochkart e Martinelli definirono un *moltiplicatore*,  $X_{tt}$ , definito come radice quadrata del rapporto fra la caduta di pressione nella fase liquida e la caduta di pressione nella fase aeriforme ed è dato a sua volta dalla relazione:

$$X_{tt} = \sqrt{\frac{\Delta p_l}{\Delta p_v}} = \left( \frac{1-x}{x} \right)^{0.9} \left( \frac{\rho_v}{\rho_l} \right)^{0.5} \left( \frac{\mu_l}{\mu_v} \right)^{0.1}$$

con  $x$  titolo del vapore e con il solito significato per gli altri simboli. In Figura 5 si ha l'andamento delle curve sperimentali che forniscono il moltiplicatore di Martinelli,  $X_{tt}$ , al variare della pressione e del titolo della miscela.

Si osservi, però, che il titolo della miscela non è costante lungo il condotto per cui sarebbe necessario conoscere la legge di variazione di  $x$  e procedere a successive integrazioni.

Successivamente sono state elaborate altre curve sperimentali alla base del metodo di calcolo semiempirico detto di *Martinelli e Nelson*.

Se si suppone, almeno inizialmente, che il titolo vari linearmente fra ingresso e uscita (con  $x=0$  in ingresso del condotto) e che vi sia somministrazione uniforme di calore allora *Martinelli e Nelson* definiscono il rapporto:

$$M = \frac{\Delta p_{2Fa}}{\Delta p_{1Fla}}$$

ove si ha il seguente simbolismo:

- $\Delta p_{2Fa}$       caduta di pressione per attrito per moto bifase,  $Pa$ ;
- $\Delta p_{1Fla}$       caduta di pressione per attrito per portata totale pensata di solo liquido,  $Pa$ .

In definitiva  $M$  (sempre  $>1$ ) è il rapporto fra le cadute di pressione per attrito nelle reali condizioni di moto bifase rispetto a quelle che si avrebbero, sempre per attrito, se la portata totale fosse di solo liquido.

Queste ultime sono calcolabili facilmente con i metodi della Fluidodinamica monofase visti nei precedenti capitoli e pertanto se si conosce  $M$  di possono calcolare le perdite di attrito bifase mediante la relazione:

$$\Delta p_{2Fa} = M \Delta p_{1Fla}$$

Martinelli e Nelson hanno determinato l'andamento sperimentale di  $M$  partendo dalle curve di Lochkart – Martinelli, come rappresentato nell'abaco di Figura 6.

L'abaco fornisce  $M$  al variare della pressione nel condotto per assegnato titolo,  $x_2$ , in uscita.

Si osservi come sia sempre  $M>1$  (quindi le perdite bifase sono sempre maggiori di quelle monofase) e come le curve tendano a congiungersi per la pressione critica dell'acqua (222 bar) laddove non si ha più alcuna differenza fra la fase liquida e il vapore.

Se il titolo in ingresso è  $x_1 \neq 0$  allora si può procedere in questo modo, vedi Figura 7:

- si calcola la  $M_1$  corrispondente alla caduta di pressione fittizia di un condotto avente titolo in ingresso nullo e in uscita pari ad  $x_1$ ;
- Si calcola  $M_2$  per un condotto fittizio nelle condizioni di titolo in ingresso 0 e in uscita  $x_2$ ;
- Si calcola il fattore  $M$  per condotto con titolo in ingresso  $x_1$  e in uscita  $x_2$  dalla differenza:

$$M = M_1 - M_2$$

pertanto le perdite di pressione sono date da:

$$\Delta p_{2Fa} = (M_2 - M_1) \Delta p_{1Fla}$$

Ricordando quanto detto per le cadute totali di pressione:

$$\Delta p_{tot} = \Delta p + \Delta p_{Slip} + \Delta p_{Gravimetrico} + \Delta p_{Attrito}$$

il metodo di Martinelli e Nelson consente di calcolare le cadute di pressione per attrito

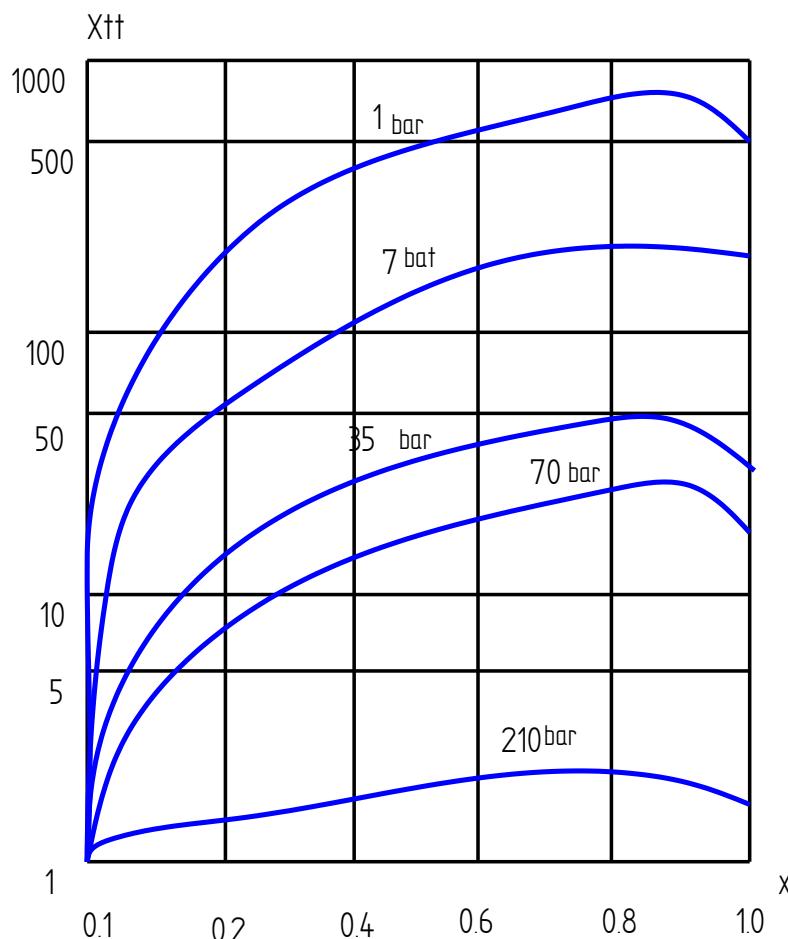


Figura 5: Diagramma del moltiplicatore  $X_{tt}$  di Martinelli

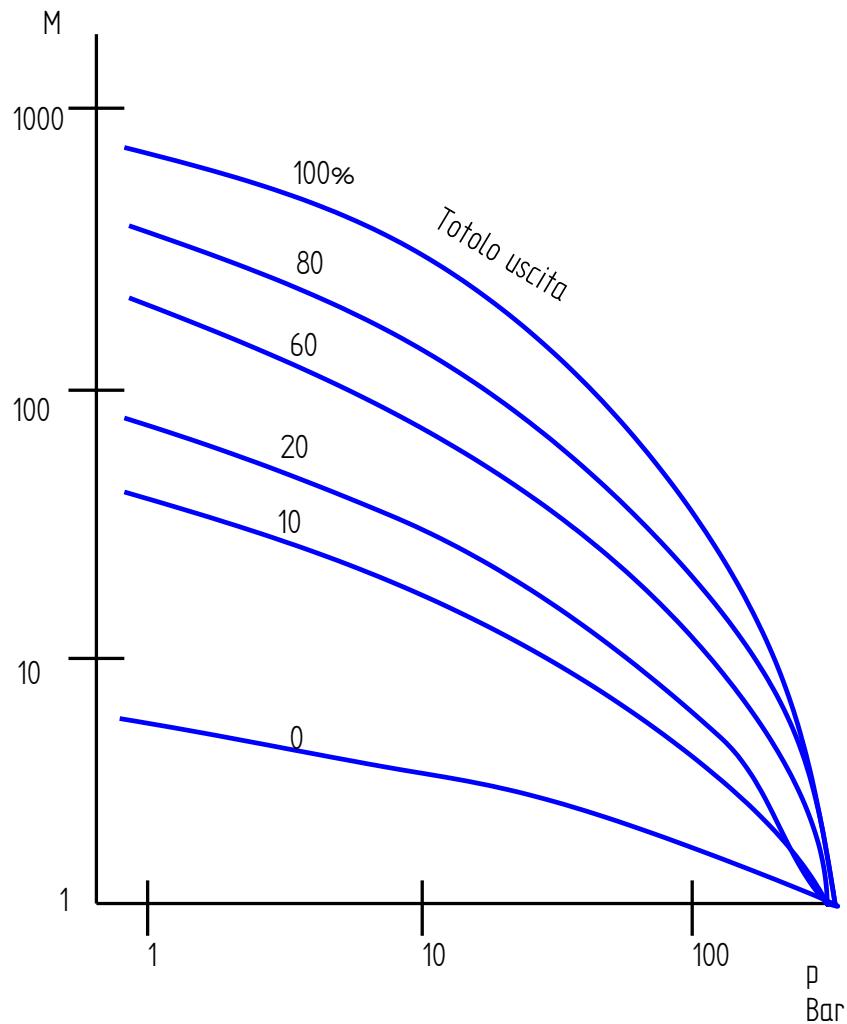
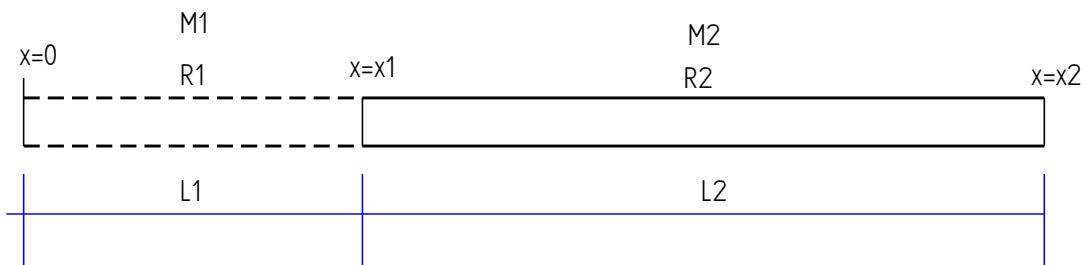
Figura 6: Abaco di Martinelli e Nelson per  $M$ 

Figura 7: Condizioni iniziali con titolo non nullo

Il termine relativo alle cadute di pressione per slip può essere calcolato, sempre sperimentalmente, ponendo:

$$\Delta p_{\text{slip}} = \frac{\dot{m}^2}{S^2} (v_2 - v_1) = R \frac{\dot{m}^2}{S^2}$$

con  $R$  (ove è, per quanto detto in precedenza,  $R = v_2 - v_1$ ) coefficiente dato dall'abaco di Figura 8.

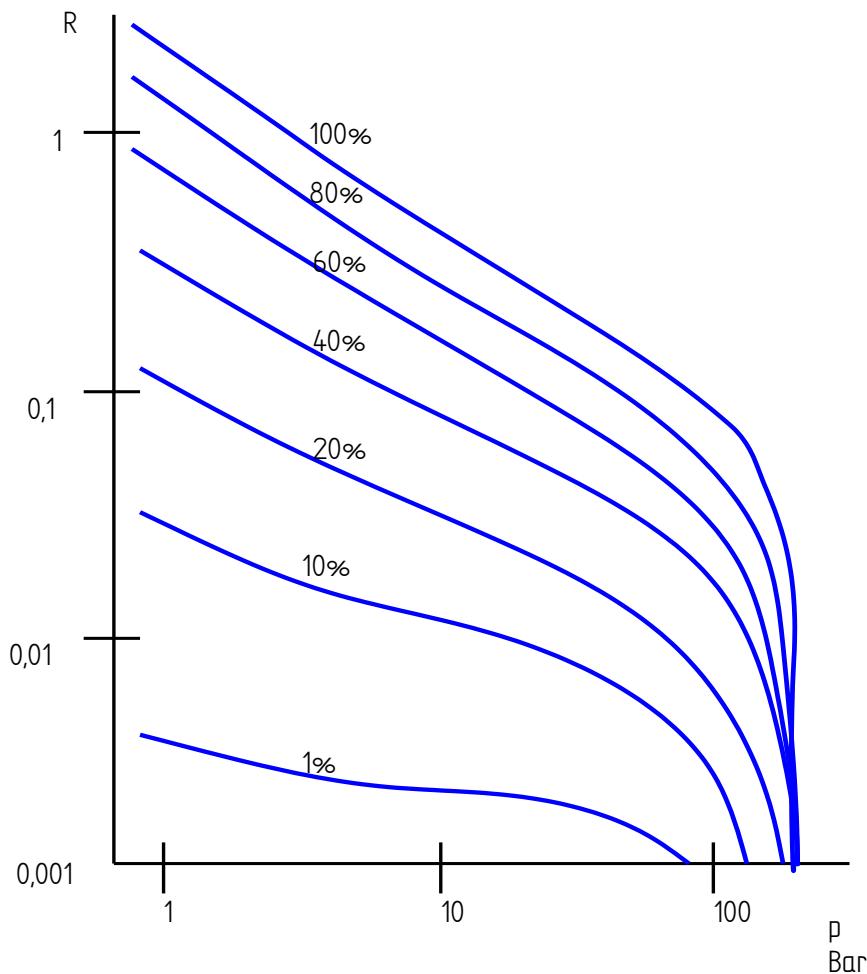


Figura 8: Abaco di Martinelli e Nelson per R

Nel caso in cui le condizioni iniziali del titolo siano  $x_1 \neq 0$  allora, in analogia a quanto detto per il calcolo di  $M$  e con riferimento alla Figura 7, si procede così:

- Si calcola  $R_1$  per il tratto fittizio con titolo variabile da 0 a  $x_1$ ;
- Si calcola  $R_2$  per il condotto fittizio con titolo variabile da 0 a  $x_2$ ;
- Si calcola il valore reale:  $R = R_2 - R_1$ .

Se nel condotto si hanno anche perdite concentrate allora queste debbono essere valutate per la sola fase liquida per una portata di liquido equivalente a quella totale. Le perdite di attrito  $\Delta p_{1Fla}$  sono date da:

$$\Delta p_{1Fla} = (\Delta p_{1Fla})_{distribuite} + (\Delta p_{1Fla})_{concentrate}$$

e le perdite bifase totali corrispondenti si calcolano moltiplicando le precedenti per il coefficiente  $R$  calcolato come sopra specificato.

### Osservazioni sul Metodo di Martinelli e Nelson

Questo metodo ha come ipotesi di base l'esistenza di due fasi distinte e quindi è in netta contrapposizione con il modello omogeneo di Hanford. Il modello di riferimento è, quindi, quello del moto *anulare* o del moto *stratificato* o anche del moto a *nebbia*.

I risultati ottenuti con questo metodo vanno bene fino a titoli elevati in uscita (anche  $x_2 = 1$ ). Esso è tutt'oggi quello più utilizzato per portate specifiche ( $m/S$ ) elevate.

I risultati sperimentali, ottenuta da Muscettola del *CISE*<sup>6</sup>, mostrano una sopravvalutazione di circa il 20% delle perdite di pressione. Ciò è ritenuto dai progettisti una garanzia di maggior sicurezza sia per le inevitabili incertezze progettuali che per tenere conto dell'invecchiamento del condotto e quindi dell'aumento delle perdite localizzate<sup>7</sup>. Il metodo di Martinelli e Nelson non fornisce metodi di calcolo del termine gravimetrico e quindi occorre effettuare separatamente questo calcolo, ad esempio come illustrato in precedenza (§1.1.7).

### 1.1.9. METODO DI THOM

Le ipotesi di base sono quindi analoghe a quelle di Martinelli e Nelson e pertanto si ha un modello a fasi separate. Le ipotesi di base sono quindi analoghe a quelle di Martinelli e Nelson e pertanto si ha un modello a fasi separate.

E' il metodo semiempirico più recente e si basa su una serie di esperienze effettuate negli USA negli anni cinquanta su miscele di acqua e vapore con pressioni variabili da 1 a 210 bar e titolo in uscita variabile da 3 al 100%.

Il flusso termico è stato mantenuto uniforme (ipotesi fondamentale) lungo la superficie laterale del condotto. Il titolo iniziale è sempre pari a zero.

Il metodo di Thom permette di calcolare tutti e tre i termini (slip, gravimetrico e attrito) per la caduta totale di pressione mediante abachi sperimentali.

Analogamente a quanto visto in precedenza si ha ancora la definizione del fattore  $M$ :

$$M = \frac{\Delta p_{2Fa}}{\Delta p_{1Fla}}$$

anche se le curve sono diverse da quelle di Figura 6. Le nuove curve sono riportate in Figura 9.

Le curve hanno andamento simile e convergono in corrispondenza della pressione critica dell'acqua. Si osservi ancora che Thom tiene conto dell'influenza dello scorrimento fra le due fasi mentre Martinelli e Nelson non ne tenevano conto.

Le perdite di slip si definiscono mediante la relazione:

$$\Delta p_{slip} = R' \frac{\dot{m}^2}{S^2} v_l$$

e quindi la formulazione è diversa da quella di Martinelli e Nelson anche per la presenza del volume specifico del liquido,  $v_l$ . Il coefficiente  $R'$  è riportato nell'abaco di Figura 10 per vari titoli di uscita e per varie pressioni di ingresso.

Infine le perdite gravimetriche sono calcolate mediante la relazione:

$$\Delta p_{grav.} = \int_{v_{ing.}}^{v_{usc.}} \frac{dz}{v} = \frac{1}{v_l} L \zeta$$

Il coefficiente  $\zeta$  è dato dall'abaco di Figura 11 per titoli di uscita e pressione di ingresso variabili.

La perdita totale di pressione nel tubo bollitore con titolo iniziale nullo è data da:

$$\Delta p_{tot} = \Delta p_{Slip} + \Delta p_{Gravimetrico} + \Delta p_{Attrito} = R' \frac{\dot{m}^2}{S^2} v_l + \frac{\zeta L}{v_l} + M \Delta p_{1Fla}$$

Thom estende il suo metodo semiempirico anche al caso in cui non ci sia somministrazione di calore: in questo caso restano le formulazioni precedenti ma il termine di attrito va calcolato utilizzando l'abaco di Figura 12 anziché quello di Figura 9.

Gli altri coefficienti restano invariati.

<sup>6</sup> Il CISE (*Centro Italiano Studi Elettricità*) si è occupato di impianti nucleari proponendo, negli anni sessanta, un tipo di reattore prova elementi combustibili denominato *CIRENE* (*CIse REattore Nebbia*) caratterizzato dal moto a nebbia all'interno dei canali di refrigerazione.

<sup>7</sup> L'invecchiamento del condotto porta al deposito di materiali (incrostazioni) e all'incremento delle asperità interne.

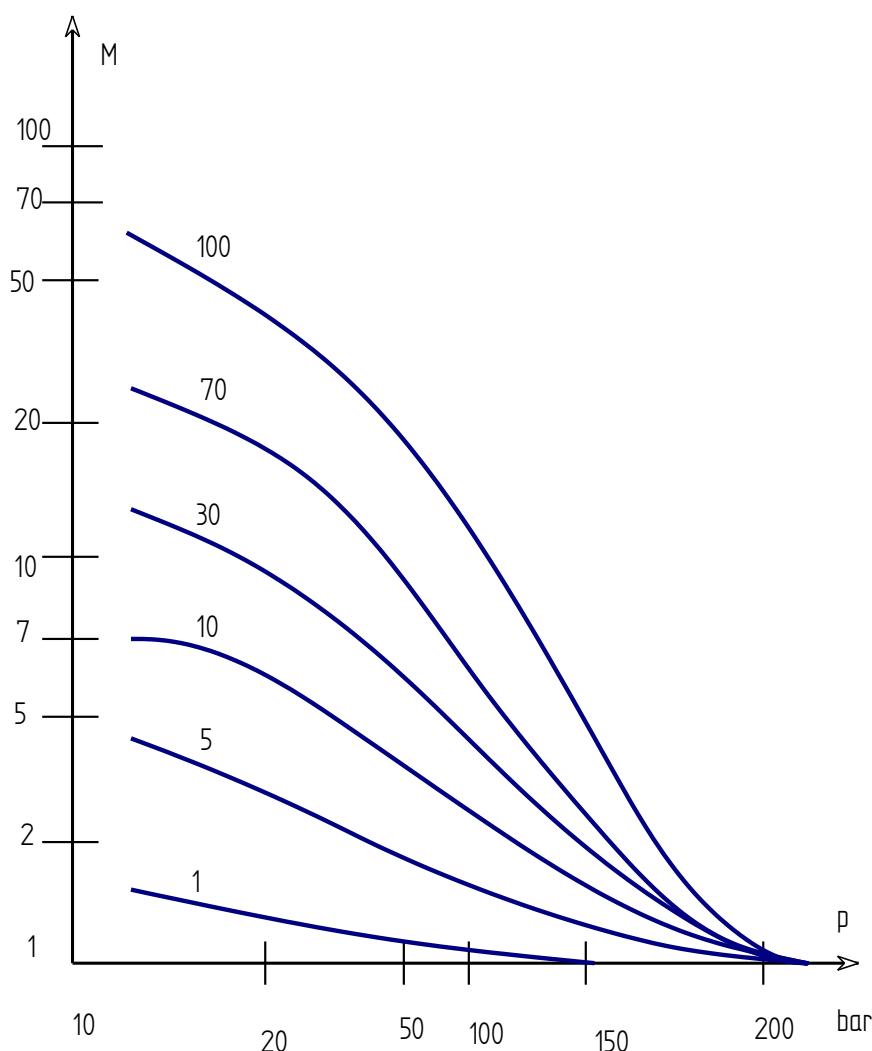


Figura 9: Abaco di Thom per  $M$

Per condizioni di ingresso diverse dal titolo nullo, come illustrato in Figura 7, si procede allo stesso modo già visto per Martinelli e Nelson utilizzando un condotto fittizio tale che per esso il titolo vari da  $x=0$  ad  $x=x_s$ .

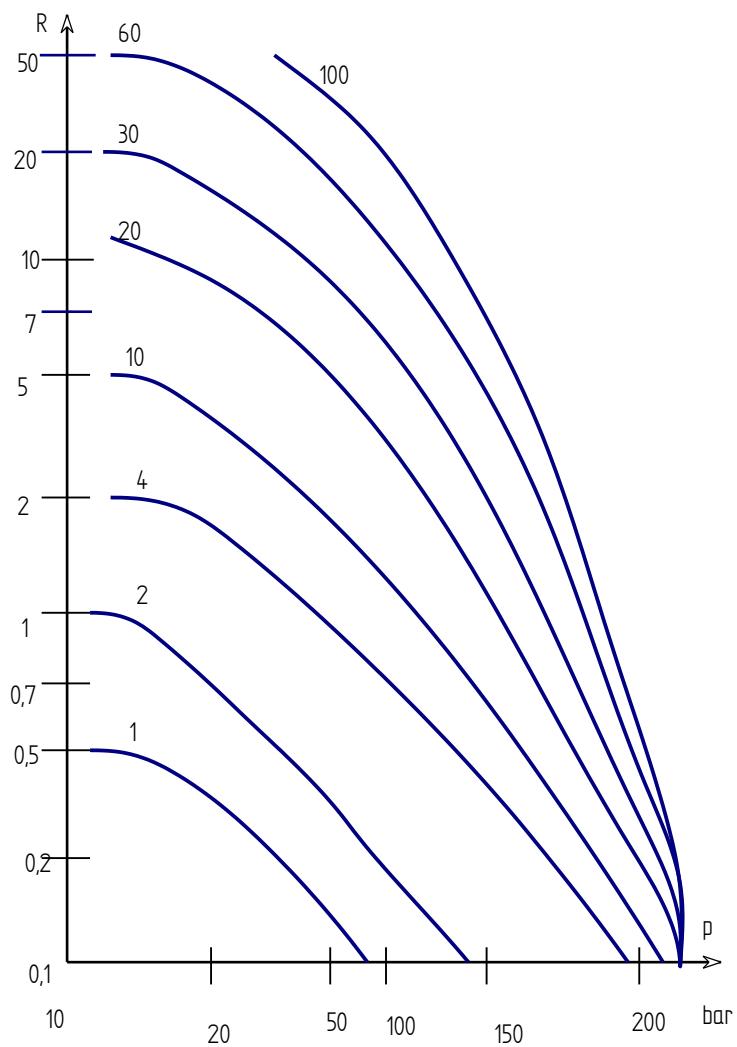
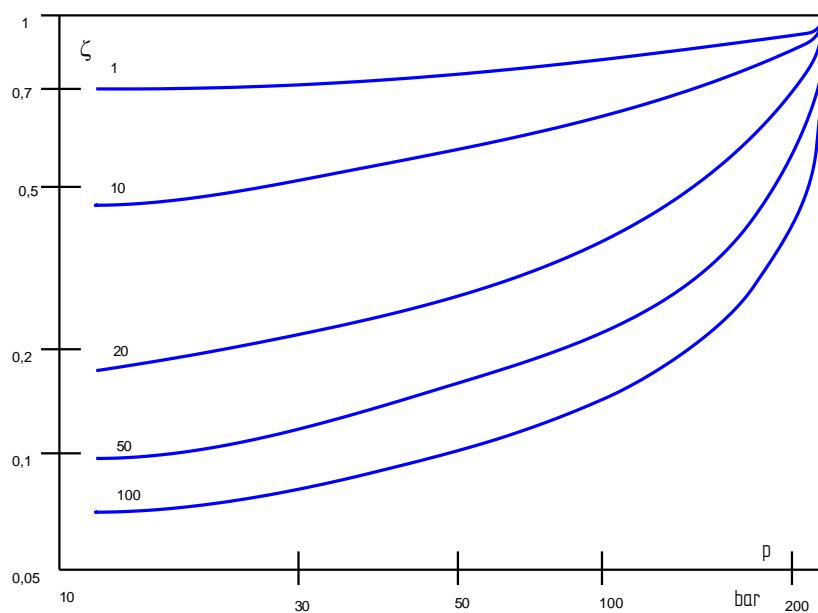
#### Osservazioni sul metodo di Thom

Rispetto al metodo di Martinelli e Nelson questo metodo presenta errori minimi rispetto ai dati sperimentali.

E' approssimato in eccesso quando le portate specifiche sono inferiori a  $230 \text{ g}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ .

Il metodo è approssimato in difetto per portate specifiche elevate, cioè  $> 230 \text{ g}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ .

Il metodo di Martinelli e Nelson presenta sempre valori stimati in eccesso rispetto ai dati sperimentali e l'errore si riduce allorquando il titolo di uscita si avvicina al 100%.

Figura 10: Abaco di Thom per  $R$ Figura 11: Abaco di Thom per  $\zeta$

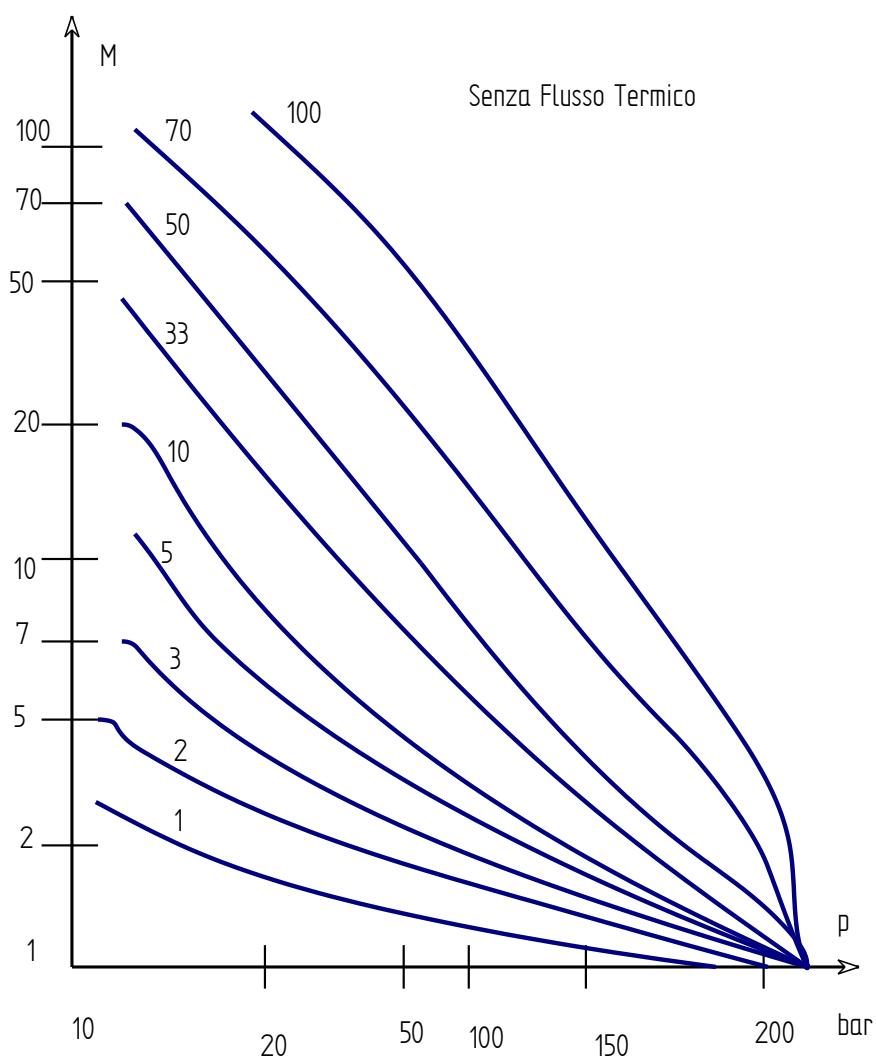


Figura 12: Abaco di Thom per  $M$  per condotto senza flusso termico

### 1.1.10. METODO DI CHENOVETH, MARTIN, LESTER

Si tratta ancora di un metodo semiempirico di rapida applicazione per la progettazione di impianti industriali. La sua validità si ha per diametri dei condotti  $> 2''$  (quindi tubi bollitori di caldaie e/o generatori di vapore) con miscela bifasica acqua – aria o acqua – vapore.

Analogamente ai due metodi precedenti, si definisce il fattore  $M$ :

$$M = \frac{\Delta p_{2Fa}}{\Delta p_{1Fla}}$$

con  $M$  dati in Figura 13, ove le curve sono in funzione del rapporto fra le cadute di pressione per attrito nella sola fase vapore rispetto a quelle analoghe della fase liquida:

$$\varphi = \frac{\Delta p_{1Fva}}{\Delta p_{1Fla}}$$

Nel calcolare questo rapporto si immagina di calcolare le perdite di pressione per attrito prima il condotto con solo vapore di portata pari a quella totale e poi di solo liquido con analoga portata totale.

In ascisse si ha la frazione di sezione occupata dal liquido,  $1-\alpha$ , essendo  $\alpha$  la frazione di vuoto definita dal rapporto fra l'area occupata dal vapore rispetto all'area totale della sezione del condotto:

$$\alpha = \frac{S_v}{S}$$

Questo metodo non è molto indicato per basse pressioni.

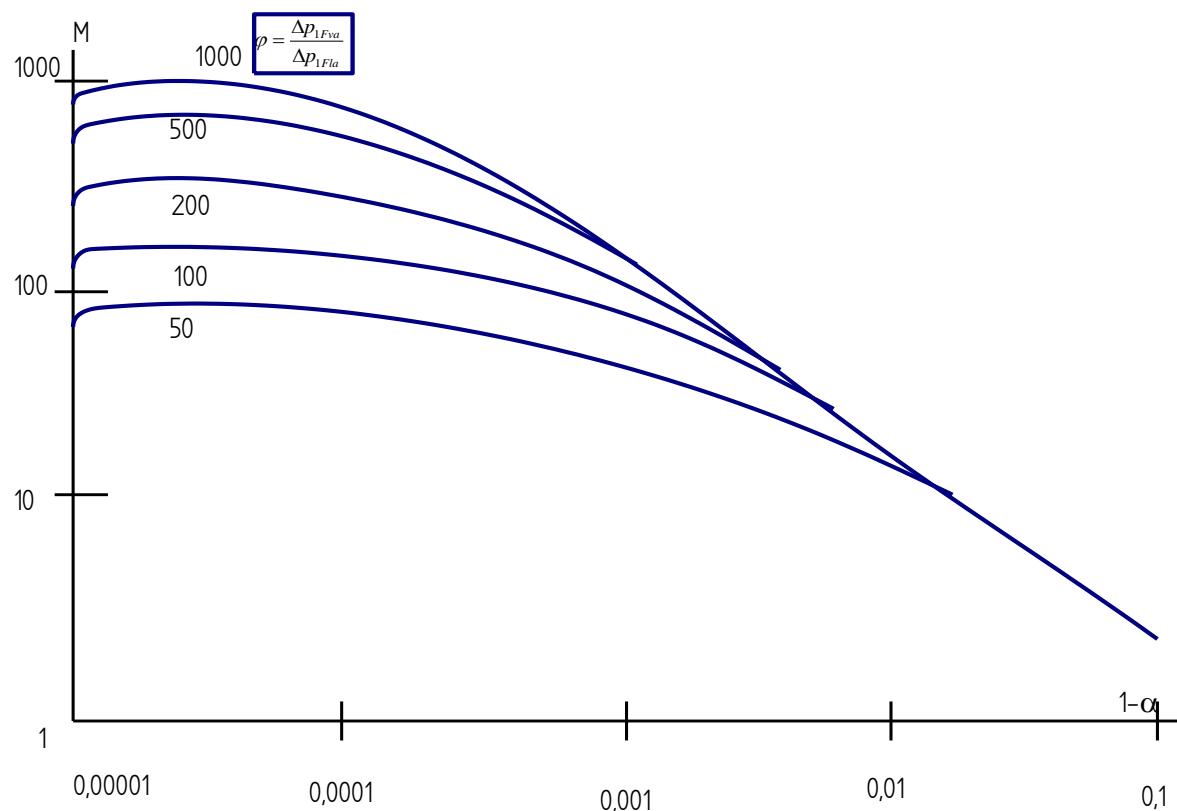


Figura 13: fattore  $M$  per C-M-L

## 7. STABILITÀ DEI TUBI BOLLITORI

Negli impianti industriali (caldaie, generatori di vapore, reattori chimici, ...) riveste grande importanza la stabilità e la sicurezza dei tubi bollitori all'interno dei quali si hanno i cambiamenti di stato dell'acqua (come di qualunque altra sostanza).

I fenomeni che possono avvenire all'interno dei tubi bollitori sono molteplici in funzione del flusso termico, delle proprietà termofisiche del fluido e della topologia dell'impianto.

### 7.1. TUBO BOLLITORE ORIZZONTALE

Si supponga inizialmente che il tubo bollitore sia orizzontale e a sezione costante, che sia nota la pressione di sbocco,  $p_2$ , e che sia uniforme e costante il flusso termico lungo le pareti.

Quando non c'è ebollizione a velocità elevate il numero di Reynolds varia poco con il variare della portata ponderale poiché alle diminuzioni di portata corrisponde, a parità di flusso termico, un incremento di temperatura del fluido secondo la relazione:

$$\frac{Q_e}{\dot{m}} = c(t_f - t_p)$$

essendo  $t_f$  la temperatura del fluido e  $t_p$  la temperatura della parete.

Pertanto la viscosità diminuisce ed essendo:

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\pi d^2} \frac{d}{\mu} = K \frac{\dot{m}}{\mu}$$

si può ritenere che il rapporto  $\dot{m}/\mu$  si mantenga sensibilmente costante. Viceversa avviene se la portata ponderale cresce poiché si avrebbe una diminuzione del salto termico ed un incremento della viscosità dinamica.

La caduta di pressione nel condotto, nell'ipotesi di assenza di ebollizione e quindi con flusso monofase, è data dalla solita relazione:

$$\Delta p = \xi \frac{L}{d} \frac{\dot{m}^2}{2S^2} v$$

ove per la relazione di Weissbach si ha:

$$\xi = 0.184 Re^{-0.2}$$

che varia poco essendo  $Re$  sensibilmente costante, come sopra illustrato.

Ne segue che possiamo scrivere, raggruppando i termini:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = K_1 \dot{m}^2$$

che, in coordinate  $(p, \dot{m}^2)$ , vedi Figura 14, è una retta passante per l'origine e coefficiente angolare  $K_1$ .(retta OR).

Un diagramma più preciso potrebbe essere tracciato per punti calcolando le perdite di pressione effettive. La retta OR rappresenta le condizioni di funzionamento fino alla portata  $\dot{m}_B$  in cui inizia l'ebollizione sottoraffreddata (vedi capitolo dell'*Ebolizione*). Al di sotto di questa portata si hanno perdite di pressione crescenti (si ricordi che le perdite bifase sono sempre maggiori di quelle monofasi) al diminuire della portata di massa anche perché, a pari flusso termico, cresce il titolo di vapore presente. Allo sbocco abbiamo:

$$\frac{Q_e}{\dot{m}} \approx rx_2$$

ove  $x_2$  è il titolo finale della miscela.

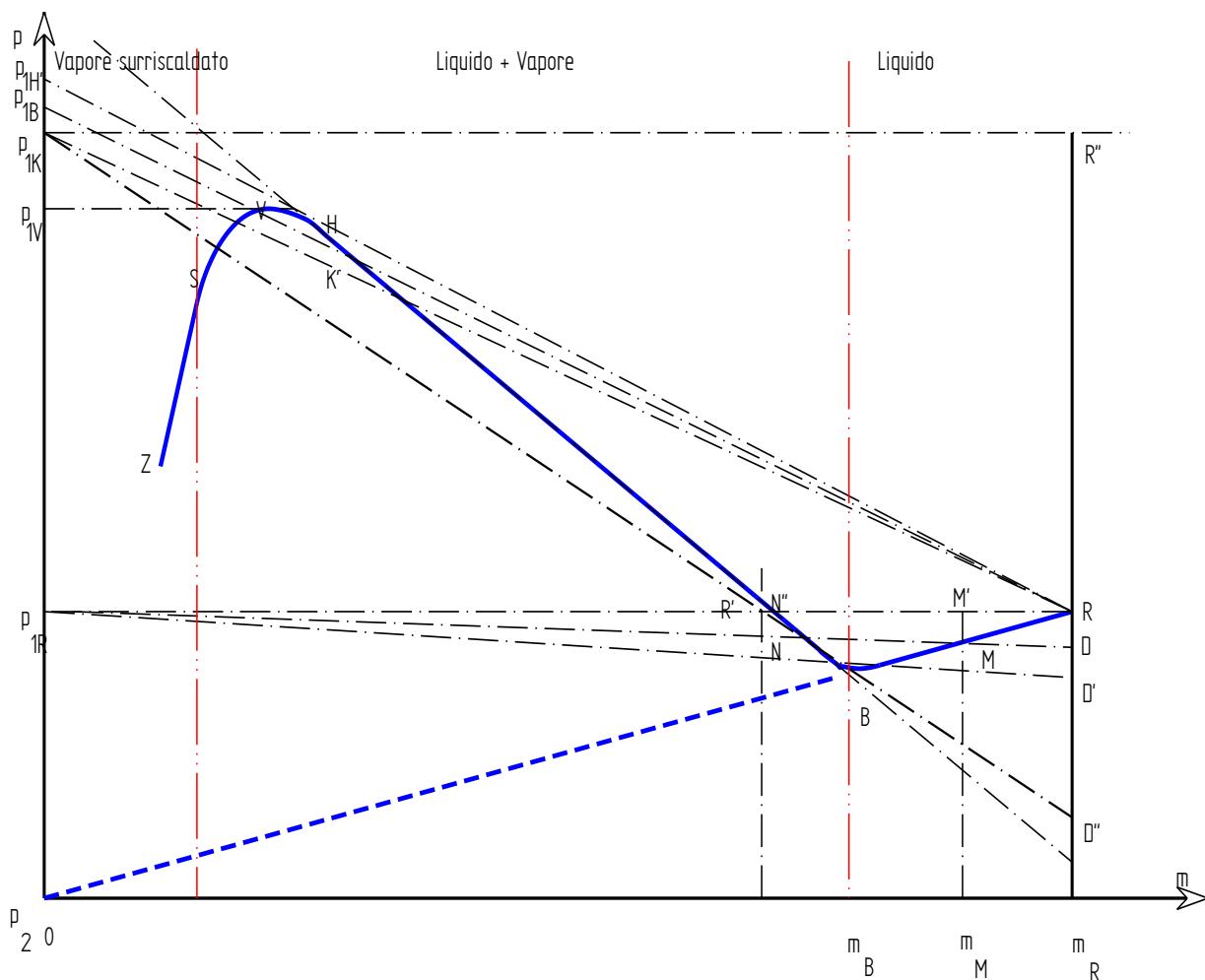


Figura 14: Andamento delle pressioni al variare della portata

Si ha, quindi, la curva  $BH$  di Figura 14 che si raccorda con continuità con la  $OR$  in quanto l'ebollizione non si presenta contemporaneamente e nella stessa forma in tutte le sezioni del condotto.

In corrispondenza ad un titolo  $x=0.25 \div 0.30$  (a seconda dei casi), punto  $V$  della figura, si ha il massimo della caduta di pressione  $p_{lv} - p_2 = \Delta p_v$ . Se la portata decresce ulteriormente allora  $p_1$  diminuisce fino al punto  $S$  (dove si ha  $x=1$ ) dove si ha la scomparsa del liquido allo sbocco. Una ulteriore diminuzione della portata comporta il surriscaldamento del vapore (si è quindi in regime nuovamente monofase ma di vapore e non più di liquido) con andamento lineare con una nuova  $K_2$ . In realtà giunti nel punto  $Z$  si ha la bruciatura (*burn out*) del tubo bollitore.

Si osservi che ci si può spingere fino al punto  $Z$  solo se il flusso termico specifico (cioè per unità di superficie) è basso. Con i valori correnti dei flussi termici si ha la bruciatura molto prima di arrivare ad  $S$ , più precisamente per  $x=0.7 \div 0.8$ .

Se il flusso termico è particolarmente elevato si può avere la bruciatura del tubo bollitore già durante l'ebollizione sottoraffreddata.

### 1.1.11. PUNTO DI LAVORO DEL TUBO BOLLITORE

Supponiamo di avere la pressione iniziale  $p_1 = p_R$ , come indicato in Figura 14, ed introduciamo all'ingresso del condotto una resistenza localizzata (ad esempio un ugello) tale che si abbia una caduta di pressione data da:

$$\Delta p_r = \frac{r \bar{w}^2}{2} = r \frac{\dot{m}^2 v}{2S^2} = r' \dot{m}^2$$

con  $r'$  funzione della resistenza adottata. In figura si ha la rappresentazione della caduta di pressione con la retta  $p_{1R}D$  formante con la  $p_{1R}R$  (orizzontale) un angolo  $\alpha$  tale che sia  $tag(\alpha) = r'$ .

Il significato fisico di queste rette appare evidente se si considera che per ogni valore della portata di massa  $\dot{m}$  si hanno segmenti intercetti fra esse che rappresentano le cadute di pressione  $\Delta p_r$  nella resistenza localizzata.

I punti M ed N rappresentano punti di funzionamento in presenza dell'ugello quando all'imbocco è applicata una pressione  $p=1R$ , così come i punti R, R' rappresentano punti possibili di funzionamento in assenza dell'ugello. In corrispondenza dei predetti punti, infatti, la somma della caduta di pressione nell'ugello  $\Delta p_r$  e nel tubo bollitore egualia la caduta di pressione totale  $p_{1R} - p_2$ .

I punti come R ed M sono **punti di funzionamento stabile**: infatti se per ragioni accidentali la portata aumenta o diminuisce si ha, rispettivamente, un difetto o un eccesso di pressione motrice che tende a ripristinare le condizioni primitive.

Non si può dire lo stesso di R' ed N': infatti un aumento accidentale di portata provoca un salto repentino in R o in M (rispettivamente) mentre una diminuzione di portata tende ad esaltarsi portando il condotto alla bruciatura.

Se si sceglie come pressione di imbocco  $p_{1K}$  si può ottenere il funzionamento nel punto R con l'introduzione di una resistenza tale che sia:

$$r' = tag\alpha' = \frac{p_{1K} - p_{1R}}{\dot{m}^2}$$

Per questo valore tracciamo la retta  $p_{1K}R$  tale che sia:

$$tag\alpha' = \frac{RR''}{\dot{m}_R^2} = r' = \frac{p_{1K} - p_{1R}}{\dot{m}^2}$$

Questa retta incontra la curva delle pressioni, oltre che in R, anche in K e K'. Di questi punti solo R e K sono relativi ad un funzionamento stabile mentre K' è instabile e si salta in R o in K. Quindi con la scelta della pressione  $p_{1R}$  per la pressione di imbocco una eventuale instabilità si ferma in K e pertanto, se la bruciatura avviene oltre questo punto, si può evitare il danno al tubo bollitore.

Quando il funzionamento nel punto R è ottenuto con la pressione  $p_{1R}$  si è garantiti contro eventuali bruciature per ostruzioni accidentali aventi:

$$r' \leq \frac{RD'}{\dot{m}_R^2}$$

mentre con la pressione  $p_{1K}$  questo valore diviene più elevato, fino a:

$$r' = \frac{R''D''}{\dot{m}_R^2}$$

La pressione  $p_{1K}$  presenta anche il vantaggio che, in caso di ostruzioni che portino il funzionamento nella curva VS, si ha ancora un funzionamento stabile e la bruciatura può essere evitata con maggiore facilità se si dispone di un apparecchio di allarme acustico.

La scelta della pressione  $p'_{1H}$  sulla tangente da R al punto H, oltre a migliorare le condizioni di sicurezza precedentemente citati (con riferimento alle ostruzioni accidentali) permette un ritorno automatico delle condizioni dell'arco ZSH al punto R. Questo non è possibile con pressioni minore di  $p_{1V}$ ; infatti dalla Figura 14 si osserva che se  $p_1 < p_{1V}$  per il ritorno dell'arco SV ed R non basta regolare la resistenza di imbocco ma occorre ridurre anche la potenza termica fornita in modo da avere una diminuzione di  $p_{1max}$  (in corrispondenza di V). La scelta di una pressione di imbocco più elevata di  $p_{1B}$  consente il funzionamento in tutte le condizioni mediante l'introduzione di resistenza variabili (saracinesche di regolazione); si possono, infatti, intersecare con la retta di carico tutti i punti della curva del tubo bollitore ed avere un funzionamento stabile.

In definitiva, la scelta della pressione a monte di un tubo bollitore va fatta oculatamente in base al grado di sicurezza che si desidera ottenere.

Il raggiungimento di condizioni di optimum comporta la necessità di scegliere pressioni piuttosto elevate, introducendo all'ingresso del condotto resistenze concentrate (ugelli, saracinesche, ...). Queste resistenze proteggono il tubo bollitore (che di solito funziona in parallelo ad altri tubi) dato che variazioni accidentali della portata nominale hanno minore peso.

L'introduzione di ugelli allo sbocco (anziché all'imbocco) esercita una protezione, nel senso che fa crescere la pressione a monte. In questo caso l'ebollizione inizia a temperature più elevate e quindi per portate minori.

Tuttavia, se l'ebollizione inizia allora le condizioni risultano aggravate. L'ugello posto all'imbocco è sempre attraversato da solo liquido mentre se è posto allo sbocco è attraversato da una miscela di liquido e vapore e quindi producendo una resistenza maggiore. La portata, per conseguenza, diminuisce rapidamente e la bruciatura del condotto viene facilitata.

## 7.2. TUBO BOLLITORE VERTICALE

Lo studio dei tubi bollitori verticali è più complesso di quello prima mostrato di tubi orizzontali.

Per questi condotti si possono avere due casi:

- Moto del fluido dal basso verso l'alto: in questo caso si hanno condizioni di stabilità maggiori rispetto ai tubi orizzontali;
- Moto del fluido dall'alto verso il basso: le condizioni di sicurezza diminuiscono rispetto al caso di condotto orizzontale.

### 1.1.12. CALCOLO DELLA PORTATA DI INIZIO E FINE EBOLLIZIONE

Ai fini dell'analisi della stabilità e sicurezza di un tubo bollitore è necessario conoscere le portate di inizio e fine ebollizione. Si abbia, quindi, un condotto sottoposto a flusso termico  $Q_e$  esterno (supposto costante ed uniforme). Il fluido entra alla temperatura  $t_i$  con entalpia  $h_{l_1}$  e ad una pressione  $p$  che possiamo ritenere costante. Il calore necessario per avere l'ebollizione è pari a:

$$q_{e_{l,2}} = h_{l_2} - h_{l_1}$$

$x=0$

ove  $h_{l_2}$  è l'entalpia del fluido in ebollizione alla pressione  $p$  e  $q_e$  il flusso specifico ( $J/kg$ ) da fornire al fluido. Noto il flusso totale esterno  $Q_e$  e la portata totale di massa si calcola:

$$q_{e_{l,2}} = \frac{Q_e}{\dot{m}}$$

Si può anche scrivere, per la portata totale e il flusso termico totale, la relazione globale di bilancio:

$$\dot{m}_i = \frac{Q_e}{h_{l_2} - h_{l_1}}$$

essendo  $\dot{m}_i$  la portata di massa di inizio ebollizione.

Supponendo costante la pressione<sup>8</sup>  $p$  del condotto, alla fine dell'ebollizione l'entalpia del vapore saturo vale:

$$h_{v_2} = h_{l_2} + r_2$$

essendo  $r_2$  il calore latente di vaporizzazione alla pressione considerata. Il flusso specifico vale:

$$q_{l_2} = h_{v_2} - h_{l_1} = h_{l_2} + r_2 - h_{l_1}$$

$x=1$

---

<sup>8</sup> Si ricordi che le cadute di pressione sono sempre mantenute basse per evitare grandi potenze di pompaggio per il moto del fluido nel condotto considerato.

e deve avversi:

$$h_{l_2} + r_2 - h_{l_1} = \frac{Q_e}{\dot{m}_f}$$

ove  $\dot{m}_f$  è la portata specifica di fine ebollizione. Risulta, pertanto:

$$\dot{m}_f = \frac{Q_e}{h_{l_2} + r_2 - h_{l_1}}$$

Le cadute di pressione per portate di massa inferiori a quella di inizio ebollizione,  $\dot{m}_i$ , si calcolano con le solite relazioni per flusso monofase (Weissbach):

$$\Delta p = \xi \frac{L}{d} \frac{\bar{w}^2}{2v} = \xi \frac{L}{d} \frac{\dot{m}^2}{2S^2} v$$

Per il calcolo di  $\xi$  si utilizza la solita correlazione per tubi lisci  $\xi = 0.184 \text{Re}^{-0.2}$ .

Allorquando ha inizio l'ebollizione la caduta di pressione va calcolata con uno dei metodi prima esposti per le perdite di pressione in moto bifase, ad esempio con il metodo di Thom.

Il titolo di vapore in uscita dal tubo bollitore si calcola mediante la già citata equazione dell'energia:

$$q_{e_{l,2}} = \Delta_{l,2} \left( h + gz + \frac{\bar{w}^2}{2} \right)$$

Ponendo  $x_1=0$  e trascurando il contributo dei termini meccanici (cinetico e gravimetrico) si può scrivere:

$$q_{e_{l,2}} \approx r_2 x_2$$

ovvero anche:

$$\frac{Q_e}{\dot{m}} \approx r_2 x_2$$

Da questa relazione si calcola il titolo in uscita  $x_2$  al variare di  $\dot{m}$ . Noto  $x_2$  si calcola la caduta totale di pressione:

$$\Delta p_{1,2} = \Delta p_{2Fa} + \Delta p_{slip} + \Delta p_{grav} = M \Delta p_{1,2_{Fla}} + R \frac{\dot{m}^2}{S^2} v_{l_2} + \frac{L \zeta}{v_{l_2}}$$

con  $M$ ,  $R$  e  $\zeta$  calcolati con gli abachi di Thom<sup>9</sup>.

Va osservato, infine, che la portata allo sbocco non può variare a piacere dovendo essere sempre inferiore alla velocità massima (per tubi a sezione costante) pari a quella del suono, come si è visto per il moto dei fluidi comprimibili.

### 7.3. EFFETTI DELLA VARIAZIONE DI DENSITÀ NEL MOTO DEI FLUIDI IN CONDOTTI VERTICALI

All'interno dei tubi bollitori o dei canali di refrigerazione degli impianti nucleari o di reattori chimici si ha moto di fluido con cambiamento di densità, dovuta alle variazioni di temperatura lungo il condotto, che possono produrre problemi di instabilità se non adeguatamente controllati.

Ambiamo già trovato l'equazione A) che qui si ripete riscrivendo diversamente il termine cinetico:

---

<sup>9</sup> E' ovvio che lo stesso discorso vale per l'applicazione del metodo di Martinelli e Nelson ove, però, le perdite gravimetriche debbono essere stimate separatamente.

$$-dp = \frac{wdw}{v} + \gamma dz + \xi \frac{1}{d} \frac{\dot{m}^2}{2S^2} vdl + \frac{dL_m}{v}$$

Integrando questa equazione fra le sezioni 1 e 2 (ingresso e uscita) e trascurando il termine dovuto al lavoro positivo del circolatore si ha:

$$p_1 - p_2 = \int_1^2 \frac{wdw}{v} + \int_1^2 \gamma dz + \int_1^2 \frac{dR}{v}$$

In questa equazione occorre osservare che, per condotti a sezione costante, la variazione di volume specifico è di solito piccola e quindi le variazioni di velocità sono parimenti piccole e pertanto il termine cinetico apporta contributi trascurabili.

Nel termine gravimetrici il peso specifico  $\gamma$  varia con la temperatura secondo la legge:

$$\gamma = \gamma_1 [1 + \beta(t - t_1)]$$

con  $\beta$  coefficiente di dilatazione cubica (o di espansione isobaro già visto in Termodinamica) e  $t$  la temperatura corrente. La stessa relazione vale per la variazione della densità con la temperatura.

Per saldi termici piccoli si può ritenere parimenti piccola la variazione di densità e pertanto si può utilizzare il suo valore medio,  $\bar{\rho}$ , fra le due sezioni considerate e quindi la caduta totale di pressione diviene:

$$p_1 - p_2 = \bar{\rho} R_{1,2} + \gamma_1 (z_2 - z_1) - \gamma_1 \int_1^2 \beta(t - t_1) dz$$

Sempre supponendo piccole variazioni dei parametri termofisici e linearizzando le variazioni con l'altezza, possiamo ancora scrivere:

$$p_1 - p_2 + \gamma_1 (z_1 - z_2) = \xi \frac{L}{d} \frac{\dot{m}^2}{2\rho S^2} - \gamma_1 \beta \frac{z_2 - z_1}{2} \frac{Q_e}{cm}$$

ove si è tenuto conto che è  $Q_e = c \dot{m}(t_2 - t_1)$ .

L'ultimo termine (negativo) rappresenta l'alleggerimento termico (*thermal buoyancy*) della colonna di fluido dovuto al riscaldamento subito ed è quello che determina il movimento del fluido nei casi di circolazione naturale<sup>10</sup>.

La precedente equazione può essere così schematizzata:

$$p_1 - p_{2\dot{m}} - Z = A \dot{m}^{1.8} - \frac{B}{\dot{m}} \quad (\text{movimento verso l'alto})$$

$$p_1 - p_{2\dot{m}} - Z = A \dot{m}^{1.8} + \frac{B}{\dot{m}} \quad (\text{movimento verso il basso})$$

ove A e B sono costanti di raggruppamento positive.

Gli indici 1 e 2 si riferiscono sempre all'imbocco e allo sbocco, qualunque sia l'orientamento del condotto.

Si è anche supposto, secondo la relazione di Weissbach per tubi lisci, che sia  $\xi = K \dot{m}^{-0.2}$  ed inoltre si è supposto  $K/\rho$  indipendente dalla portata e pari al suo valore medio fra le due sezioni considerate.

<sup>10</sup> La circolazione naturale non è quasi mai utilizzata direttamente per il moto dei fluidi negli impianti ma rappresenta sempre un elemento di sicurezza da considerare quando viene meno la potenza motrice della pompa. Se il fluido può ancora circolare esso può trasportare calore e quindi mantenere la temperatura del canale sotto controllo. In un impianto nucleare o in un reattore chimico o in un generatore di vapore l'arresto del fluido all'interno dei canali può portare facilmente a scippi estremamente pericolosi e distruttivi.

In Figura 15 si ha la rappresentazione grafica della caduta totale di pressione sia per moto verso l'alto che per moto verso il basso. In essa sono riportati anche gli andamenti dei singoli termini,  $\frac{B}{\dot{m}}$ ,  $A\dot{m}^{1.8}$ , Z per i due casi, secondo le precedenti equazioni.

Nella figura la portata  $\dot{m}$  è posta in relazione con  $\Delta p - Z$  per il moto verso l'alto e con  $\Delta p + Z$  per il moto verso il basso. Le curve in neretto rappresentano le combinazioni dei termini, come dianzi specificato. Al crescere della potenza ceduta al fluido la curva complessiva si sposta verso destra, allontanandosi da quella segnata. Si osservi che le due curve (moto verso l'alto e moto verso il basso) si raccordano, per continuità, nel modo segnato a tratto punteggiato in figura.

Quando la potenza cresce il termine  $A\dot{m}^{1.8}$  varia poco mentre cambia molto  $\frac{B}{\dot{m}}$  essendo  $B \cap Q_e$ .

Le curve reali si arrestano in corrispondenza dei punti X nei quali ha inizio l'ebollizione. A pieno carico, cioè per il massimo valore di  $Q_e$ , l'ebollizione inizia, come si intuisce, a valori più alti della portata essendo l'aumento di temperatura dato (per quanto detto in precedenza) dalla relazione:

$$t_2 - t_1 = \frac{Q_e}{c \dot{m}}$$

Pertanto quando ci si trova nelle condizioni di fluido lavorante in caldaia o in un reattore nucleare a potenza ridotta occorre fare in modo che il salto di temperatura dello stesso fluido sia il più possibile costante e pari al valore di regime precedente.

Ciò si ottiene riducendo la portata  $\dot{m}$  in modo proporzionale al calore  $Q_e$ .

Riducendo la portata  $\dot{m}$  ci si porta in corrispondenza del punto M o del punto N (a seconda del verso del fluido) di Figura 15. Il movimento in corrispondenza di questi punti è stabile: infatti, se per qualsivoglia ragione la portata  $\dot{m}$  cresce o diminuisce il punto di lavoro si sposta a destra o a sinistra e si determina un difetto di pressione motrice che tende a ripristinare le condizioni iniziali.

Lo stesso succede a sinistra del punto B. A destra di B si ha, invece, instabilità e si tende verso la condizione del punto X di inizio ebollizione e quindi verso le condizioni di *burn out* del condotto. Anche per il tratto MB le condizioni operative non sono buone perché un aumento accidentale della resistenza può provocare, con relativa facilità, un salto nel tratto BX della curva.

Tutte le circostanze sopra indicate debbono essere tenute in conto quando si progetta un tubo bollitore o un qualunque sistema nel quale il fluido lavorante funga da refrigerante per il sistema.

In definitiva, in base a quanto detto, il moto verso l'alto risulta sempre stabile. Tuttavia spesso si preferisce il moto verso il basso per avere di migliori condizioni operative ai fini della protezione in caso di incidenti<sup>11</sup>.

### 1.1.13. PROGETTO DEI CONDOTTI

Si tenga sempre presente che l'inizio dell'ebollizione porta sempre ad avere maggiori perdite di pressione e quindi aumenti consistenti della resistenza al movimento che facilitano le condizioni di *burn out* del condotto e pertanto occorre intervenire opportunamente per evitare che queste condizioni si raggiungano. Quando i tubi bollitori sono posti in parallelo (nei generatori termici e nei reattori nucleari si utilizza spesso questa configurazione) allora le condizioni operative divengono più critiche poiché l'aumento della resistenza in un condotto porta ad avere una nuova ridistribuzione della portata negli altri condotti e quindi si ha una variazione rispetto alle condizioni nominali di lavoro.

Se si osserva la relazione precedentemente ottenuta:

$$p_1 - p_2 + \gamma_1(z_1 - z_2) = \xi \frac{L}{d} \frac{\dot{m}^2}{2\rho S^2} - \gamma_1 \beta \frac{z_2 - z_1}{2} \frac{Q_e}{cm}$$

<sup>11</sup> Negli impianti nucleari, ad esempio, il moto verso il basso consente di contenere nella zona inferiore dell'impianto il fluido caldo e radioattivo.

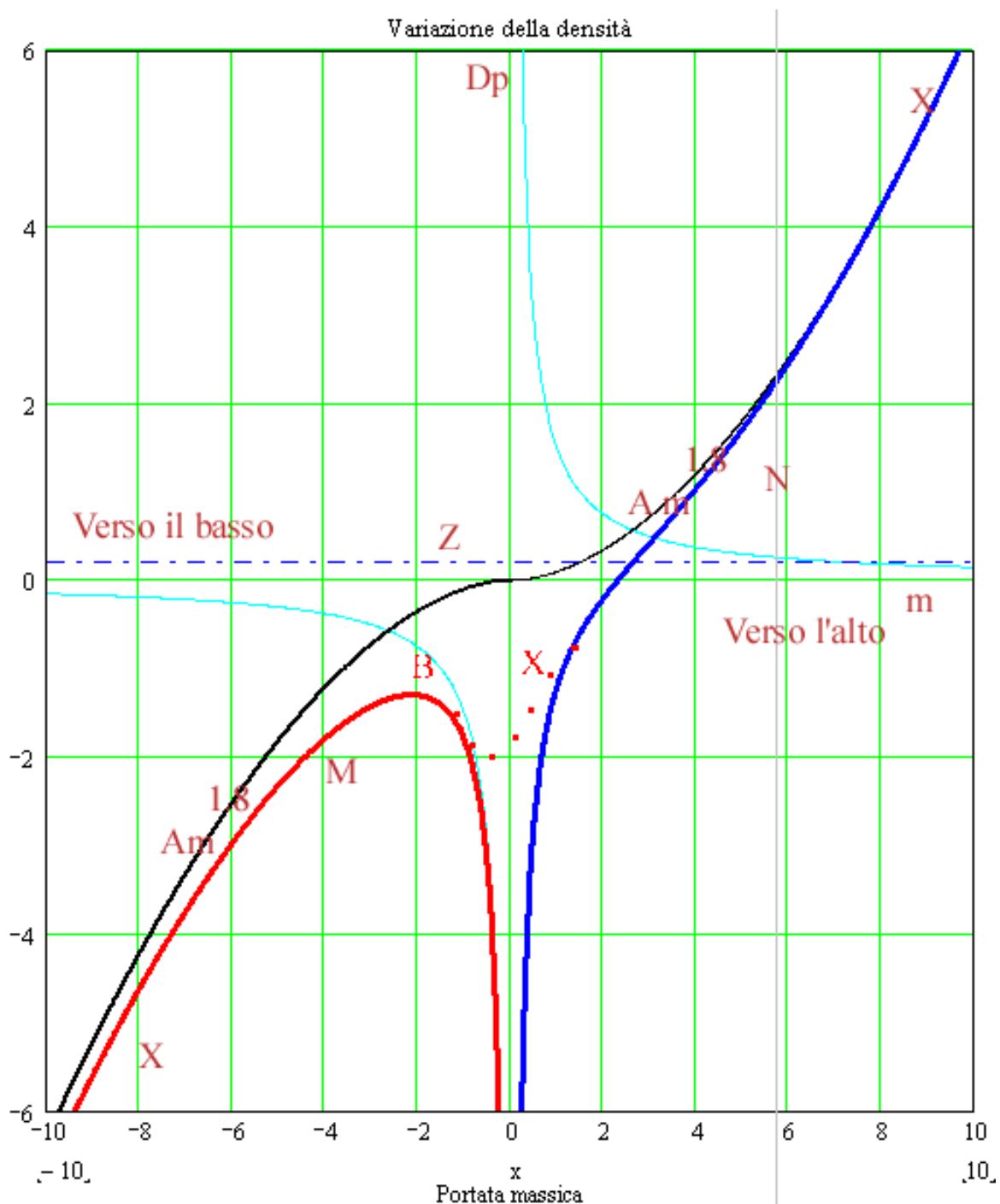


Figura 15: Caduta totale di pressione

si può dire che il sistema prima dell'ebollizione risulta tanto più stabile quanto più il termine relativo alla variazione della densità,  $\gamma_1 \beta \frac{z_2 - z_1}{2} \frac{Q_e}{cm}$ , risulta piccolo rispetto a quello delle perdite per attrito,  $\xi \frac{L}{d} \frac{\dot{m}^2}{2 \rho S^2}$ .

#### Cadute di pressione molto maggiori delle variazioni di densità

Se quest'ultimo è relativamente grande allora la progettazione di condotti in parallelo può essere effettuata con i metodi visti in precedenza per i condotti in serie e in parallelo.

### Cadute di pressione piccole rispetto alle variazioni di densità

Se il termine di variazione della densità prevale su quelle delle perdite di attrito allora si possono avere condizioni di instabilità e si procede iterativamente nella progettazione.

In pratica si scelgono le pressioni di imbocco,  $p_1$ , e di sbocco,  $p_2$ , ed i diametri dei condotti. Si calcolano le portate  $\dot{m}_i$  dei singoli condotti utilizzando la relazione precedente e quindi si calcola la portata totale  $\dot{m} = \sum_{i=1 \rightarrow N} \dot{m}_i$ . Se la portata totale  $\dot{m}$  è inferiore a quella desiderata si modificano alcuni parametri di progetto e si ripete il calcolo fino al raggiungimento delle condizioni finali volute.

Si osservi che è sempre necessario verificare, oltre alle condizioni di moto, anche quelle di congruenza relative alla trasmissione del calore e cioè che la superficie totale dei condotti sia tale da assicurare lo smaltimento del calore  $Q_e$  e cioè che sia:

$$Q_e = \sum_{i=1 \rightarrow N} K_i S_i \Delta t_i$$

### Caso di circolazione naturale

Spesso si desidera avere una circolazione del fluido di tipo naturale<sup>12</sup> allora la *driving force* è proprio dovuta alla variazione di densità che è in diretta proporzione al calore ricevuto. Pertanto la velocità di regime nei condotti cresce se cresce la potenza termica ceduta e ciò provoca una sorta di uniformazione delle velocità nei condotti che riduce le tensioni termiche fra le varie zone dell'impianto.

La circolazione naturale avviene usualmente con basse perdite di pressione e ciò porta ad avere diametri di condotti superiori ai corrispondenti a circolazione forzata, come già visto in precedenza.

---

<sup>12</sup> In alcune zone degli impianti nucleari, ad esempio negli schermi radioattivi, si preferisce avere moto verso l'alto a bassa velocità e con piccole cadute di pressione. Si osservi che le condizioni di circolazione naturale sono sempre da prendere in considerazione per le condizioni di emergenza. Una fermata delle pompe di circolazione, infatti, non può e non deve comportare il blocco del fluido all'interno dei tubi bollitori perché ciò produrrebbe certamente un incidente: il calore fornito non sarebbe più trasportato via e quindi si hanno scoppi o altri disastri. E' quanto avvenuto, ad esempio, nel reattore di Chernobil dove la fermata (forse volontaria) delle pompe di circolazione ha portato alla stagnazione del fluido refrigerante con conseguente surriscaldamento del nocciolo del reattore nucleare che è fuso.

## INDICE GENERALE

<b>1. FLUIDI COMPRIMIBILI - Deflusso monodimensionale .....</b>	<b>1</b>
1.1. Comprimibilità ed espansione .....	2
1.2. Velocità del suono e numero di Mach .....	6
1.3. Stati termodinamici particolari .....	8
1.4. Fattore di compressibilità .....	12
<b>2. Moto adiabatico nei condotti a sezione variabile .....</b>	<b>14</b>
2.1. <a href="#"><u>Equation Section 2</u></a> Moto isoentropico: Velocità e portata specifica .....	14
2.2. Teorema di Hugoniot.....	18
2.3. Condizione di funzionamento di un ugello .....	23
1.1.1. Ugello convergente .....	23
1.1.2. Ugello convergente - divergente .....	25
1.1.3. Osservazioni.....	26
2.4. Moto adiabatico con attrito .....	28
<b>3. Moto adiabatico nei condotti cilindrici.....</b>	<b>32</b>
3.1. L'attrito nei fluidi comprimibili. Teorema di Fanno .....	32
3.2. Parametro limite e gradiente di pressione .....	35
3.3. Stato termodinamico di riferimento .....	37
3.4. Funzionamento dei condotti misti.....	38
1.1.4. Condotto alimentato da un convergente .....	39
1.1.5. Condotto alimentato da un convergente - divergente .....	40
<b>4. Moto isotermo nei condotti cilindrici.....</b>	<b>42</b>
4.1. Perdite di pressione e portata di massa .....	42
4.2. Parametro limite. Stato critico.....	45
4.3. Condizione di isotermicità .....	48
<b>5. Moto con scambio termico nei condotti cilindrici.....</b>	<b>50</b>
5.1. <a href="#"><u>Equation Section 5</u></a> Deflusso di Rayleigh.....	50
5.2. Somministrazione massima di calore .....	54
5.3. Velocità di riferimento e velocità massima .....	57
5.4. Evoluzione del deflusso sulla linea di Rayleigh.....	58
<b>6. Circolazione dei fluidi bifase .....</b>	<b>60</b>
6.1. Tipi di moto bifase .....	61
6.2. Calcolo delle perdite di pressione in regime bifase .....	63
1.1.6. Metodo di Hanford .....	63
Osservazioni sul metodo di Hanford .....	65
1.1.7. Condotti verticali - calcolo delle perdite gravimetriche .....	65
1.1.8. Metodo di Martinelli e Nelson .....	66
Osservazioni sul Metodo di Martinelli e Nelson .....	69
1.1.9. Metodo di Thom .....	70
Osservazioni sul metodo di Thom .....	71
1.1.10. Metodo di Chenoveth, Martin, Lester.....	73
<b>7. Stabilità dei tubi bollitori .....</b>	<b>75</b>
7.1. Tubo bollitore orizzontale .....	75
1.1.11. Punto di lavoro del tubo bollitore.....	76
7.2. Tubo bollitore verticale .....	78
1.1.12. Calcolo della portata di inizio e fine ebollizione .....	78
7.3. Effetti della variazione di densità nel moto dei fluidi in condotti verticali .....	79
1.1.13. Progetto dei condotti .....	81

Cadute di pressione molto maggiori delle variazioni di densità .....	82
Cadute di pressione piccole rispetto alle variazioni di densità.....	83
Caso di circolazione naturale .....	83

**INDICE DELLE FIGURE**

Figura 1	6
Figura 2	12
Figura 3: Regimi di moto in condotto verticale durante l'ebollizione	62
Figura 4: Regimi di moto in condotto orizzontale durante l'ebollizione	62
Figura 5: Diagramma del moltiplicatore $X_{tt}$ di Martinelli	67
Figura 6: Abaco di Martinelli e Nelson per M	68
Figura 7: Condizioni iniziali con titolo non nullo	68
Figura 8: Abaco di Martinelli e Nelson per R	69
Figura 9: Abaco di Thom per M	71
Figura 10: Abaco di Thom per R	72
Figura 11: Abaco di Thom per $\zeta$	72
Figura 12: Abaco di Thom per M per condotto senza flusso termico	73
Figura 13: fattore M per C-M-L	74
Figura 14: Andamento delle pressioni al variare della portata	76
Figura 15: Caduta totale di pressione	82

**INDICE DELLE TABELLE**

**Non è stata trovata alcuna voce dell'indice delle figure.**